THE UNIVERSITY
OF ILLINOIS
LIBRARY

515
~~517~~
C126
v.3

MATHEMATICS

515
C126
v.3

24 My 26

SUR LA
TRANSFORMATION DES VARIABLES
DANS
LES INTÉGRALES MULTIPLES,

MÉMOIRE QUI A OBTENU LA MÉDAILLE D'OR LE 6 MAI 1840,

EN RÉPONSE A LA QUESTION :

UN MÉMOIRE SUR L'ANALYSE ALGÉBRIQUE, DONT LE SUJET EST LAISSÉ AU CHOIX DES CONCURRENTS,

PAR

EUG.-CH. CATALAN,

RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE PARIS.

INTRODUCTION.

On le peut, je l'essaie : un plus savant le fasse !

Ce mémoire est divisé en quatre parties :

Dans la première, après avoir donné une démonstration assez simple de la règle qui sert à former le dénominateur de la valeur des inconnues dans les équations du premier degré, j'examine quelle forme prend ce dénominateur commun, lorsque l'on établit entre les coefficients des équations proposées, certaines relations. Cette recherche me fait découvrir plusieurs propriétés remarquables des fonctions appelées *résultantes*, par Laplace, et connues aujourd'hui sous le nom de *déterminants*.

Dans la seconde partie, qui fait l'objet principal du mémoire, je m'occupe de la transformation des variables dans les intégrales multiples. Lagrange et d'autres géomètres s'étaient occupés du cas de trois variables; et, quoique la symétrie de la formule fît présumer aisément ce qu'elle devait être pour un nombre quelconque de variables, ce n'était là qu'une simple induction, qu'il était difficile de justifier, en suivant la marche indiquée par Lagrange. En outre, personne, je le

595517

SUR LA

TRANSFORMATION DES VARIABLES

DANS

LES INTÉGRALES MULTIPLES.

PREMIÈRE PARTIE.

VALEURS GÉNÉRALES DES INCONNUES DANS LES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ, ET PROPRIÉTÉS DES DÉNOMINATEURS COMMUNS.

1. Considérons les n équations du premier degré entre n inconnues:

$$\left.\begin{aligned}
&a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + \ldots + k_1x_{n-1} + l_1x_n = \alpha_1,\\
&a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + \ldots + k_2x_{n-1} + l_2x_n = \alpha_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_nx_1 + b_nx_2 + c_nx_3 + \ldots + k_nx_{n-1} + l_nx_n = \alpha_n.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Pour obtenir la valeur de l'une quelconque des inconnues, de x_n, par exemple, je multiplie ces n équations respectivement par n indéterminées λ_1, λ_2, ... λ_n, entre lesquelles j'établis les $n-1$ relations

suivantes :

$$\left.\begin{aligned} &a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \ldots + a_n\lambda_n = o,\\ &b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + \ldots + b_n\lambda_n = o,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + \ldots + k_n\lambda_n = o; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

ce qui donne

$$x_n = \frac{\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_n\alpha_n}{\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + \ldots + \lambda_n l_n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Cette expression de x_n démontre la règle qui sert à former le numérateur de chaque inconnue, au moyen du dénominateur.

2. Les équations (2) sont au nombre de $(n-1)$, entre n inconnues. On peut donc satisfaire à ces équations d'une infinité de manières; mais parmi tous les systèmes que l'on peut adopter, il en existe un très-simple. C'est ce que les calculs suivants vont démontrer.

3. Dans les équations (1), j'omets successivement chacune d'elles, et, en même temps, l'inconnue x_n. J'obtiens de la sorte, n systèmes d'équations entre $(n-1)$ inconnues; savoir :

$$\left.\begin{aligned} &a_2x_1 + b_2x_2 + \ldots + k_2x_{n-1} = \alpha_2,\\ &a_3x_1 + b_3x_2 + \ldots + k_3x_{n-1} = \alpha_3,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &a_nx_1 + b_nx_2 + \ldots + k_nx_{n-1} = \alpha_n. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1^o)$$

$$\left.\begin{aligned} &a_3x_1 + b_3x_2 + \ldots + k_3x_{n-1} = \alpha_3,\\ &a_4x_1 + b_4x_2 + \ldots + k_4x_{n-1} = \alpha_4,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &a_nx_1 + b_nx_2 + \ldots + k_nx_{n-1} = \alpha_n,\\ &a_1x_1 + b_1x_2 + \ldots + k_1x_{n-1} = \alpha_1. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2^o)$$

$$\left.\begin{aligned} &a_4x_1 + b_4x_2 + \ldots + k_4x_{n-1} = \alpha_4,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &a_nx_1 + b_nx_2 + \ldots + k_nx_{n-1} = \alpha_n,\\ &a_1x_1 + b_1x_2 + \ldots + k_1x_{n-1} = \alpha_1,\\ &a_2x_1 + b_2x_2 + \ldots + k_2x_{n-1} = \alpha_2. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3^o)$$

$$\left.\begin{array}{l} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + k_1x_{n-1} = \alpha_1, \\ a_2x_1 + b_2x_2 + \ldots + k_2x_{n-1} = \alpha_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1}x_1 + b_{n-1}x_2 + \ldots + k_{n-1}x_{n-1} = \alpha_{n-1}. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (\text{n}^\circ)$$

Il est bien entendu que, dans deux quelconques de ces systèmes, les inconnues affectées des mêmes indices, n'ont cependant pas la même signification.

4. Je désigne actuellement par D_1 le dénominateur des valeurs des inconnues dans les équations 1° : je démontrerai tout à l'heure que le dénominateur est le même pour toutes ces inconnues; je désigne de même par D_2, D_3, ... D_n, les dénominateurs pour les autres systèmes, ces dénominateurs étant déduits de D_1 par une *permutation tournante* effectuée sur les indices des lettres a, b, c, ... : par exemple, pour passer de D_1 à D_3, il suffit de remplacer a_2 par a_4, b_3 par b_5, etc.

Cela étant, l'on pourra prendre, pour satisfaire aux équations (2) :

$$\lambda_1 = D_1, \quad \lambda_2 = D_2, \quad \ldots \lambda_n = D_n; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

ou, ce qui revient au même, on aura *identiquement :*

$$\left.\begin{array}{l} a_1D_1 + a_2D_2 + \ldots + a_nD_n = o, \\ b_1D_1 + b_2D_2 + \ldots + b_nD_n = o, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_1D_1 + k_2D_2 + \ldots + k_nD_n = o; \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

et, par suite, le dénominateur commun relatif aux équations (1) sera

$$\Delta = l_1D_1 + l_2D_2 + \ldots + l_nD_n. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

5. Par un calcul direct, on vérifie la formule (6) et les relations (5), pour le cas de trois équations. En même temps, l'on reconnaît que

1° Le dénominateur de la valeur de x_3, par exemple, renferme toutes les combinaisons trois à trois des coefficients, chaque combinaison ne contenant ni deux fois la même lettre, ni deux fois le même indice;

2° Deux termes qui, dans l'expression de ce dénominateur, peuvent se déduire l'un de l'autre par une permutation tournante, ont même signe;

3° Deux termes qui ne diffèrent que par le changement d'une lettre en une autre, et réciproquement, sont de signes contraires;

4° Par suite, le dénominateur est le même pour toutes les inconnues, pourvu que l'on prenne convenablement le signe du numérateur.

6. Supposons donc que pareille vérification ait été faite pour $n-1$ équations entre $n-1$ inconnues, je dis qu'elle se fera encore dans le cas de n équations.

En effet, soit, pour fixer les idées, $n=7$; l'un des termes de D_1 sera $a_4\,b_3\,c_5\,d_7\,e_2\,f_6$, et l'un des termes de D_4 sera $a_1\,b_3\,c_5\,d_7\,e_2\,f_6$. Je dis de plus que ces deux termes sont de signes contraires.

Pour justifier cette assertion, qui est la base de toute ma démonstration, j'observe que

1° le terme $a_4\,b_3\,c_5\,d_7\,e_2\,f_6$ de D_1, a le même signe que $a_7\,b_6\,c_1\,d_3\,e_5\,f_2$, lequel entre dans D_4, et se déduit du précédent par une permutation tournante entre les indices;

2° Les deux termes $a_7\,b_6\,c_1\,d_3\,e_5\,f_2$ et $e_7\,f_6\,a_1\,b_3\,c_5\,d_2$ qui entrent dans D_4, et qui se déduisent l'un de l'autre par une permutation tournante entre les lettres, ont même signe;

3° Les deux termes $a_1\,b_3\,c_5\,d_7\,e_2\,f_6$ et $e_7\,f_6\,a_1\,b_3\,c_5\,d_2$ de D_4, qui ne diffèrent que par le changement de d en e, et *vice versâ*, sont de signes contraires.

7. Il résulte de cette discussion que la fonction $a_1D_1+a_2D_2+\ldots+a_nD_n$ est composée de termes qui sont, deux à deux, égaux et de signes contraires; donc elle est identiquement nulle. La même chose a lieu pour les autres fonctions (5). Par suite, la formule (6) et les remarques du n° 5 ont lieu pour le cas de n équations. Donc, etc.

M. Cauchy a donné, de la règle qui sert à former le dénominateur

commun dans les équations du premier degré, une démonstration appuyée sur des considérations différentes de celles qui précèdent : je pense que la mienne a, au moins, l'avantage de démontrer les relations (5) et (6), lesquelles nous seront nécessaires dans la suite.

8. Je suppose actuellement que l'on reprenne les équations :

$$\left.\begin{aligned}
&a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + \ldots + k_1x_{n-1} + l_1x_n = \alpha_1,\\
&a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + \ldots + k_2x_{n-1} + l_2x_n = \alpha_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_nx_1 + b_nx_2 + c_nx_3 + \ldots + k_nx_{n-1} + l_nx_n = \alpha_n;
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

que l'on se donne, entre les n^2 coefficients de ces équations, les $\frac{n(n-1)}{2}$ relations suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
&a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots + a_nb_n = o,\\
&a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 + \ldots + a_nc_n = o,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_1l_1 + a_2l_2 + a_3l_3 + \ldots + a_nl_n = o,\\
&b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 + \ldots + b_nc_n = o,\\
&b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3 + \ldots + b_nd_n = o,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&b_1l_1 + b_2l_2 + b_3l_3 + \ldots + b_nl_n = o,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&k_1l_1 + k_2l_2 + k_3l_3 + \ldots + k_nl_n = o;
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

et que l'on propose de trouver d'autres relations entre ces coefficients.

9. Pour cela, conformément à ce qui a été fait par MM. Poisson et Lacroix, je forme en premier lieu, la somme des carrés des équations (1); et, en ayant égard aux conditions qui précèdent, j'obtiens

$$\Sigma_1^n \alpha_i^2 = Ax_1^2 + Bx_2^2 + \ldots + Lx_n^2;$$

en posant, pour abréger,

$$A = \Sigma_1^n a_i^2, \quad B = \Sigma_1^n b_i^2, \ldots . \; L = \Sigma_1^n l_i^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Secondement, si l'on multiplie les équations (1) successivement par $a_1, a_2, \ldots . a_n$, par $b_1, b_2, \ldots . b_n, \ldots .$, par $l_1, l_2, \ldots . l_n$; et si l'on fait les sommes des produits, on obtient les n équations

$$\left.\begin{array}{l} Ax_1 = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots . + a_n\alpha_n, \\ Bx_2 = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \ldots . + b_n\alpha_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Lx_n = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \ldots . + l_n\alpha_n. \end{array}\right\}$$

La somme des carrés de ces nouvelles équations peut se mettre sous la forme,

$$Ax_1^2 + Bx_2^2 + \ldots . + Lx_n^2 = \Sigma_1^n \left(\frac{a_i^2}{A} + \frac{b_i^2}{B} + \ldots . + \frac{l_i^2}{L}\right)\alpha_i^2$$
$$+ \Sigma_1^n \left(\frac{a_i a_i'}{A} + \frac{b_i b_i'}{B} + \ldots . + \frac{l_i l_i'}{L}\right)\alpha_i \alpha_i',$$

en observant que, dans le second membre, les indices i et i' doivent être inégaux.

D'après ce qu'on a trouvé plus haut, le second membre doit être identique avec $\Sigma_1^n \alpha_i^2$; donc

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a_1^2}{A} + \dfrac{b_1^2}{B} + \dfrac{c_1^2}{C} + \ldots . + \dfrac{l_1^2}{L} = 1, \\ \dfrac{a_2^2}{A} + \dfrac{b_2^2}{B} + \ldots\ldots + \dfrac{l_2^2}{L} = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{a_n^2}{A} + \dfrac{b_n^2}{B} + \ldots\ldots + \dfrac{l_n^2}{L} = 1; \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

et

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{a_1a_2}{A} + \dfrac{b_1b_2}{B} + \ldots\ldots + \dfrac{l_1l_2}{L} = o,\\
\dfrac{a_1a_3}{A} + \dfrac{b_1b_3}{B} + \ldots\ldots + \dfrac{l_1l_3}{L} = o,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dfrac{a_1a_n}{A} + \dfrac{b_1b_n}{B} + \ldots\ldots + \dfrac{l_1l_n}{L} = o,\\
\dfrac{a_2a_3}{A} + \dfrac{b_2b_3}{B} + \ldots\ldots + \dfrac{l_2l_3}{L} = o,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dfrac{a_2a_n}{A} + \dfrac{b_2b_n}{B} + \ldots\ldots + \dfrac{l_2l_n}{L} = o,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dfrac{a_{n-1}a_n}{A} + \dfrac{b_{n-1}b_n}{B} + \ldots\ldots + \dfrac{l_{n-1}l_n}{L} = o.
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Ainsi, les $\frac{n(n-1)}{2}$ relations (7) entraînent les n relations (9) et les $\frac{n(n-1)}{2}$ relations (10). Ordinairement, dans les problèmes de mécanique, on suppose les quantités A, B, ... L, égales à l'unité; et alors les formules ci-dessus se simplifient considérablement. Mais, eu égard au but que je me propose, je devais me donner seulement les relations (7).

10. En résolvant, par la méthode exposée ci-dessus, les équations (1), on obtient une valeur de x_1, de la forme

$$x_1 = \frac{D_1\alpha_1 + D_2\alpha_2 + \ldots + D_n\alpha_n}{\Delta};$$

$D_1, D_2, \ldots D_n$ étant de certaines fonctions des coefficients, indépendantes de la lettre a, et qui sont liées au dénominateur Δ par l'équation

$$\Delta = a_1D_1 + a_2D_2 + \ldots + a_nD_n.$$

En comparant cette valeur de x_1 à celle qui a été écrite plus haut,

on conclut

$$D_1 = \Delta \frac{a_1}{A}, \quad D_2 = \Delta \frac{a_2}{A}, \quad \ldots\ldots \quad D_n = \Delta \frac{a_n}{A} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Les valeurs de $x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ donneraient des relations du même genre.

11. Avant d'aller plus loin, il convient d'exposer une propriété des fonctions connues sous le nom de *déterminants*, fonctions qui ont été étudiées par MM. Cauchy, Binet, Sturm et Jacobi [1]. La propriété que je vais démontrer n'avait pas encore, je crois, été remarquée : elle servira à simplifier considérablement l'expression ordinaire du dénominateur Δ.

Considérons le système qui suit, composé de n lignes horizontales, et de p lignes verticales, p étant égal à n ou plus petit que n.

$$\left.\begin{array}{llllll} d_1, & e_1, & f_1, & \ldots\ldots & k_1, & l_1, \\ d_2, & e_2, & f_2, & \ldots\ldots & k_2, & l_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_n, & e_n, & f_n, & \ldots\ldots & k_n, & l_n. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Je choisis $p-1$ lignes horizontales : pour fixer les idées, ce seront les $p-1$ premières; puis, dans le système ainsi obtenu, je supprime successivement la première, la 2e, ... la p^e ligne verticale. J'obtiens de la sorte p systèmes, savoir :

$$\left.\begin{array}{llllll} e_1, & f_1, & \ldots\ldots & k_1, & l_1, \\ e_2, & f_2, & \ldots\ldots & k_2, & l_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e_{p-1}, & f_{p-1}, & \ldots\ldots & k_{p-1}, & l_{p-1} \end{array}\right\} \quad 1^{er} \text{ groupe.}$$

$$\left.\begin{array}{llllll} d_1, & f_1, & \ldots\ldots & k_1, & l_1, \\ d_2, & f_2, & \ldots\ldots & k_2, & l_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{p-1}, & f_{p-1}, & \ldots\ldots & k_{p-1}, & l_{p-1} \end{array}\right\} \quad 2^{me} \text{ groupe.}$$

[1] Cauchy, *Journal de l'École polyt.*, 17e cahier; Binet, *Journal de l'École polyt.*, 16e cahier, pag. 280; Sturm, *Bulletin de M. Férussac*, tom. XII, pag. 314; Jacobi, *Journal de Crelle*, tom. XII, pag. 1. *Voy.* aussi un mémoire de M. Lebesgue, *Journ. de Liouville*, tom. II, p. 337.

$$\left.\begin{array}{llll} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_1, & e_1, & \ldots\ldots & k_1, \\ d_2, & e_2, & \ldots\ldots & k_2, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{p-1}, & e_{p-1}, & \ldots\ldots & k_{p-1} \end{array}\right\} \quad p^e \text{ groupe.}$$

Chacun de ces groupes peut être considéré comme représentant $p-1$ équations entre $p-1$ inconnues : il en est de même pour tous ceux que l'on pourra former suivant la loi ci-dessus indiquée.

12. Je désigne actuellement par D_d, D , ... D_k, D_l les dénominateurs des valeurs des inconnues dans ces différents systèmes d'équations, ou les *déterminants* des 1er, 2e, ... p^e groupes : l'indice indique la lettre qui n'entre pas dans le système correspondant. De plus, comme chacun de ces dénominateurs peut avoir le signe $+$ ou le signe $-$, suivant l'ordre dans lequel il est formé, je supposerai que le premier terme de chacun d'eux soit respectivement :

$$\begin{array}{llll} \text{pour } D_d, & e_1 f_2 & \ldots\ldots & k_{p-2}\, l_{p-1}, \\ \text{pour } D_e, & f_1 & \ldots\ldots & l_{p-1}\, d_{p-1}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \text{pour } D_l, & d_1 e_2 & \ldots\ldots & k_{p-1}. \end{array}$$

Multiplions ces p fonctions, successivement par d_1, e_1, ... l_1, et ajoutons les produits; puis par d_2, e_2, ... l_2, et ajoutons les produits; .... enfin par d_n, e_n, ... l_n, et ajoutons les produits.

Si nous avons égard aux formules (5) et (6), nous verrons que les $p-1$ premières sommes seront nulles, et que les $n-p+1$ dernières seront les déterminants de $n-p+1$ systèmes, ou les dénominateurs communs pour $n-p+1$ systèmes de p équations, entre p inconnues.

Pour chaque ensemble de p groupes, formé au moyen de la suppression de $n-p+1$ lignes horizontales, dans le système (12), nous obtiendrons ainsi $n-p+1$ déterminants. En désignant par $C_{n,\,p-1}$ le nombre des combinaisons de n lettres, prises $p-1$ à $p-1$, nous

aurons, pour le nombre des déterminants de p lettres, fournis par le système (12), $(n-p+1)\,C_{n_1 p-1}$. D'un autre côté, le nombre des déterminants de p lettres, essentiellement différents, que l'on peut déduire de ce même système (12), doit être égal à $C_{n_1 p} = \frac{(n-p+1)}{p} C_{n_1 p-1}$.

Il résulte de là que, dans les sommes de produits dont il est question, chaque déterminant se trouvera ~~répété~~ p fois [1].

13. Je suppose maintenant qu'il existe, entre les quantités (12), des relations de même forme que celles qui sont exprimées par les équations (7); c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
&d_1 e_1 + d_2 e_2 + \ldots + d_n e_n = o,\\
&d_1 f_1 + d_2 f_2 + \ldots + d_n f_n = o,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&k_1 l_1 + k_2 l_2 + \ldots + k_n l_n = o;
\end{aligned}$$

et je fais la somme des carrés des fonctions telles que

$$d_1 D_d + e_1 D_e + \ldots + l_1 D_l,$$

dont il s'agit : ces fonctions sont en nombre $(n-p+1)\,C_{n_1 p-1}$.

En observant que les doubles produits seront nuls en vertu des relations qui précèdent, j'obtiens

$$p\,\Sigma(\Delta^2) = \Sigma_1^n d_i^2\,\Sigma(D_d)^2 + \Sigma_1^n e_i^2\,\Sigma(D_e)^2 + \ldots + \Sigma_1^n l_i^2\,\Sigma(D_l)^2 \quad \ldots \quad (13)$$

Dans cette formule, Δ représente un déterminant de p lettres, et D_h un déterminant de $p-1$ lettres, dans lequel n'entre pas la lettre h.

14. La formule (13) peut se mettre sous une autre forme plus simple.

[1] L'idée de cette démonstration est due à M. Binet; mais, avant d'avoir eu connaissance de son mémoire, j'avais déjà trouvé, par une autre méthode, la formule (13). *Voy.* le *Journal de l'École polytechnique*, 16e cahier.

Prenons $p=2$; nous aurons

$$2\,\Sigma(\Delta^2)=\Sigma_1^n d_i^2\,\Sigma_1^n e_i^2+\Sigma_1^n e_i^2\,\Sigma_1^n d_i^2=2\,\Sigma_1^n d_i^2\,\Sigma_1^n e_i^2\;;$$

ou

$$\Sigma(\Delta^2)=\Sigma_1^n d_i^2\,\Sigma_1^n e_i^2\;;$$

ou encore

$$(d_1e_2-e_1d_2)^2+(d_1e_3-e_1d_3)^2+\ldots.+(d_{n-1}e_n-e_{n-1}d_n)^2=(d_1^2+d_2^2+\ldots.+d_n^2)(e_1^2+e_2^2+\ldots.+e_n^2)\;;$$

ce qui coïncide avec une formule connue.

Prenons $p=3$; nous obtiendrons également

$$3\,\Sigma(\Delta^2)=\Sigma_1^n d_i^2\,\Sigma_1^n e_i^2\,\Sigma_1^n f_i^2+\Sigma_1^n e_i^2\,\Sigma_1^n d_i^2\,\Sigma_1^n f_i^2+\Sigma_1^n f_i^2\,\Sigma_1^n e_i^2\,\Sigma_1^n d_i^2\;;$$

ou

$$\Sigma(\Delta^2)=\Sigma_1^n d_i^2\,\Sigma_1^n e_i^2\,\Sigma_1^n f_i^2.$$

En continuant de la même manière, il est clair que la formule (13) deviendra,

$$\Sigma(\Delta^2)=\Sigma_1^n d_i^2\,\Sigma_1^n e_i^2\;\ldots.\;\Sigma_1^n k_i^2\,\Sigma_1^n l_i^2\;\ldots\ldots\ldots\quad(14)$$

15. Nous pouvons actuellement appliquer cette formule générale au cas des équations (1) et (7), dans lesquelles $p=n$; et nous obtiendrons, pour le carré du dénominateur des valeurs des inconnues, cette expression très-simple :

$$\Delta^2=\text{A. B. C.}\ldots\ldots\text{L}\ldots\ldots\ldots\quad(15)$$

En même temps, les équations (11) donneront

$$\text{D}_1^2+\text{D}_2^2+\ldots\ldots\text{D}_n^2=\text{B. C.}\ldots\ldots\text{L}\ldots\ldots\quad(16)$$

Dans l'expression de Δ, déduite de la formule (15), on peut convenir de prendre le radical positivement; alors les équations (11) donneront, avec les signes convenables, les valeurs de D_1, D_2, ... D_n:

on aura donc tout ce qui est nécessaire pour calculer facilement et sans ambiguité de signe, la valeur de x_1. Il en serait de même pour les valeurs des autres inconnues.

On pourrait facilement découvrir encore d'autres relations entre les coefficients des équations (1) : j'abandonne cette recherche, attendu qu'elle est inutile à l'objet de ce mémoire.

DEUXIÈME PARTIE.

TRANSFORMATION DES VARIABLES DANS LES INTÉGRALES MULTIPLES.

16. Considérons l'intégrale d'ordre n :

$$V = \int F(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)\, dx_1 . dx_2 \ldots\ldots dx_n :$$

et supposons que l'on veuille prendre pour variables, au lieu de x_1, x_2, ... x_n, d'autres quantités u_1, u_2, ... u_n, déterminées, en fonction des premières, par le moyen de n équations.

Après avoir remplacé, dans la fonction F, les anciennes variables par leurs valeurs, on devra substituer au produit $dx_1 . dx_2 . \ldots . dx_n$, une expression de la forme

$$\Psi(u_1, u_2, \ldots\ldots u_n)\, du_1 . du_2 \ldots\ldots du_n :$$

il s'agit de trouver la fonction Ψ.

Lagrange et d'autres géomètres ont résolu la question pour les cas de $n = 2$ ou $n = 3$; mais je ne pense pas que la formule de transformation ait été démontrée généralement.

17. Soient

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \ldots\ldots \varphi_n = 0, \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

les n équations données, qui lient les anciennes variables aux nouvel-

les. Admettons que dans V, on intègre en premier lieu, par rapport à x_1. On devra alors regarder x_2, x_3, ... x_n, comme des quantités constantes dans les équations (17), lesquelles renfermeront ainsi $n+1$ variables; savoir, u_1, u_2, ... u_n et x_1. Si l'on exprime ensuite x_1 en fonction des nouvelles variables, et si l'on prend u_1 pour variable indépendante, on aura, pour déterminer dx_1 au moyen de du_1, les n équations

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\varphi_1}{dx_1}dx_1+\frac{d\varphi_1}{du_1}du_1+\frac{d\varphi_1}{du_2}du_2+\ldots.+\frac{d\varphi_1}{du_n}du_n=0,\\
&\frac{d\varphi_2}{dx_1}dx_1+\frac{d\varphi_2}{du_1}du_1+\frac{d\varphi_2}{du_2}du_2+\ldots.+\frac{d\varphi_2}{du_n}du_n=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{d\varphi_n}{dx_1}dx_1+\frac{d\varphi_n}{du_1}du_1+\frac{d\varphi_n}{du_2}du_2+\ldots.+\frac{d\varphi_n}{du_n}du_n=0.
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ (1^o)$$

Ces équations donneront une valeur de dx_1, de la forme

$$dx_1=-\frac{N_1}{D_1}du_1.$$

En substituant cette valeur dans dV, et employant les équations (17) pour éliminer x_1, u_2, u_3, ... u_n, on aura la différentielle de V exprimée au moyen des n variables x_2, x_3, ... x_n et u_1.

Si l'on veut intégrer cette fonction par rapport à x_2, on devra considérer comme constantes toutes les autres quantités qui y entrent, c'est-à-dire, en répétant le raisonnement ci-dessus, que dx_2 sera donnée en fonction des nouvelles variables, et de du_2, au moyen des n équations

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\varphi_1}{dx_1}dx_1+\frac{d\varphi_1}{dx_2}dx_2+\frac{d\varphi_1}{du_2}du_2+\frac{d\varphi_1}{du_3}du_3+\ldots.+\frac{d\varphi_1}{du_n}du_n=0,\\
&\frac{d\varphi_2}{dx_1}dx_1+\frac{d\varphi_2}{dx_2}dx_2+\frac{d\varphi_2}{du_2}du_2+\frac{d\varphi_2}{du_3}du_3+\ldots.+\frac{d\varphi_2}{du_n}du_n=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{d\varphi_n}{dx_1}dx_1+\frac{d\varphi_n}{dx_2}dx_2+\frac{d\varphi_n}{du_2}du_2+\frac{d\varphi_n}{du_3}du_3+\ldots.+\frac{d\varphi_n}{du_n}du_n=0.
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ (2^o)$$

On déduira de ces équations,

$$dx_2 = -\frac{N_2}{D_2}\,du_2.$$

Continuant de la même manière, on verra que l'on sera enfin conduit à résoudre le système suivant :

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\varphi_1}{dx_1}\,dx_1 + \frac{d\varphi_1}{dx_2}\,dx_2 + \ldots + \frac{d\varphi_1}{dx_n}\,dx_n + \frac{d\varphi_1}{du_n}\,du_n = 0,\\
&\frac{d\varphi_2}{dx_1}\,dx_1 + \frac{d\varphi_2}{dx_2}\,dx_2 + \ldots + \frac{d\varphi_2}{dx_n}\,dx_n + \frac{d\varphi_2}{du_n}\,du_n = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{d\varphi_n}{dx_1}\,dx_1 + \frac{dx_n}{dx_2}\,dx_2 + \ldots + \frac{d\varphi_n}{dx_n}\,dx_n + \frac{d\varphi_n}{du_n}\,du_n = 0;
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{(n°)}$$

lequel donnera

$$dx_n = -\frac{N_n}{D_n}\,du_n.$$

18. Il résulte de cette démonstration, que la fonction Ψ a pour valeur,

$$(-1)^n\,\frac{N_1}{D_1}\cdot\frac{N_2}{D_2}\ldots\frac{N_n}{D_n};$$

mais cette expression peut être considérablement simplifiée.

En effet, pour obtenir le numérateur N_2, il suffit de remplacer, dans la valeur de D_2, le coefficient de x_2 par le coefficient de du_2 entrant dans la même équation. Il résulte de cette observation, que le numérateur N_2 est égal au dénominateur commun relatif aux équations

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\varphi_1}{dx_1}\,y_1 + \frac{d\varphi_1}{du_2}\,y_2 + \frac{d\varphi_1}{du_3}\,y_3 + \ldots + \frac{d\varphi_1}{du_n}\,y_n = 1,\\
&\frac{d\varphi_2}{dx_1}\,y_1 + \frac{d\varphi_2}{du_2}\,y_2 + \frac{d\varphi_2}{du_3}\,y_3 + \ldots + \frac{d\varphi_2}{du_n}\,y_n = 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{d\varphi_n}{dx_1}\,y_1 + \frac{d\varphi_n}{du_2}\,y_2 + \frac{d\varphi_n}{du_3}\,y_3 + \ldots + \frac{d\varphi_n}{du_n}\,y_n = 1.
\end{aligned}\right\}$$

Or, à l'exception de la notation et de la quantité indépendante des inconnues, ces équations sont précisément celles qui composent le système 1°; et de plus, elles sont disposées dans le même ordre. Il suit de là que $N_2 = D_1$. On trouverait de même que $N_3 = D_2, \ldots N_n = D_{n-1}$. Donc

$$dx_1 = -\frac{N_1}{D_1}\,du_1, \quad dx_2 = -\frac{D_1}{D_2}\,du_2, \quad \ldots\ldots \quad dx_n = -\frac{D_{n-1}}{D_n};$$

et par suite,

$$dx_1.\,dx_2 \ldots\ldots dx_n = (-1)^n \frac{N_1}{D_n}\,du_1.\,du_2 \ldots\ldots du_n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

19. On peut établir une règle empirique très-simple pour retrouver cette formule de transformation. Observons pour cela que N_1 est le dénominateur de la valeur des inconnues dans les équations

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\varphi_1}{du_1}z_1 + \frac{d\varphi_1}{du_2}z_2 + \ldots\ldots + \frac{d\varphi_1}{du_n}z_n = 1,\\
&\frac{d\varphi_2}{du_1}z_1 + \frac{d\varphi_2}{du_2}z_2 + \ldots\ldots + \frac{d\varphi_2}{du_n}z_n = 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{d\varphi_n}{du_1}z_1 + \frac{d\varphi_n}{du_2}z_2 + \ldots\ldots + \frac{d\varphi_n}{du_n}z_n = 1;
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

tandis que D_n est celui qui correspond aux équations

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\varphi_1}{dx_1}y_1 + \frac{d\varphi_1}{dx_2}y_2 + \ldots\ldots + \frac{d\varphi_1}{dx_n}y_n = 1,\\
&\frac{d\varphi_2}{dx_1}y_1 + \frac{d\varphi_2}{dx_2}y_2 + \ldots\ldots + \frac{d\varphi_2}{dx_n}y_n = 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{d\varphi_n}{dx_1}y_1 + \frac{d\varphi_n}{dx_2}y_2 + \ldots\ldots + \frac{d\varphi_n}{dx_n}y_n = 1.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

Or, pourvu que l'on remplace z_i par du_i, et $y_{i'}$ par $dx_{i'}$, les premiers membres des équations (19) représentent les différentielles complètes, par rapport aux anciennes variables, des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$; tandis que les premiers membres des équations (20) sont les différentielles complètes de ces mêmes fonctions, par rapport aux nouvelles variables Donc :

« Différenciez chacune des équations $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, ... $\varphi_n = 0$, » en regardant comme indépendantes toutes les variables. Égalez à » zéro, ou à une constante, la partie qui dépend des anciennes différentielles, et à zéro ou à une constante, la partie relative aux » nouvelles différentielles. Vous aurez de la sorte deux groupes de n » équations chacun : dans le premier groupe entreront comme inconnues les différentielles des variables primitives, et dans le second » les différentielles des nouvelles variables. Si vous désignez par X » le dénominateur pour le premier groupe, et par U le dénominateur pour le second, vous aurez, pour la formule de transformation » cherchée :

$$X\, dx_1.dx_2 \ldots dx_n = \pm U du_1.du_2 \ldots du_n \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

Nous employons le double signe, au lieu de $(-1)^n$: cela tient à cette circonstance, que les dénominateurs X et U pouvant changer de signe, suivant l'ordre dans lequel les équations qui servent à les former auront été écrites, il est impossible de décider quel signe on doit employer dans l'équation (21). Mais, dans chaque cas particulier, l'indétermination cessera.

20. Si les anciennes variables sont données en fonction des nouvelles, *explicitement*, les équations (17) deviennent

$$\pi_1 - x_1 = 0, \quad \pi_2 - x_2 = 0, \ldots \pi_n - x_n = 0; \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

$\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_n$ désignant des fonctions des nouvelles variables seulement. En appliquant la règle précédente à ce cas plus simple, on

trouvera

$$dx_1.dx_2 \ldots. dx_n = \pm U du_1.du_2 \ldots. du_n; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

U étant le dénominateur commun relatif aux équations (19), dans lesquelles on remplacerait φ par π.

Cette formule (23) coïncide ainsi avec celle qui était connue pour le cas de trois variables.

TROISIÈME PARTIE.

APPPLICATION DES FORMULES CONTENUES DANS LES DEUX PREMIERS PARAGRAPHES.

21. Je choisirai, comme exemple des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$, les formules de transformation suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{x_1^2}{u_1^2-a_1^2}+\frac{x_2^2}{u_1^2-a_2^2}+\ldots+\frac{x_n^2}{u_1^2-a_n^2}=1,\\
&\frac{x_1^2}{u_2^2-a_1^2}+\frac{x_2^2}{u_2^2-a_2^2}+\ldots+\frac{x_n^2}{u_2^2-a_n^2}=1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{x_1^2}{u_n^2-a_1^2}+\frac{x_2^2}{u_n^2-a_2^2}+\ldots+\frac{x_n^2}{u_n^2-a_n^2}=1.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

Lorsque $n=3$, ces équations sont celles qui servent à passer d'un système d'axes rectangulaires à un système de *coordonnées elliptiques*, coordonnées dont M. Lamé a fait des applications si remarquables, dans ses beaux mémoires sur la *Théorie de la chaleur*.

22. M. Binet a donné [1] un moyen très-simple pour résoudre des équations de même forme que celles qui précèdent; on trouve, en ap-

[1] *Journal de Liouville*, tom. II, pag. 231.

pliquant la méthode employée par ce géomètre,

$$\left.\begin{aligned}
&x_1^2 + \frac{(a_1^2 - u_1^2)(a_1^2 - u_2^2) \;\ldots\; (a_1^2 - u_n^2)}{(a_1^2 - a_2^2)(a_1^2 - a_3^2) \;\ldots\; (a_1^2 - a_n^2)} = 0,\\
&x_2^2 + \frac{(a_2^2 - u_1^2)(a_2^2 - u_2^2) \;\ldots\; (a_2^2 - u_n^2)}{(a_2^2 - a_1^2)(a_2^2 - a_3^2) \;\ldots\; (a_2^2 - a_n^2)} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x_n^2 + \frac{(a_n^2 - u_1^2)(a_n^2 - u_2^2) \;\ldots\; (a_n^2 - u_n^2)}{(a_n^2 - a_1^2)(a_n^2 - a_2^2) \;\ldots\; (a_n^2 - a_{n-1}^2)} = 0.
\end{aligned}\right\} \;\ldots\; (25)$$

23. Soit actuellement, comme plus haut, une intégrale d'ordre n :

$$V = \int F(x_1, x_2, \ldots x_n)\, dx_1.dx_2 \ldots dx_n.$$

Si nous voulons faire le changement de variables, nous devrons remplacer le produit .... dx_1, dx_2 .... dx_n par une certaine fonction différentielle que nous obtiendrons en appliquant la règle donnée dans le nº 19.

Or, en différentiant complétement chacune des équations (25), on obtient n équations de cette forme :

$$x_i dx_i - \frac{N_i}{D_i}\left(\frac{u_1}{a_i^2 - u_1^2}\, du_1 + \frac{u_2}{a_i^2 - u_2^2}\, du_2 + \ldots + \frac{u_n}{a_i^2 - u_n^2}\, du_n\right) = 0\,; \;\ldots\; (26)$$

en posant, pour abréger,

$$\frac{N_i}{D_i} = \frac{(a_i^2 - u_1^2)(a_i^2 - u_2^2) \;\ldots\; (a_i^2 - u_n^2)}{(a_i^2 - a_1^2)(a_i^2 - a_2^2) \;\ldots\; (a_i^2 - a_n^2)} \;\ldots\; (27)$$

Au moyen de la valeur de x_i^2, qui est

$$x_i^2 = -\frac{N_i}{D_i},$$

l'équation (26) devient

$$x_i dx_i + x_i^2\left(\frac{u_1}{a_i^2 - u_1^2}\, du_1 + \frac{u_2}{a_i^2 - u_2^2}\, du_2 + \ldots + \frac{u_n}{a_i^2 - u_n^2}\, du_n\right) = 0 \;\ldots\; (28)$$

Cela étant, je pose, conformément à la règle ci-dessus énoncée, les n équations

$$x_1 dx_1 = 1, \quad x_2 dx_2 = 1, \quad \ldots\ldots \quad x_n dx_n = 1; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

et les n équations

$$\left.\begin{aligned}
x_1^2\left(\frac{u_1}{a_1^2-u_1^2}du_1+\frac{u_2}{a_1^2-u_2^2}du_2+\ldots+\frac{u_n}{a_1^2-u_n^2}du_n\right)&=1,\\
x_2^2\left(\frac{u_1}{a_2^2-u_1^2}du_1+\frac{u_2}{a_2^2-u_2^2}du_2+\ldots+\frac{u_n}{a_2^2-u_n^2}du_n\right)&=1,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
x_n^2\left(\frac{u_1}{a_n^2-u_1^2}du_1+\frac{u_2}{a_n^2-u_2^2}du_2+\ldots+\frac{u_n}{a_n^2-u_n^2}du_n\right)&=1.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (30)$$

Il est visible que si l'on forme le dénominateur commun correspondant à ces dernières équations, dans lesquelles $du_1, du_2, \ldots. du_n$ sont prises pour inconnues, ce dénominateur contiendra, comme facteur commun, $x_1.x_2 \ldots. x_n$, $u_1.u_2 \ldots. u_n$; d'un autre côté, le dénominateur commun relatif aux équations (29) est $x_1.x_2 \ldots. x_n$: donc, si l'on désigne par Δ le dénominateur de la valeur des inconnues dans les équations

$$\left.\begin{aligned}
\frac{x_1}{a_1^2-u_1^2}y_1+\frac{x_1}{a_1^2-u_2^2}y_2+\ldots+\frac{x_1}{a_1^2-u_n^2}y_n&=1,\\
\frac{x_2}{a_2^2-u_1^2}y_1+\frac{x_2}{a_2^2-u_2^2}y_2+\ldots+\frac{x_2}{a_2^2-u_n^2}y_n&=1,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
\frac{x_n}{a_n^2-u_1^2}y_1+\frac{x_n}{a_n^2-u_2^2}y_2+\ldots+\frac{x_n}{a_n^2-u_n^2}y_n&=1;
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (31)$$

on aura, dans l'intégrale V,

$$dx_1.dx_2 \ldots. dx_n = \pm \Delta.\, u_1.u_2 \ldots. u_n.du_1 du_2 \ldots. du_n \quad \ldots\ldots \quad (32)$$

24. Je vais maintenant démontrer que les équations (31) sont du même genre que les équations (1), traitées dans le numéro (8); c'est-

à-dire que, eu égard aux formules (25), on a, par exemple :

$$\frac{x_1}{a_1^2-u_1^2}\cdot\frac{x_1}{a_1^2-u_2^2}+\frac{x_2}{a_2^2-u_1^2}\cdot\frac{x_2}{a_2^2-u_2^2}+\ldots\ldots+\frac{x_n}{a_n^2-u_1^2}\cdot\frac{x_n}{a_n^2-u_2^2}=0 \quad . \quad . \quad (33)$$

En mettant pour x_1^2, x_2^2, ... x_n^2 leurs valeurs (25), ceci revient à faire voir que l'on a, *identiquement :*

$$\frac{(a_1^2-u_3^2)(a_1^2-u_4^2)\ldots.(a_1^2-u_n^2)}{(a_1^2-a_2^2)(a_1^2-a_3^2)\ldots.(a_1^2-a_n^2)}+\frac{(a_2^2-u_3^2)(a_2^2-u_4^2)\ldots.(a_2^2-u_n^2)}{(a_2^2-a_1^2)(a_2^2-a_3^2)\ldots.(a_2^2-a_n^2)}+\ldots.$$
$$+\frac{(a_n^2-u_3^2)(a_n^2-u_4^2)\ldots.(a_n^2-u_n^2)}{(a_n^2-a_1^2)(a_n^2-a_2^2)\ldots.(a_n^2-a_{n-1}^2)}=0;$$

ou, pour plus de simplicité,

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(a_1-u_3)(a_1-u_4)\ldots.(a_1-u_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots.(a_1-a_n)}+\frac{(a_2-u_3)(a_2-u_4)\ldots.(a_2-u_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots.(a_2-a_n)}+\ldots.\\&+\frac{(a_n-u_3)(a_n-u_4)\ldots.(a_n-u_n)}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots.(a_n-a_{n-1})}=0.\end{aligned}\right\}. \quad (34)$$

Pour démontrer que la fonction contenue dans le premier membre est nulle d'elle-même, je prends la fraction rationnelle

$$\frac{(x-u_3)(x-u_4)\ldots.(x-u_n)}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots.(x-a_n)}=\varphi(x), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

dans laquelle le numérateur est du degré $n-2$, et le dénominateur du degré n. Cette quantité peut se décomposer en n fractions simples, de la forme $\frac{A_i}{x-a_i}$. Or, par les règles ordinaires,

$$A_i=\frac{(a_i-u_3)(a_i-u_4)\ldots.(a_i-u_n)}{(a_i-a_1)(a_i-a_2)\ldots.(a_i-a_n)}:$$

ce qui fait voir que la fonction $(34)=\Sigma_1^n A_i$. En même temps, si l'on remplace $\varphi(x)$ par $\Sigma_1^n\frac{A_i}{x-a_i}$, et si l'on chasse les dénominateurs, l'équation (35) devient

$$(x-u_3)(x-u_4)\ldots.(x-u_n)=\Sigma_1^n A_i(x-a_1)(x-a_2)\ldots.(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\ldots.(x-a_n). \quad (36)$$

Si l'on développe actuellement les deux membres de cette équation suivant les puissances descendantes de x, le premier terme du second membre sera $x^{n-1}\Sigma_1^n A_i$, tandis que le premier membre est seulement du degré $n-2$. Donc, etc.

Il est clair que, par la comparaison des deux développements, la formule (36) fournirait encore $n-1$ relations, plus ou moins importantes; je ferai seulement remarquer celle-ci :

$$\Sigma_1^n \frac{A_i}{a_i} = -\frac{u_3 . u_4 \ . \ . \ . \ . \ u_n}{a_1 . a_2 \ . \ . \ . \ . \ a_n} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (37)$$

Elle se déduit aussi de la formule (35), en y faisant $x = 0$.

25. Revenant aux équations (31), je leur applique la formule (15); et j'obtiens, pour le carré du dénominateur commun Δ :

$$\Delta^2 = \left(\Sigma_1^n \frac{x_i^2}{(a_i - u_1^2)^2}\right)\left(\Sigma_1^n \frac{x_i^2}{(a_i^2 - u_1^2)^2}\right) \ . \ . \ . \ . \ \left(\Sigma_n^1 \frac{x_i^2}{(a_i^2 - u_n)^2}\right) . \ . \ . \ . \ (38)$$

Cette formule est beaucoup plus simple que celle qu'on aurait obtenue en résolvant, par la méthode ordinaire, les équations (31) : cependant elle est susceptible d'une réduction très-remarquable.

Pour opérer cette réduction, je prends l'un quelconque des n facteurs qui composent le second membre; le premier, par exemple. En y mettant pour x_i^2 sa valeur donnée plus haut, ce facteur se transforme en

$$-\Sigma_1^n \frac{(a_i^2 - u_2^2)(a_i^2 - u_3^2) \ . \ . \ . \ . \ (a_i^2 - u_n^2)}{(a_i^2 - u_1^2)(a_i^2 - a_1^2) \ . \ . \ . \ . \ (a_i^2 - a_n^2)} :$$

il est bien entendu que le dénominateur ne contient pas $a_i^2 - a_i^2$.

Afin d'exprimer cette fonction d'une manière plus simple, je considère la fraction rationnelle

$$\frac{(u_1^2 - u_2^2)(u_1^2 - u_3^2) \ . \ . \ . \ . \ (u_1^2 - u_n^2)}{(u_1^2 - a_1^2)(u_1^2 - a_2^2) \ . \ . \ . \ . \ (u_1^2 - a_n^2)} = \Sigma_1^n \frac{A_i}{u_1^2 - a_i^2} .$$

On a pour le numérateur de l'une des fractions simples,

$$A_i = \frac{(a_i^2 - u_2^2)\,(a_i^2 - u_3^2) \;\ldots\ldots\; (a_i^2 - u_n^2)}{(a_i^2 - a_1^2)\,(a_i^2 - a_2^2) \;\ldots\ldots\; (a_i^2 - a_n^2)};$$

d'où, en comparant cette fonction à ce qui est écrit ci-dessus, on conclut

$$\Sigma_1^n \frac{x_i^2}{(a_i^2 - u_1^2)^2} = \frac{(u_1^2 - u_2^2)\,(u_1^2 - u_3^2) \;\ldots\ldots\; (u_1^2 - u_n^2)}{(u_1^2 - a_1^2)\,(u_1^2 - a_2^2) \;\ldots\ldots\; (u_1^2 - a_n^2)} \;\ldots\ldots\; (39)$$

Ainsi, la transformation que nous avons choisie jouit de cette propriété, qu'une certaine somme de carrés peut s'exprimer par un produit. Il résulte aussi de cette transformation que la formule (38) se réduit à

$$\Delta^2 = U_1 . U_2 \;\ldots\ldots\; U_i \;\ldots\ldots\; U_n ; \;\ldots\ldots\; (40)$$

en posant

$$U_i = \frac{(u_i^2 - u_1^2)\,(u_i^2 - u_2^2) \;\ldots\ldots\; (u_i^2 - u_{i-1}^2)\,(u_i^2 - u_{i+1}^2) \;\ldots\ldots\; (u_i^2 - u_n^2)}{(u_i^2 - a_1^2)\,(u_1^2 - a_2^2) \;\ldots\ldots\;\ldots\ldots\; (u_i^2 - a_n^2)} \;\ldots\ldots\; (41)$$

Par suite, dans la différentielle de V, l'on doit prendre,

$$dx_1 . dx_2 \;\ldots\ldots\; dx_n = u_1 . u_2 \;\ldots\ldots\; u_n . du_1 . du_2 \;\ldots\ldots\; du_n . \sqrt{U_1 . U_2 \;\ldots\ldots\; U_n} \;\ldots\ldots\; (42)$$

26. Cette dernière formule peut s'écrire autrement : remarquons en effet que U_1 renferme comme facteur la différence $u_1^2 - u_2^2$; tandis que U_2 contient $u_2^2 - u_1^2$; d'où il résulte qu'en omettant $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$, le produit des numérateurs des fonctions U est un carré. Par suite, si l'on désigne par D_i le dénominateur de U_i, on aura

$$dx_1 . dx_2 \;\ldots\ldots\; dx_n = u_1 . u_2 \;\ldots\ldots\; u_n . du_1 . du_2 \;\ldots\ldots\; du_n . \frac{\Pi . (u_i^2 - u_l^2)}{\sqrt{D_1 . D_2 \;\ldots\ldots\; D_i \;\ldots\ldots\; D_n}} \;\ldots\ldots\; (43)$$

Dans cette formule, la lettre Π indique un produit de facteurs de même forme que celui qui suit cette caractéristique, l'indice i pouvant croître de 1 à $n-1$ inclusivement, et l'indice l étant plus grand que i.

Il est nécessaire d'observer qu'à raison du radical placé en déno-

minateur, la fonction du second membre pourrait devenir imaginaire, tandis que jusqu'ici, nous avons toujours supposé, tacitement il est vrai, que toutes les fonctions considérées étaient réelles. Cette discordance provient évidemment de la suppression du facteur $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$, qui a été faite pour simplifier la formule. Mais si l'on rétablit ce facteur, et si d'ailleurs la transformation exprimée par les équations (21), est possible, la formule (43) ne pourra pas devenir imaginaire. Nous éclaircirons tout cela dans le paragraphe suivant.

27. Si l'on suppose $n = 3$ et $a_3 = 0$, on trouve

$$dx_1.dx_2.dx_3 = du_1.du_2.du_3.\frac{(u_1^2-u_3^2)(u_1^2-u_2^2)(u_2^2-u_3^2)}{\sqrt{(u_1^2-a_1^2)(u_1^2-a_2^2)(a_1^2-u_2^2)(u_2^2-a_2^2)(a_1^2-u_3^2)(a_2^2-u_3^2)}}.$$

Cette valeur est semblable, sauf la notation, à celle qui a été employée par M. Lamé [1]. Seulement, ce savant géomètre est arrivé à sa formule par un calcul direct, et en faisant attention aux réductions entre les termes : or, cette méthode, bonne pour le but qu'il se proposait d'atteindre, ne pouvait nullement faire prévoir ce qui arriverait pour le cas de n variables; elle était même tout à fait impraticable pour un nombre de variables supérieur à trois.

[1] *Journal de Liouville*, tom. II, pag. 158.

QUATRIÈME PARTIE.

THÉORÈME SUR LES INTÉGRALES DÉFINIES ABÉLIENNES.

28. J'appliquerai les formules du paragraphe 3 à l'intégrale d'ordre n :

$$V = \int dx_1 dx_2 \ldots dx_n ; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

les limites étant déterminées par

$$\frac{x_1^2}{a^2 - a_1^2} + \frac{x_2^2}{a^2 - a_2^2} + \ldots + \frac{x_n^2}{a^2 - a_n^2} \leqq 1. \quad \ldots\ldots \quad (45)$$

Les constantes positives $a_1^2, a_2^2, \ldots a_n^2$ sont supposées inégales, et telles que l'on ait

$$a^2 > a_1^2 > a_2^2 > \ldots > a_n^2.$$

Je supposerai, en outre, que les n variables ne reçoivent que des valeurs positives.

29. Si nous voulons remplacer les variables $x_1, x_2, \ldots x_n$ par d'autres $u_1, u_2, \ldots u_n$, de même nature que celles qui ont été considérées plus haut, il faudra, pour déterminer les limites de ces nouvelles variables, assigner aux anciennes des valeurs arbitraires, satisfaisant à la condition (45) ; puis, en désignant par h^2 la valeur positive et plus

petite que l'unité que prend alors le second membre, résoudre l'équation

$$\frac{x_1^2}{y-a_1^2}+\frac{x_2^2}{y-a_2^2}+\ldots\ldots+\frac{x_n^2}{y-a_n^2}=h^2 : \quad \ldots\ldots \quad (46)$$

les n racines de cette équation seront les valeurs de $u_1^2, u_2^2, \ldots. u_n^2$, correspondant aux valeurs choisies pour $x_1^2, x_2^2, \ldots. x_n^2$.

Si par exemple $n=3$, et si x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées rectangulaires d'un point compris dans l'ellipsoïde représenté par l'équation (45), les trois racines de l'équation (46) seront les carrés des coordonnées elliptiques de ce point, ou les carrés des paramètres des trois surfaces orthogonales qui s'y croisent.

On prouve très-facilement que l'équation en y a ses racines réelles et inégales [1] : cela démontre la possibilité du système de transformations représenté par les formules (24); système que nous avions admis jusqu'ici, mais sans justifier son emploi. On sait, en outre, qu'en désignant par $u_1^2, u_2^2, \ldots. u_n^2$, les racines de cette même équation, l'on a

$$u_1^2 > a_1^2 > u_2^2 > a_2^2 > \ldots\ldots > u_n^2 > a_n^2 ; \quad \ldots\ldots \quad (47)$$

ce qui apprend que chacune des nouvelles variables, à l'exception de u_1, sera comprise entre deux termes de la suite $a_1, a_2, \ldots. a_n$.

Afin de savoir si ces deux termes sont les limites de l'intégrale par rapport à cette nouvelle variable, je reprends les équations (25) :

1° En y supposant $x_1=x_2=\ldots.=x_n=0$, auquel cas $h=0$, elles donnent

$$u_1=a_1, \quad u_2=a_2, \quad \ldots\ldots \quad u_n=a_n ;$$

2° En posant, dans ces mêmes équations, $x_1^2=a^2-a_1^2$, et $x_2=x_3=\ldots.=x_n=0$, ce qui donne $h=1$, il vient $u_1=a$, $u_2=a_2$, $\ldots\ldots\ldots$, $u_n=a_n$.

[1] Voyez, sur ce point, le *Journal de M. Liouville*, tom. III, p. 338.

Les valeurs limites de u_1 sont donc a_1 et a. On prouverait de la même manière que les limites de l'intégrale relative à u_2 seront a_2 et a_1; etc.

Ainsi, pour embrasser tous les éléments de l'intégrale V, on doit attribuer à chacune des variables $u_1, u_2, \ldots u_n$, toutes les valeurs comprises entre les deux constantes qui, dans les inégalités (47), comprennent entre elles cette même variable.

30. Il résulte de là, et de la formule (42), que l'intégrale (44) se transforme en

$$V = \int_{a_n}^{a_{n-1}} \int_{a_{n-1}}^{a_{n-2}} \cdots \int_{a_1}^{a} u_n du_n . u_{n-1} du_{n-1} \ldots . u_1 du_1 . \sqrt{U_n . U_{n-1} \ldots . U_i \ldots . U_1} ; \quad . . (48)$$

en représentant par U_i la même fonction que précédemment; ou plutôt, en posant

$$U_i = \frac{(u_1^2 - u_i^2)(u_2^2 - u_i^2) \ldots . (u_{i-1}^2 - u_i^2)(u_i^2 - u_{i+1}^2) \ldots . (u_i^2 - u_n^2)}{(a_1^2 - u_i^2)(a_2^2 - u_i^2) \ldots . (a_{i-1}^2 - u_i^2)(u_i^2 - a_i^2) \ldots . (u_i^2 - a_n^2)} , \quad . . (49)$$

afin de n'avoir à considérer que des facteurs positifs.

D'un autre côté, si l'on applique à l'intégrale V la formule de M. Dirichlet [1], on trouve

$$V = \frac{(\frac{1}{2}\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(1+\frac{n}{2})} \sqrt{(a^2 - a_1^2)(a^2 - a_2^2) \ldots . (a^2 - a_n^2)} ;$$

et en comparant cette valeur à la précédente, on arrive à ce résultat remarquable :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{(\frac{1}{2}\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(1+\frac{n}{2})} \sqrt{(a^2 - a_1^2)(a^2 - a_2^2) \ldots . (a^2 - a_n^2)} \\ &= \int_{a_n}^{a_{n-1}} \int_{a_{n-1}}^{a_{n-2}} \cdots \int_{a_1}^{a} u_n du_n . u_{n-1} du_{n-1} \ldots . u_1 du_1 . \sqrt{U_n . U_{n-1} \ldots . U_1} \end{aligned}\right\} \quad . . . (50)$$

31. Cette formule intégrale est susceptible de la même simplifica-

[1] *Journal de Liouville*, tom. IV, pages 168 et 225.

tion que la formule différentielle (42). Il est clair, en effet, que toutes les différences telles que $(u_i^2 - u_l^2)$ se trouvent élevées au carré, sous le radical du second nombre; et que l'on a alors, sans ambiguité de signes et sans imaginaires :

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^n}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}\sqrt{(a^2-a_1^2)(a^2-a_2^2)\ldots(a^2-a_n^2)}\\ &=\int_{a_n}^{a_{n-1}}\int_{a_{n-1}}^{a_{n-2}}\ldots\int_{a_1}^{a} u_n du_n . u_{n-1} du_{n-1} \ldots u_1 du_1 . \frac{\Pi(u_k^2-u_l^2)}{\sqrt{D_1 . D_2 \ldots D_n}};\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

en posant,

$$D_i = (a_1^2 - u_i^2)(a_2^2 - u_i^2) \ldots (a_{i-1}^2 - u_i^2)(u_i^2 - a_i^2) \ldots (u_i^2 - a_n^2) . \quad . \quad . \quad (52)$$

Dans cette formule, l'indice k doit varier de 1 à $n-1$ et l'indice l doit être supérieur à k.

32. Afin de simplifier un peu, je suppose $a_n = 0$: alors le facteur $u_i^2 - a_n^2$ de D_i se réduisant à u_i^2, détruit le facteur u_i qui se trouve sous les signes d'intégration; et l'on a

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^n}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)} a\sqrt{(a^2-a_1^2)(a^2-a_2^2)\ldots(a^2-a_{n-1}^2)}\\ &=\int_{0}^{a_{n-1}}\int_{a_{n-1}}^{a_{n-2}}\ldots\int_{a_1}^{a} du_n . du_{n-1} \ldots du_1 . \frac{\Pi(u_k^2-u_l^2)}{\sqrt{D'_1 D'_2 \ldots D'_n}};\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

D'_i étant égal à

$$(a_1^2 - u_i^2)(a_2^2 - u_i^2) \ldots (a_{i-1}^2 - u_i^2)(u_i^2 - a_i^2) \ldots (u_i^2 - a_{n-1}^2).$$

En prenant, dans cette dernière formule, $n = 3$, on retombe sur l'intégrale triple trouvée d'abord par M. Lamé, et qui, démontrée depuis par M. Poisson, l'a été tout récemment par M. Tortolini, de Rome [1].

[1] *Journal de M. Liouville*, tom. II, pages 167 et 185 ; Tortolini, *Sopra le trasformazioni e valori di alcuni intègrali definiti*, etc.

33. J'observe actuellement que si l'on développe le produit représenté par $\Pi(u_k^2 - u_l^2)$, ou

$$(u_1^2-u_2^2)(u_1^2-u_3^2)\ \ldots\ (u_1^2-u_n^2)(u_2^2-u_3^2)\ (u_2^2-u_4^2)\ \ldots\ (u_2^2-u_n^2)\ \ldots\ (u_{n-1}^2-u_n^2),\quad (54)$$

on obtient une expression dont le premier terme est

$$u_1^{2n-2}.\ u_2^{2n-4}.\ u_3^{2n-6}.\ \ldots\ .\ u_{n-1}^2;$$

et dont tous les autres sont positifs ou négatifs, mais de même forme que celui-là; de façon que l'on peut écrire :

$$\Pi(u_k^2 - u_l^2) = \Sigma\,(\pm u_1^{2n-2}.\ u_2^{2n-4}\ \ldots\ u_{n-2}^4.\ u_{n-1}^2)\quad (55)$$

Si nous remplaçons alors, dans l'équation (53), la fonction Π par son développement, les variables se sépareront; et l'on aura

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^n}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}\, a\sqrt{(a^2-a_1^2)(a^2-a_2^2)\ \ldots\ (a^2-a_{n-1}^2)} =$$

$$\Sigma\left(\pm\int_0^{a_{n-1}}\frac{du_n}{\sqrt{\mathrm{D}'_n}}\int_{a_{n-1}}^{a_{n-2}}\frac{u_{n-1}^2\,du_{n-1}}{\sqrt{\mathrm{D}'_{n-1}}}\ \ldots\ \int_{a_2}^{a_1}\frac{u_2^{2n-4}\,du_2}{\sqrt{\mathrm{D}'_2}}\int_{a_1}^{a}\frac{u_1^{2n-2}\,du_1}{\sqrt{\mathrm{D}'_1}}\right)\quad (56)$$

34. Pour bien faire comprendre le sens que l'on doit attacher au théorème exprimé par cette formule, je ferai observer d'abord que, dans le second membre, chaque signe d'intégration porte sur une fonction de la forme

$$\frac{x^{2(n-m)}\,dx}{\sqrt{\mathrm{A}+\mathrm{B}x^2+\mathrm{C}x^4+\ldots+\mathrm{N}x^{2n-2}}};$$

m étant une quantité entière, plus grande que l'unité, et au plus égale à n. Chaque facteur du second membre est donc une intégrale définie abélienne [1].

[1] Legendre, *Traité des fonctions elliptiques*, tom. III, 3me supplément, pag. 188. *Voy.* aussi différents mémoires de M. Jacobi et de l'illustre Abel, insérés dans le *Journal de Crelle*.

D'un autre côté, on prouve très-facilement, ainsi que l'a fait M. Poisson, que dans le cas de $n = 3$, la propriété énoncée par la formule ci-dessus, revient à celle qui constitue le théorème de Legendre :

$$F_1(b)\,E_1(c) + F_1(c)\,E_1(b) - F_1(b)\,F_1(c) = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Il résulte, si je ne me trompe, de ces deux observations, que l'équation (56) donne, pour les intégrales définies abéliennes d'un ordre quelconque, le théorème trouvé par Legendre, seulement pour les fonctions elliptiques de première ou de seconde espèce.

Ordinairement, dans les intégrales définies abéliennes, on prend pour la limite inférieure, zéro. Il serait facile, au moyen d'un changement de variables, de transformer les intégrales ci-dessus en d'autres, satisfaisant à cette condition : mais comme la formule (56) serait remplacée alors par une autre assez compliquée, je me dispenserai de faire le calcul que j'indique ici.

35. Si l'on multiplie par $u_1^2 . u_2^2 \ldots\ldots u_n^2$ la fonction Π développée, le résultat sera, comme on sait, égal au déterminant du système

$$\left.\begin{array}{llllll} v_1^n, & v_2^n, & v_3^n, & \ldots\ldots & v_n^n, \\ v_1^{n-1}, & v_2^{n-1}, & v_3^{n-1}, & \ldots\ldots & v_n^{n-1}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_1^2, & v_2^2, & v_3^2, & \ldots\ldots & v_n^2, \\ v_1, & v_2, & v_3, & \ldots\ldots & v_n; \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (57)$$

en posant, pour simplifier, $v_i = u_i^2$.

Il résulte de là que l'on pourra déterminer la fonction placée sous le signe Σ dans la dernière formule, soit par la multiplication, soit en appliquant au système ci-dessus la règle relative aux déterminants. On devra avoir soin, si l'on emploie ce dernier moyen, de diminuer d'une unité chacun des exposants des lettres v.

36. En terminant, je ferai observer que, si l'on donne d'autres formes à la fonction placée sous le signe $\int$, dans l'intégrale (44), on ob-

tiendra des théorèmes sur les intégrales définies abéliennes, lesquels seront aussi généraux que celui qui a été démontré dans ce paragraphe. J'en ai trouvé de la sorte plusieurs, que je ferai connaître dans un autre mémoire. (Ici s'arrêtait le mémoire envoyé au concours).

37. Prenons, pour second exemple de l'application des formules contenues dans le paragraphe 3, l'intégrale

$$B = \int dx_2 . dx_3 \ldots . dx_n \sqrt{1 + \left(\frac{dx_1}{dx_2}\right)^2 + \left(\frac{dx_1}{dx_3}\right)^2 + \ldots . + \left(\frac{dx_1}{dx_n}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

dans laquelle $x_2, x_3, \ldots . x_n$ seront des variables indépendantes, et x_1 une fonction de ces variables, déterminée par la première des équations (25). On suppose cette intégrale étendue à toutes les valeurs positives de $x_2, x_3, \ldots . x_n$ satisfaisant à la condition

$$\frac{x_2^2}{u_1^2 - a_2^2} + \frac{x_3^2}{u_1^2 - a_3^2} + \ldots . + \frac{x_n^2}{u_1^2 - a_n^2} \leqq 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

La valeur de x_1 donne

$$\frac{dx_1}{dx_i} = - \frac{x_i}{x_1} \frac{u_1^2 - a_1^2}{u_1^2 - a_i^2} ;$$

donc la quantité sous le radical se transforme en

$$\left(\frac{u_1^2 - a_1^2}{x_1}\right)^2 \left[\left(\frac{x_1}{u_1^2 - a_1^2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{u_1^2 - a_2^2}\right)^2 + \ldots . + \left(\frac{x_n}{u_1^2 - a_n^2}\right)^2\right] = \left(\frac{u_1^2 - a_1^2}{x_1}\right)^2 \Sigma_1^n \left(\frac{x_i}{u_1^2 - a_i^2}\right)^2 .$$

D'après le n° 26,

$$\Sigma_1^n \left(\frac{x_i}{u_1^2 - a_i^2}\right)^2 = \frac{(u_1^2 - u_2^2)(u_1^2 - u_3^2) \ldots . (u_1^2 - u_n^2)}{(u_1^2 - a_1^2)(u_1^2 - a_2^2) \ldots . (u_1^2 - a_n^2)} .$$

Le radical devient

$$\sqrt{\frac{u_1^2 - a_1^2}{x_1^2} \cdot \frac{u_1^2 - u_2^2}{u_1^2 - a_2^2} \ldots . \frac{u_1^2 - u_n^2}{u_1^2 - a_n^2}} ;$$

ou, en mettant pour x_1^2 sa valeur :

$$\sqrt{\frac{a_1^2-a_2}{a_1^2-u_2^2}\cdot\frac{a_1^2-a_3^2}{a_1^2-u_3^2}\cdots\frac{a_1^2-a_n^2}{a_1^2-u_n^2}\times\frac{u_1^2-u_2^2}{u_1^2-a_2^2}\cdots\frac{u_1^2-u_n^2}{u_1^2-a_n^2}}.$$

38. Actuellement, afin d'obtenir l'expression transformée du produit $dx_2, dx_3, \ldots . dx_n$, j'emploie les équations (26), en supprimant la première, et supposant u_1 constante.

Pour simplifier, je pose en même temps

$$x_2=z_2\sqrt{\frac{u_1^2-a_2^2}{a_1^2-a_2^2}},\quad x_3=z_3\sqrt{\frac{u_1^2-a_3^2}{a_1^2-a_3^2}},\quad \ldots . x_n=z_n\sqrt{\frac{u_1^2-a_n^2}{a_1^2-a_n^2}} \quad . \; . \; . \quad (60)$$

Les équations (26) deviennent

$$\left.\begin{aligned}
&z_2^2+\frac{(a_2^2-u_2^2)\ldots .(a_2^2-u_n^2)}{(a_2^1-a_3^2)\ldots .(a_2^2-a_n^2)}=0,\\
&z_3^2+\frac{(a_3^2-u_2^2)\ldots .(a_3^2-u_n^2)}{(a_3^2-a_2^2)\ldots .(a_3^2-a_n^2)}=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&z_n^2+\frac{(a_n^2-u_2^2)\ldots .(a_n^2-u_n^2)}{(a_n^2-a_2^2)\ldots .(a_n^2-a_{n-1}^2)}=0.
\end{aligned}\right\}\quad \ldots\ldots \quad (61)$$

Or, ces équations ne diffèrent des équations (26), appliquées à $n-1$ inconnues, que par le changement des indices $1, 2, 3, \ldots . n-1$ en $2, 3, \ldots . n$. Elles donneront pour $dz_2 \ldots . dz_n$ une valeur qui se déduira de la formule (44) par le même changement; c'est-à-dire que l'on aura

$$dz_2.dz_3\ldots .dz_n=u_2.u_3\ldots .u_n.du_2.du_3\ldots .du_n\,\frac{\Pi(u_i^2-u_l^2)}{\sqrt{D_2.D_3\ldots .D_m\ldots .D_n}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (62)$$

en posant

$$D_m=(u_m^2-a_2^2)(u_m^2-a_3^2)\quad\ldots .\quad(u_m^2-a_n^2).$$

Dans cette formule, les indices i et m croissent de 2 à $n-1$ et de 2 à n, et l'indice l doit être plus grand que i.

Au moyen des formules (60) et (62), et en employant pour le radical de $d\mathrm{B}$, la valeur trouvée plus haut, on a

$$d\mathrm{B} = u_2 u_3 \ldots u_n . du_2 du_3 \ldots du_n \sqrt{\frac{u_1^2 - u_2^2}{a_1^2 - u_2^2} \cdot \ldots \cdot \frac{u_1^2 - u_n^2}{a_1^2 - u_n^2}} \; \frac{\Pi(u_i^2 - u_l^2)}{\sqrt{\mathrm{D}_2 . \mathrm{D}_3 \ldots \mathrm{D}_m \ldots \mathrm{D}_n}} \quad . \quad (63)$$

39. Si, comme au n° 32, nous supposons $a_n = 0$, la formule précédente se transformera facilement en celle-ci :

$$d\mathrm{B} = \frac{du_2 . du_3 \ldots du_n . \Pi(u_i^2 - u_l^2)}{\sqrt{\Delta_2 . \Delta_3 \ldots \Delta_m \ldots \Delta_n}} \; : \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

l'indice i peut actuellement croître de 1 à $n-1$, et

$$\Delta_m = (u_1^2 - u_m^2)(a_1^2 - u_m^2) \ldots (a_{m-1}^2 - u_m^2)(u_m^2 - a_m^2) \ldots (u_m^2 - a_{n-1}^2).$$

En employant ensuite toutes les considérations du n° 30, je trouve

$$\mathrm{B} = \int_{a_2}^{a_1} \int_{a_3}^{a_2} \ldots \int_{0}^{a_{n-1}} \frac{du_2 . du_3 \ldots du_n \Pi(u_i^2 - u_l^2)}{\sqrt{\Delta_2 . \Delta_3 \ldots \Delta_m \ldots \Delta_n}} \; ; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

ou, en effectuant le produit Π, et adoptant la même notation qu'au n° 33:

$$\mathrm{B} = \Sigma \left(\pm \int_{0}^{a_{n-1}} \frac{du_n}{\sqrt{\Delta_n}} \int_{a_{n-1}}^{a_{n-2}} \frac{u^2_{n-1} du_{n-1}}{\sqrt{\Delta_{n-1}}} \ldots \int_{a_3}^{a_1} \frac{u_2^{2n-4} du_2}{\sqrt{\Delta_2}} u_1^{2n-2} \right) \quad . \quad . \quad . \quad (66)$$

40. On peut obtenir une autre expression de l'intégrale B. Observons pour cela, qu'en posant dans la formule (55) :

$$x_2 = y_2 \sqrt{u_1^2 - a_2^2}, \quad x_3 = y_3 \sqrt{u_1^2 - a_3^2}, \quad \ldots \ldots \quad x_n = y_n \sqrt{u_1^2 - a_n^2};$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{a_1^2 - a_2^2}{u_1^2 - a_2^2}}, \quad \lambda_3 = \sqrt{\frac{a_1^2 - a_3^2}{u_1^2 - a_3^2}}, \quad \ldots \ldots \quad \lambda_n = \sqrt{\frac{a_1^2 - a_n^2}{u_1^2 - a_n^2}};$$

elle se transforme en

$$\mathrm{B} = \sqrt{(a_1^2 - a_2^2)(u_1^2 - a_3^2) \ldots (u_1^2 - a_n^2)} \int dy_2 . dy_3 \ldots dy_n \sqrt{\frac{1 - \lambda_2^2 y_2^2 - \ldots - \lambda_n^2 y_n^2}{1 - y_2^2 - \ldots - y_n}} \; ; \quad . \quad . \quad (67)$$

les limites étant déterminées par

$$y_2^2 + y_3^2 + \ldots + y_n^2 \leqq 1.$$

Or, en appliquant la méthode exposée dans mon *Mémoire sur la réduction d'une classe d'intégrales multiples* [1], je trouve

$$B = \frac{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \sqrt{(u_1^2-a_2^2)(u_1^2-a_3^2)\ldots(u_1^2-a_n^2)} \left(\frac{1-\lambda_2^2}{\lambda_2}\frac{dU}{d\lambda_2} + \ldots + \frac{1-\lambda_n^2}{\lambda_n}\frac{dU}{d\lambda_n}\right); \quad (68)$$

en posant

$$U = \int_1^\infty \frac{v^2(v^2-1)^{\frac{n-3}{2}}\,dv}{\sqrt{(v^2-\lambda_2^2)(v^2-\lambda_3^2)\ldots(v^2-\lambda_n^2)}} \quad (69)$$

On devra se rappeler que cette valeur de B n'est qu'une *expression abrégée*, attendu que l'intégrale U serait infinie, et que la quantité entre parenthèses se compose réellement de $n-1$ intégrales simples différentes. On se rappellera, en outre, que $a_n = 0$.

41. Si l'on convient de classer les intégrales abéliennes d'après le degré de la quantité placée sous le radical; que l'on appelle, par exemple, intégrale d'*ordre n* celle qui contient un dénominateur de la forme $\sqrt{x^{2n} + Ax^{2n-2} + \ldots + N}$; il est clair que la formule (66) renferme une somme de produits d'intégrales définies d'ordre n : or, d'après la formule (68), cette somme se réduira, si n est impair, à une somme d'intégrales d'ordre $n-1$, et si n est pair, à une somme d'intégrales d'ordre n. La comparaison des deux valeurs trouvées pour l'intégrale proposée B, fournit donc un second théorème sur les intégrales définies abéliennes. Nous démontrerons plus loin qu'il est distinct du précédent.

42. Supposons, comme cas particulier, $n = 3$. La formule (66) deviendra d'abord

$$B = \int_{a_2}^{a_1}\int_0^{a_2} \frac{du_2.du_3\,(u_1^2-u_2^2)(u_1^2-u_3^2)(u_2^2-u_3^2)}{\sqrt{(u_1^2-u_2^2)(a_1^2-u_2^2)(u_2^2-a_2^2)\times(u_1^2-u_3^2)(a_1^2-u_3^2)(a_2^2-u_3^2)}},$$

[1] *Journal de Liouville*, tom. IV, pag. 333.

ou

$$B = \int_{a_2}^{a_1} \int_{0}^{a_2} \frac{du_2\, du_3 \sqrt{(u_1^2-u_2^2)(u_1^2-u_3^2)(u_2^2-u_3^2)}}{\sqrt{(a_1^2-u_2^2)(u_2^2-a_2^2) \times (a_1^2-u_3^2)(a_2^2-u_3^2)}}.$$

D'un autre côté, la formule (68) se transforme en celle-ci :

$$B = \frac{\pi}{4} u_1 \sqrt{u_1^2-a_2^2} \left[(1-\lambda_2^2) \int_1^{\infty} \frac{v^2 dv}{(v^2-\lambda_2^2)\sqrt{(v^2-\lambda_2^2)(v^2-\lambda_3^2)}} + (1-\lambda_3^2) \int_1^{\infty} \frac{v^2 dv}{(v^2-\lambda_3^2)\sqrt{(v^2-\lambda_2^2)(v^2-\lambda_3^2)}} \right].$$

On aura donc, en égalant ces deux valeurs de B :

$$\left.\begin{aligned} &\int_{a_2}^{a_1} \int_{0}^{a_2} \frac{du_2.du_3 \sqrt{(u_1^2-u_2^2)(u_1^2-u_3^2)(u_2^2-u_3^2)}}{\sqrt{(a_1^2-u_2^2)(u_2^2-a_2^2) \times (a_1^2-u_3^2)(a_2^2-u_3^2)}} \\ &= \frac{\pi}{4} u_1 \sqrt{(u_1^2-a_2^2)} \left[(1-\lambda_2^2) \int_1^{\infty} \frac{v^2 dv}{(v^2-\lambda_2^2)\sqrt{(v^2-\lambda_2^2)(v^2-\lambda_3^2)}} \right. \\ &\qquad \left. + (1-\lambda_3^2) \int_1^{\infty} \frac{v^2 dv}{(v^2-\lambda_3^2)\sqrt{(v^2-\lambda_2^2)(v^2-\lambda_3^2)}} \right]. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (70)$$

Dans cette équation,

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{a_1^2-a_2^2}{u_1^2-a_2^2}}, \quad \lambda_3 = \frac{a_1}{u_1}; \text{ et l'on a } \lambda_2 < \lambda_3 < 1.$$

43. Le premier membre de l'équation (70) est l'expression du huitième de l'aire de l'ellipsoïde, quand on prend pour élément de la surface le rectangle infiniment petit déterminé par quatre lignes de courbure [1]. Le second membre représente aussi la même portion de l'aire de l'ellipsoïde; mais la décomposition est celle que j'ai employée dans le mémoire déjà cité. Ce second membre se ramène très-facilement aux fonctions elliptiques : pour le premier membre, cette réduction présente quelque difficulté; elle est l'objet des calculs suivants.

[1] *Voyez* Binet, *Journal de mathématiques*, tom. II, pag. 248; Lamé, *idem*, pag. 158.

44. Pour plus de simplicité, je remplace u_1, u_2, u_3 par a, u, v. La fonction qu'il s'agit de ramener aux transcendantes elliptiques est

$$\mathrm{B} = \int_{a_1}^{a_2} \int_{0}^{a_1} \frac{du\,dv\,\sqrt{(a^2-u^2)(a^2-v^2)(u^2-v^2)}}{\sqrt{(a_1^2-u^2)(u^2-a_2^2)(a_1^2-v^2)(a_2^2-v^2)}}.$$

Je fais

$$a_1 = ak,\ a_2 = ak',\ c^2 = \frac{k^2-k'^2}{k^2(1-k'^2)},\ u^2 = a^2k^2\,\frac{1-c^2\sin.^2\varphi}{1-k^2c^2\sin.^2\varphi},\ v^2 = a^2k'^2\,\frac{\sin.^2\theta}{1-k'^2\cos.^2\theta} \quad \ldots (71)$$

Au moyen de ces valeurs, qui donnent $k' < k < 1$, et $c < 1$, j'obtiens successivement

$$du = -\,akc^2(1-k^2)\,\frac{\sin.\varphi\cos.\varphi\,d\varphi}{(1-k^2c^2\sin.^2\varphi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}};\quad \sqrt{a^2-u^2} = \frac{a\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{1-k^2c^2\sin.^2\varphi}};$$

$$\sqrt{a_1^2-u^2} = \frac{ack\sqrt{1-k^2}\sin.\varphi}{\sqrt{1-k^2c^2\sin.^2\varphi}};\quad \sqrt{u^2-a^2} = a\sqrt{\frac{(k^2-k'^2)-k^2c^2(1-k'^2)\sin.^2\varphi}{1-k^2c^2\sin.^2\varphi}}$$

$$= \frac{ack\sqrt{1-k'^2}\cos.\varphi}{\sqrt{1-k^2c^2\sin.^2\varphi}};$$

$$dv = ak'(1-k'^2)\,\frac{\cos.\theta\,d\theta}{(1-k'^2\cos.^2\theta)^{\frac{3}{2}}};\quad \sqrt{a^2-v^2} = \frac{a\sqrt{1-k'^2}}{\sqrt{1-k'^2\cos.^2\theta}};$$

$$\sqrt{a_1^2-v^2} = a\sqrt{\frac{k^2(1-k'^2)-k'^2(1-k^2)\sin.^2\theta}{1-k'^2\cos.^2\theta}},$$

ou, en posant $c'^2 = \dfrac{k'^2(1-k^2)}{k^2(1-k'^2)}$:

$$\sqrt{a_1^2-v^2} = ak\sqrt{1-k'^2}\,\sqrt{\frac{1-c'^2\sin.^2\theta}{1-k'^2\cos.^2\theta}};$$

$$\sqrt{a^2-v^2} = ak'\sqrt{1-k'^2}\,\frac{\cos.\theta}{\sqrt{1-k'^2\cos.^2\theta}}.$$

En substituant ces valeurs dans l'expression de $d\mathrm{B}$, et faisant attention aux réductions, on obtient

$$d\mathrm{B} = -\,a^2\,\frac{1-k^2}{k^2}\,\frac{\left(k^2\,\dfrac{1-c^2\sin.^2\varphi}{1-k^2c^2\sin.^2\varphi} - k'^2\,\dfrac{\sin.^2\theta}{1-k'^2\cos.^2\theta}\right)d\varphi\,d\theta}{(1-k^2c^2\sin.^2\varphi)(1-k'^2\cos.^2\theta)\sqrt{(1-c^2\sin.^2\varphi)(1-c'^2\sin.^2\theta)}} \quad \ldots (72)$$

Observons actuellement que

1° pour $u=ak'$, on a $k'^2(1-k^2c^2\sin.^2\varphi)=k^2-k^2c^2\sin.^2\varphi$, $\sin.^2\varphi=\dfrac{k^2-k'^2}{k^2c^2(1-k'^2)}=1$, ou $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$;

2° $u=ak$, $1-c^2\sin.^2\varphi=1-k^2c^2\sin.^2\varphi$, ... $\varphi=0$;

3° $v=o$, ... $\theta=0$;

4° $v=ak'$, ... $\theta=\dfrac{\pi}{2}$.

Observons aussi que

$$c^2+c'^2=\frac{k^2-k'^2}{k^2(1-k'^2)}+\frac{k'^2(1-k^2)}{k^2(1-k'^2)}=1.$$

Ainsi, les modules sont complémentaires : je ferai $c'=b$, comme fait Legendre.

45. En intégrant l'expression précédente, le premier membre de l'équation (70) se trouve transformé en

$$B=a^2\frac{1-k^2}{k^2}\left(k^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi\sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}}{(1-k^2c^2\sin.^2\varphi)^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(1-k'^2\cos.^2\theta)\sqrt{1-b^2\sin.^2\theta}}\right.$$

$$\left.-k'^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{(1-k^2c^2\sin.^2\varphi)\sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin.^2\theta d\theta}{(1-k'^2\cos.^2\theta)^2\sqrt{1-b^2\sin.^2\theta}}\right);$$

ou bien, en prenant

$$k=\sin.\lambda,\quad \frac{k'^2}{1-k'^2}=n :$$

$$B=\frac{a^2\cos.^2\lambda}{1-n^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi\sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}}{(1-c^2\sin.^2\lambda\sin.^2\varphi)^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(1+n\sin.^2\theta)\sqrt{1-b^2\sin.^2\theta}}$$

$$-\frac{na^2\operatorname{cotang.}^2\lambda}{1-n^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{(1-c^2\sin.^2\lambda\sin.^2\varphi)\sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin.^2\theta d\theta}{(1+n\sin.^2\theta)^2\sqrt{1-b^2\sin.^2\theta}} \quad (73)$$

46. La seconde et la troisième intégrale sont des fonctions ellipti-

ques de troisième espèce. Quant aux deux autres, elles se ramènent aussi aux fonctions elliptiques; et, à l'aide de calculs dont on peut voir le détail dans Legendre, on trouve

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi \sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}}{(1-c^2\sin.^2\lambda\sin.^2\varphi)^2} =$$

$$\frac{1}{2\sin.^2\lambda(1-c^2\sin.^2\lambda)} [\cos^2\lambda \, \mathrm{F}^1(c) + \sin.^2\lambda \mathrm{E}^1(c) - (1-2\sin.^2\lambda+c^2\sin.^4\lambda)\,\Pi^1(\lambda,c)],$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin.^2\theta d\theta}{(1+n\sin.^2\theta)^2 \sqrt{1-b^2\sin.^2\theta}} =$$

$$\frac{1}{2n(n+1)(n+b^2)} [(n+b^2)\,\mathrm{F}^1(b) - n\,\mathrm{E}^1(c) + (n^2-b^2)\,\Pi^1(n,b)].$$

La substitution de ces valeurs dans la formule (70) donne, après quelques réductions :

$$\mathrm{B} = \tfrac{1}{2}\frac{a^2}{k^2}[(1-k^2)\,\mathrm{F}^1(c) + k^2\mathrm{E}^1(c)]\,\Pi^1(n,b) - \tfrac{1}{2}\frac{a^2(1-k^2)}{k^2}[\mathrm{F}^1(b) - k^2\mathrm{E}^1(b)]\,\Pi^1(\lambda,c) \quad . \quad (74)$$

Cette expression ne diffère que par la notation, de celle qui se trouve à la pag. 190 du 1er volume des *Exercices de calcul intégral :* en continuant la réduction comme Legendre, on trouve enfin, pour la valeur du premier membre de l'équation (70) :

$$\mathrm{B} = \tfrac{1}{4}\pi a^2 k \sqrt{1-k'^2}\,[k^2\mathrm{E}(c,k) + (1-k^2)\mathrm{F}(c,k) + k\sqrt{1-k^2}\sqrt{1-k'^2}] \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

Or, cette valeur est précisément celle du second membre de la même équation, ainsi que je l'ai fait voir dans le mémoire cité.

47. Il résulte des calculs précédents, que l'équation (70) n'apprend rien de nouveau sur les fonctions elliptiques; c'est-à-dire qu'en admettant les propriétés connues de ces transcendantes, elle n'est qu'une identité. Mais il résulte aussi de ces calculs que la proposition, émise dans le n° 41, se trouve démontrée.

En effet, la formule (70) ne devient identique qu'à l'aide de deux théorèmes différents; l'un relatif aux fonctions complètes de première

et de seconde espèce, à modules complémentaires; l'autre relatif à la réduction des fonctions complètes de troisième espèce, en fonctions de première et de seconde.

Il est évident, d'après cela, que si on voulait établir par un calcul direct l'identité des formules (66) et (68), on ne le pourrait qu'en admettant deux propriétés distinctes des fonctions que nous avons considérées; savoir, celle qui est exprimée par l'équation (53), et qui renferme le théorème de Legendre sur les fonctions elliptiques complètes de première et de seconde espèce, à modules complémentaires; et ensuite un autre théorème qu'il serait difficile d'énoncer, mais qui correspond à la réduction des fonctions complètes de troisième espèce.

48. En suivant la marche indiquée dans ce paragraphe, on arriverait facilement, ainsi que je l'ai déjà dit, à d'autres théorèmes sur les intégrales abéliennes définies. De plus, si l'on intègre ou si l'on différencie par rapport à u_1, les deux membres des équations démontrées dans ce mémoire, on obtiendra d'autres relations plus compliquées. On pourrait aussi généraliser les équations (25), en remplaçant l'exposant 2 par un exposant entier quelconque; ce qui conduirait à des théorèmes analogues sur les fonctions de la forme $\int \frac{\mathrm{P}dx}{\sqrt[n]{\mathrm{R}}}$, etc. Je me contenterai d'indiquer ici une propriété assez remarquable des variables employées dans ce mémoire.

49. En ajoutant les équations (26), on obtient

$$\Sigma_1^n x_i^2 + \Sigma_1^n \frac{(a_i^2-u_1^2)(a_i^2-u_2^2) \ldots (a_i^2-n_n^2)}{(a_i^2-a_1^2)(a_i^2-a_2^2) \ldots (a_i^2-a_n^2)} = 0. \quad \ldots \quad (76)$$

Pour simplifier la seconde somme, je prends la fraction rationnelle

$$\frac{(x-u_1)(x-u_2) \ldots (x-u_n)}{(x-a_1)(x-a_1) \ldots (x-a_n)} = \varphi(x).$$

Le numérateur étant de même degré en x que le dénominateur, si l'on fait la division, on aura pour quotient 1. Par suite, la fraction proposée sera égale à 1 plus une autre fraction, dont le numérateur

sera un polynome du degré $n-1$, et à laquelle on pourra appliquer la règle ordinaire. On peut donc écrire

$$\varphi(x) = 1 + \Sigma_1^n \frac{A_i}{x - a_i}.$$

La constante A_i a pour valeur,

$$A_i = \frac{(a_i - u_1)\ (a_i - u_2)\ \ldots\ (a_i - u_n)}{(a_i - a_1)\ (a_i - a_1)\ \ldots\ (a_i - a_n)} \quad \ldots\ldots\ (77)$$

Actuellement, si l'on multiplie les deux membres de l'équation précédente par le dénominateur de $\varphi(x)$, et si l'on égale les coefficients des mêmes puissances de la variable, on trouvera

$$\Sigma_1^n A_i = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - (u_1 + u_2 + \ldots + u_n).$$

Par suite, l'équation (73) devient

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = (u_1^2 - a_1^2) + (u_2^2 - a_2^2) + \ldots + (u_n^2 - a_n^2). \quad \ldots\ (78)$$

Ainsi, *la somme des carrés des variables primitives* entrant dans les équations (25), *est égale à la somme des carrés des nouvelles variables, diminuée de celle des carrés des constantes.*

50. Si les équations (25) se réduisent à trois, ce théorème prend une interprétation géométrique, et on peut l'énoncer ainsi :

Un point étant rapporté à trois axes rectangulaires, sa distance à l'origine est égale à la diagonale du parallélipipède rectangle construit sur le demi petit axe de l'ellipsoïde, le demi petit axe réel de l'hyperboloïde à une nappe, et le demi-axe réel de l'hyperboloïde à deux nappes, qui se croisent en ce point; ces trois surfaces étant d'ailleurs homofocales et ayant pour centre l'origine.

FIN.

REMARQUE.

La démonstration contenue dans les n°s 5, 6, 7, ne s'applique qu'au cas de n impair. Si le nombre des équations est pair, cette démonstration doit subir des modifications que le lecteur trouvera facilement, s'il transforme ainsi l'équation (4) :

$$\lambda_1 = D_1, \quad \lambda_2 = -D_2, \quad \lambda_3 = D_3, \quad \ldots \quad \lambda_n = -D_n.$$

Eigenthum
des Referenten.

A METHOD *of* APPROXIMATION

By

S. A. COREY,

HITEMAN, IOWA.

[Reprinted from THE AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY, Vol. XIII, Nos. 6-7, June-July, 1906.]

A METHOD OF APPROXIMATION.

By S. A. COREY, Hiteman, Iowa.

The following method of approximation may or may not be new, but as I believe it to be of practical importance I wish to call attention to it, and to point out that to secure the same degree of accuracy, it involves, at least in some cases, less labor than does the method of mechanical quadrature. It can also be used in certain cases where the method of mechanical quadrature fails, because the finite differences used in the latter method cannot always be found between the proper limits. On account of its rapid convergence it can also be used when other common methods fail.

We have the formula,*

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{2m}\left\{f(x)+f(0)+2\left[f\left(\frac{x}{m}\right)+f'\left(\frac{2x}{m}\right)+\ldots+f\left(\frac{m-1}{m}x\right)\right]\right\}$$

$$-\frac{B_1x^2}{m^2.2!}[f'(x)-f'(0)]+\frac{B_2x^4}{m^4.4!}[f^{iv}(x)-f^{iv}(0)]-\frac{B_3x^6}{m^6.6!}[f^{vi}(x)-f^{vi}(0)]+\ldots.$$

$$+(-1)^n\frac{B_nx^{2n}}{m^{2n}.(2n)!}[f^{2n}(x)-f^{2n}(0)]+\ldots \quad \ldots(1),$$

(B_1, B_2, B_3, etc., being Bernoulli's numbers, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{5}{66}$, etc.)

For brevity, (1) may be written,

$$f(x)=F(x,m)+\frac{s_2}{m^2}+\frac{s_4}{m^4}+\frac{s_6}{m^6}+\text{ etc. } \ldots(2),$$

in which s_2, s_4, s_6, etc., are independent of m. It is evident that m may be considered a convergence factor which makes $F(x, m)$ approach $f(x)$ as m approaches infinity, F and f becoming equal as m becomes infinite. But as m increases, the labor of evaluating $F(x, m)$ also increases, so that, in practice, it is found desirable to obtain one or more of the higher derivatives involved in s_2, s_4, s_6, etc., in order to permit the use of a smaller value of m, and yet to attain the required degree of accuracy. In certain cases it becomes exceedingly difficult to obtain the form and value of the higher derivatives involved in s_2, s_4, s_6, etc., and chiefly for this reason, it becomes desirable to eliminate from (2) certain of these quantities, (s_2, s_4, s_6, etc.), after a certain degree of approximation has been reached. To accomplish this elimination take more than one value of m and set down a separate equation for each value chosen, thus,

*See *Annals of Mathematics*, Second Series, Vol. 5, No. 4, July, 1904.

$$f(x)=F(x, m_1)+\frac{s_2}{m_1^2}+\frac{s_4}{m_1^4}+\frac{s_6}{m_1^6}+\ldots \quad \ldots(3),$$

$$f(x)=F(x, m_2)+\frac{s_2}{m_2^2}+\frac{s_4}{m_2^4}+\frac{s_6}{m_2^6}+\ldots \quad \ldots(4),$$

$$f(x)=F(x, m_3)+\frac{s_2}{m_3^2}+\frac{s_4}{m_3^4}+\frac{s_6}{m_3^6}+\ldots \quad \ldots(5),$$

etc. (In selecting the values of m it is usually convenient to take the highest value such that one or more of the lesser values will be sub-multiples thereof.)

It is evident that from $(r+1)$ such linear equations there may be elimi nated r of the quantities s, say s_{2i}, $s_{2(i+1)}$, ..., $s_{2(i+r-1)}$. There results,

$$f(x)=\frac{\begin{vmatrix} M_1 & m_1^{-2i} & m_1^{-2(i+1)} & m_1^{-2(i+2)} & \ldots. & m_1^{-2(i+r-1)} \\ M_2 & m_2^{-2i} & m_2^{-2(i+1)} & m_2^{-2(i+2)} & \ldots. & m_2^{-2(i+r-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ M_{(r+1)} & m_{(r+1)}^{-2i} & m_{(r+1)}^{-2(i+1)} & m_{(r+1)}^{-2(i+2)} & \ldots. & m_{(r+1)}^{-2(i+r-1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & m_1^{-2i} & m_1^{-2(i+1)} & m_1^{-2(i+2)} & \ldots. & m_1^{-2(i+r-1)} \\ 1 & m_2^{-2i} & m_2^{-2(i+1)} & m_2^{-2(i+2)} & \ldots. & m_2^{-2(i+r-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & m_{(r+1)}^{-2i} & m_{(r+1)}^{-2(i+1)} & m_{(r+1)}^{-2(i+2)} & \ldots. & m_{(r+1)}^{-2(i+r-1)} \end{vmatrix}} \quad \ldots(6),$$

where M_1, M_2, ..., $M_{(r+1)}$, represent the approximate value of $f(x)$ obtained b (2) for m_1, m_2, ..., $m_{(r+1)}$, respectively, by the use of all the terms precedin s_{2i}/m^{2i}.

If all derivatives higher than the $(2i+2r-1)$th are zero, or if all suc *even-numbered* derivatives are equal for $x=x$ and $x=0$, (6) gives the exact valu of $f(x)$. In other cases the degree of accuracy attained will be no less tha would have been obtained by taking the smallest value of m used in (6) and d veloping $f(x)$ by (2) so far as to include all the r terms eliminated in (6).

As a special case of (6), let $r=2$, $i=2$. Here $M=F(x, m)+\frac{s_2}{m^2}$, and w get after reducing,

$$f(x)=\frac{m_1^6(m_2^2-m_3^2)M_1+m_2^6(m_3^2-m_1^2)M_2+m_3^6(m_1^2-m_2^2)M_3}{m_1^6(m_2^2-m_3^2)+m_2^6(m_3^2-m_1^2)+m_3^6(m_1^2-m_2^2)} \quad \ldots(7).$$

*Determinants of this form may be readily evaluated. See Weld's *Theory Determinants*, Articles 23 and 27.

It is clear that the more nearly all the M's approach $f(x)$, the more nearly does (6) give the exact value of $f(x)$, and that this increase in approximation is obtained by sufficiently increasing the integers, m, i, and r, or any of them.

The following points may be noted in passing:

First. After choosing certain values of m, r, and i, $f(x)$ is developed by (6) in linear terms of the $(r+1)$ quantities $(M_1, M_2, \ldots, M_{(r+1)})$, each M being an approximate value of $f(x)$.

Second. If $M=F(x, m)$ and if the values (but not the form) of $f'(x)$ be given at each of the $(m+1)$ equidistant points $(0, x/m, 2x/m, \ldots, x)$ for each of the $(r+1)$ values of m chosen, the value of $f(x)$ may be very closely approximated, although in such case the law of its development would not be expressly stated, but it must be assumed that some such law exists in order that $f(x)$ may be developable in terms of x. This makes the method of practical value in many scientific problems where it becomes necessary to find $f(x)$ approximately, and when the only available data are a number of observations of the values of $f'(x)$ at intervals of x/m, the approximation being closer in this method than in that of mechanical quadrature, especially where the intervals (x/m) are few.

A discussion of the cases where (6) does not give the value of $f(x)$ is not here entered into, but the following considerations will be pertinent:

First. As (6) is obtained from a number of equations, (3), (4), (5), etc., care should be taken that each of these equations actually does give a closer approximation of $f(x)$, when the number of terms employed include those eliminated in deriving (6), than does M.

Second. As (6), (2), and (1) are all dependent on the sum of a number of series developed by Stirling's formula, it becomes necessary that each of these underlying Stirling's series should give a true and convergent development of f between any and all of the adjacent, equidistant points (x/m) at which the value of f is taken.

The following example has been chosen because its development by formula (1) has been given in the MONTHLY,* Vol. XIII, No. 4, and because its solution by mechanical quadrature has been given by Dr. G. W. Hill in the *Analyst*, Vol. II, p. 120, 1875.†

Example. Evaluate $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x\,dx}{\sin x(1+.16\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}$.

Taking $r=2$, $i=2$, $m_1=6$, $m_2=3$, $m_3=2$, we get $M_1=1.657{,}626{,}355$, $M_2=1.657{,}490{,}406$, $M_3=1.657{,}013{,}853$. Substituting in (7), we get,

*The value of the integral is incorrectly given in the MONTHLY as, 1.657,636,524, instead of 1.657,636,257. The error is due to the fact that

$$f^{vi},\ \left[\frac{2596\pi^6}{4200.12^6.6!}\right]$$

is carried out as .000,000,009 instead of .000,000,276.

†See also Hill's *Collected Works*, Vol. I, p. 204.

$$f(\tfrac{1}{2}\pi)-f(0)=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{xdx}{\sin x(1+.16\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1728M_3-23328M_2+233280M_1}{211,680}$$

$$=1.657,636,33\ldots(8).$$

We may check the accuracy of the work of computation and determine the degree of approximation attained in (8) by finding the values of $f'(\frac{\pi}{8})$ and $f'(\frac{3\pi}{8})$. This done we may take $m_1=6$, $m_3=4$, $m_2=3$. Substituting these values of m_1, m_2, m_3, in (7) we get an expression similar to (8) which gives a value of the definite integral coinciding with the value found in (8) for six decimal places, thus proving the accuracy of the work and showing the number of decimal places to which result found by (8) is correct.

This result is not as accurate as that obtained in the April MONTHLY for the reason that the *smallest* value of m here used is 2. This is therefore a more accurate result than would have been obtained by taking $m=2$ and developing by (1) so far as to include the term involving B_4, but a less accurate result than was obtained in the MONTHLY by taking $m=6$ and developing by (1) far enough to include the term involving B_3. The above result is, however, as accurate as Dr. Hill's and was obtained with much less labor. To obtain a more accurate result than that given in the MONTHLY without finding any higher derivatives than are there given, take $i=4$, $r=1$, $m_1=6$, $m_2=3$, and substitute in (6). By using nine decimals throughout the result is found to be 1.657,636,259. By using ten decimals throughout a result correct to nine or ten decimal places would have been obtained.

Om Simpsonska formeln. — Af H. T. Daug.

[Meddeladt den 14 November 1860.]

Den deduktion af Simpsonska formeln, som i det följande mställes, skiljer sig från den i läroböcker vanligen förekomnde deri, att den har en helt annan utgångspunkt, ger en insbestämning för approximationsfelet och hänvisar på en för arkoordinater gällande, med den Simpsonska analog, formel.

1. För att slippa upprepa samma raisonnementer, erinra om den ur differentialkalkylen kända satsen, att, om $F(\Delta x)$ lf och dess n första derivator äro continuerliga och försvinna $\Delta x = o$, samt den $(n+1)$:sta derivatan är continuerlig, så är

$$F(\Delta x) = \frac{\Delta x^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)} F^{n+1}(o) + \delta,$$

δ betyder en qvantitet, som försvinner tillika med Δx. Vie antaga vi, att den i det följande förekommande functionen) jemte sina derivator till och med den fjerde är continuerlig alla de värden på x, med hvilka vi sysselsätta oss.

2. Om man sammanbinder trenne nära hvarandra liggande kter på en curva

$$y = f(x)$$

l räta linier, hvarigenom en liten triangel uppkommer, och ecknar nämnde punkters abscissor med x, $x+\lambda\Delta x$ och Δx (λ ett egentligt bråk) samt triangelarean med T_λ, så ålla vi lätteligen såsom expression på den sistnämnda

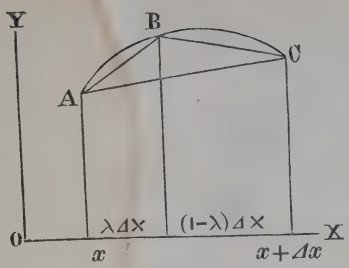
$$T_\lambda = \pm \frac{\Delta x}{2} F(\Delta x),$$

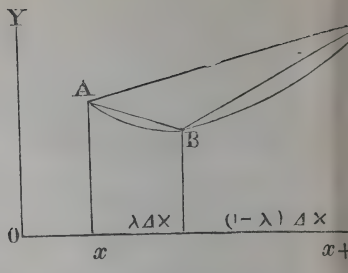
$$\Delta x) = \lambda\{f(x)+f(x+\lambda\Delta x)\} + (1-\lambda)\{f(x+\lambda\Delta x)+f(x+\Delta x)\} - \{f(x)+f(x+\Delta x)\}$$

$$F(\Delta x) = \lambda f(x) - \lambda f(x+\Delta x) + f(x+\lambda\Delta x) - f(x)$$

det öfre eller undre tecknet användes, allteftersom triangeln sådant läge, som i den första eller andra af vidstående figurer.

Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh., 1860, N:o 9.





Emedan nu continuitetsvilkoren anses vara uppfyllda f $f(x)$ och dess tvenne första derivator, så har $F(\Delta x)$ den eg skap, som i 1 omtaltes, och man kan skrifva

$$T_\lambda = \mp \frac{\Delta x^3}{4} \{\lambda(1-\lambda) f''(x) - \delta\},$$

der det öfre tecknet gäller för första och det nedre för an figuren.

3. Den krokliniga figuren ABC, i hvilken triangeln står, har tydligen till area S

$$S = \pm \varphi(\Delta x),$$

der

$$\varphi(\Delta x) = \int_x^{x+\Delta x} f(x)\,dx - \frac{\Delta x}{2} \{f(x) + f(x+\Delta x)\},$$

och tecknen höra respektive till första och andra figuren. följe af continuiteten och emedan såväl $\varphi(x)$ som dess tv första derivator försvinna för $\Delta x = o$, är

$$S = \mp \frac{\Delta x^3}{1.2.3} \left\{ \frac{1}{2} f''(x) - \varepsilon \right\}.$$

4. Af innehållet i 2 och 3 följer, att

$$\text{Lim.} \frac{T_\lambda}{\Delta x^3} = \mp \frac{\lambda(1-\lambda)}{4} f''(x)$$

och

$$\text{Lim.} \frac{S}{\Delta x^3} = \mp \frac{1}{12} \cdot f'(x),$$

der tecknen respektive tillhöra första och andra figuren. V följer, att

$$\text{Lim.} \frac{T_\lambda}{S} = 3\lambda(1-\lambda).$$

5. Expressionen på limes för förhållandet mellan T_λ och erhåller, såsom lätt synes, sitt högsta värde, då λ är $\frac{1}{2}$ och r i detta fall

$$\text{Lim.}\,\frac{T_{\frac{1}{2}}}{S} = \frac{3}{4}\,.$$

6. Differensen mellan S och $\frac{4}{3}\,T_{\frac{1}{2}}$ kan enligt det föregåde icke vara stor, om Δx har ett litet värde. Den är lätt räknad enligt **2** och **3** och blir

$$S - \frac{4}{3}\,T_{\frac{1}{2}} = \pm\,\psi(\Delta x),$$

$$\psi(\Delta x) = \int_x^{x+\Delta x} f(x)\,dx - \frac{\Delta x}{6}\left\{f(x) + 4f\left(x + \tfrac{1}{2}\,\Delta x\right) + f(x+\Delta x)\right\}.$$

Tecknen motsvara respektive första och andra figuren. Emeı continuitetsvilkoren anses vara satisfierade och alla derivana af $\psi\,(\Delta x)$ till och med den fjerde försvinna för $\Delta x = o$, är

$$\psi(\Delta x) = -\,\frac{\Delta x^5}{1.2.3.4.5}\cdot\left\{\frac{1}{24}\cdot f^{\text{IV}}(x) + \varepsilon\right\}$$

således proportionel mot femte digniteten af Δx.

7. Då således differensen mellan S och $\frac{4}{3}\cdot T_{\frac{1}{2}}$ är ganska n, och man dessutom har

$$\int_x^{x+\Delta x} f(x)\,dx = \left\{f(x) + f(x+\Delta x)\right\}\frac{\Delta x}{2} \pm S$$

s och minus respektive motsvarande första och andra figu-, så måste man approximativt kunna sätta

$$\int_x^{x+\Delta x} f(x)\,dx = \left\{f(x) + f(x+\Delta x)\right\}\frac{\Delta x}{2} \pm \frac{4}{3}\,T_{\frac{1}{2}}$$

, som är detsamma,

$$\int_x^{x+\Delta x} f(x)\,dx = \frac{\Delta x}{6}\left\{f(x) + 4f\left(x + \tfrac{1}{2}\,\Delta x\right) + f(x+\Delta x)\right\}.$$

Det härigenom begångna felet är naturligtvis

$$\chi(\Delta x) = \int_x^{x+\Delta x} f(x)\,dx - \frac{\Delta x}{6}\cdot f(x) + 4f(x+\tfrac{1}{2}\Delta x) + f(x+\Delta x$$

och kan lätt erhålla ett annat uttryck, om man först och frä utvecklar funktionerna sålunda:

$$\int_x^{x+\Delta x} f(x)\,dx = y\cdot\Delta x + y'\cdot\frac{\Delta x^2}{2} + y''\cdot\frac{\Delta x^3}{6} + y'''\cdot\frac{\Delta x^4}{24} + \frac{\Delta x^5}{120} f^{IV}(x+\lambda\Delta$$

och

$$4f(x+\tfrac{1}{2}\Delta x) + f(x+\Delta x) =$$

$$5y + 3y'\cdot\Delta x + y''\cdot\Delta x^2 + \frac{1}{4}\cdot y'''\cdot\Delta x^3 + \frac{\Delta x^4}{24}\{f^{IV}(x+\nu\Delta x) + \frac{1}{4}f^{IV}(x+\frac{1}{2}\nu\Delta$$

eller, emedan man i allmänhet kan sätta

$$f^{IV}(x+\nu\Delta x) + \frac{1}{4}f^{IV}(x+\frac{\nu}{2}\Delta x) = \frac{5}{4}f^{IV}(x+\mu\Delta x),$$

$$4f(x+\tfrac{1}{2}\Delta x) + f(x+\Delta x) =$$

$$5y + 3y'\cdot\Delta x + y''\cdot\Delta x^2 + \frac{1}{4}y'''\cdot\Delta x^3 + \frac{5}{96}f^{IV}(x+\mu\Delta x),$$

och vidare begagnar dessa utvecklingar för reduktion af gifna expressionen på $\chi(\Delta x)$. Man får nemligen

$$\chi(\Delta x) = \frac{\Delta x^5}{24}\left\{\frac{1}{5}f^{IV}(x+\lambda\Delta x) - \frac{5}{24}f^{IV}(x+\mu\Delta x)\right\}.$$

8. Enligt det föregående är nu, om vi utbyta Δx mot

$$\int_x^{x+2\Delta x} f(x)\,dx = \frac{\Delta x}{3}\{f(x) + 4f(x+\Delta x) + f(x+2\Delta x)\} + \chi(2$$

och

$$\chi(2\Delta x) = \frac{4}{3}\Delta x^5\left\{\frac{1}{5}f^{IV}(x+2\lambda\Delta x) - \frac{5}{24}f^{IV}(x+2\mu\Delta\right.$$

eller, om vi använda beteckningen

$$y_r = f(x+r\Delta x),$$

i allmänhet

$$\int_{x+2i\Delta x}^{x+2(i+1)\Delta x} f(x)\,dx = \frac{\Delta x}{3}\{y_{2i} + 4y_{2i+1} + y_{2i+2}\} + \chi_i(2\Delta x)$$

h

$$(2\Delta x) = \frac{4}{3}\Delta x^5\left(\frac{1}{5}f^{IV}\{x+2(i+\lambda_i)\Delta x\} - \frac{5}{24}f^{IV}\{x+2(i+\mu_i)\Delta x\}\right)$$

9. Skrifva vi här

$$2n\Delta x = X - x$$

h summera från $i = o$ till $i = n-1$, så erhålla vi

$$\int_x^X f(x)dx = \frac{\Delta x}{3}\sum_{i=o}^{i=n-1}\{y_{2i}+4y_{2i+1}+y_{2i+2}\} + \sum_{i=o}^{i=n-1}\chi_i(2\Delta x),$$

r

$$_i(2\Delta x) = \frac{4}{3}\Delta x^5\cdot\sum_{i=o}^{i=n-1}\left(\frac{1}{5}f^{IV}\{x+2(i+\lambda_i)\Delta x\} - \frac{5}{24}f^{IV}\{x+2(i+\mu_i)\Delta x\}\right)$$

er genom användande af medelvärden

$$\sum_{:o}^{i-1}\chi_i(2\Delta x) = \frac{4n}{3}\Delta x^5\left(\frac{1}{5}f^{IV}\{x+\lambda(X-x)\} - \frac{5}{24}f^{IV}\{x+\mu(X-x)\}\right).$$

Beteckna vi nu med y_s^{IV} det största och med y_m^{IV} det minsta rde, som $f^{IV}(x)$ erhåller för något mellan x och X liggande värde, och vidare för korthetens skull kalla

$$\sum_{i=o}^{i=n-1}\chi_i(2\Delta x) = C,$$

är tydligen

$$\int_x^X f(x)\,dx = \frac{\Delta x}{3}\sum_{i=o}^{i=n-1}\{y_{2i} + 4y_{2i+1} + y_{2i+2}\} + C$$

r

$$\frac{4n}{3}\Delta x^5\left\{\frac{1}{5}y_s^{IV} - \frac{5}{24}y_m^{IV}\right\} > C > \frac{4n}{3}\Delta x^5\left\{\frac{1}{5}y_m^{IV} - \frac{5}{24}y_s^{IV}\right\}.$$

Denna är den bekanta Simpsonska formeln, försedd med inser, inom hvilka complementartermen ligger.

10. Af uttrycket för gränsorna synes, att Simpsonska f
meln ger exact qvadratur, då curvans eqvation har formen

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

hvilken omständighet i allmänhet lägges till grund för dedukt
nen af samma formel. Vidare synes att complementartern
blir exact, om curvan har formen

$$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e,$$

och i detta fall

$$c = -\frac{4n}{15} \Delta x^5 \cdot a.$$

11. Såsom prof på formlerne anföra vi följande exem
Genom vanlig integrering finner man

$$\int_1^2 x^4 dx = 6{,}2.$$

Medelst Simpsonska formeln finner man för $\Delta x = \frac{1}{4}$

$$Q\{x^4\}_{x=1}^{x=2} = 6{,}20052083333\ldots\ldots$$

och

$$c = -0{,}00052083333\ldots,$$

Complementartermen är således, såsom han borde v
exact.

12. Vi öfvergå nu till palarcoordinater och sammanbi
trenne nära hvarandra liggande punkter på en curva

$$\varrho = f(\omega)$$

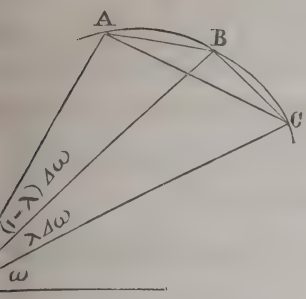
med räta linier, hvarigenom en liten triangel bildas, samt
teckna punkternas vinkelcoordinater med ω, $\omega + \lambda\Delta\omega$ och $\omega +$
(λ ett egentligt bråk) och triangelarean med T_λ. Man erh
såsom uttryck för denna

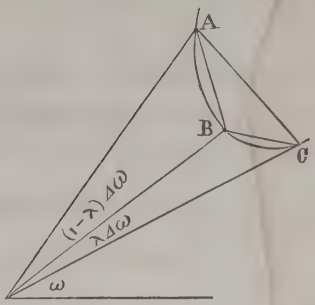
$$T_\lambda = \pm \frac{1}{2} F(\Delta\omega),$$

der

$$F(\Delta\omega) = f(\omega) \cdot f(\omega + \lambda\Delta\omega) \operatorname{Sin} \lambda\Delta\omega + f(\omega + \lambda\Delta\omega) \cdot f(\omega +$$
$$\operatorname{Sin}(1-\lambda)\Delta\omega - f(\omega) \cdot f(\omega + \Delta\omega) \operatorname{Sin} \Delta\omega$$

tecknen respektive motsvara vidstående figurer.





Transformera vi $F(\Delta x)$ sålunda:

$$\Delta x) = f(\omega+\Delta\omega)\ \mathrm{Sin}\,\Delta\omega\,\{f\omega+\lambda\Delta\omega)\ \mathrm{Cos}\,\lambda\Delta\omega - f(\omega)\}$$
$$-f(\omega+\lambda\Delta\omega)\ \mathrm{Sin}\,\lambda\Delta\omega\,\{f(\omega+\Delta\omega)\ \mathrm{Cos}\,\Delta\omega - f(\omega)\}$$

vidare använda formlerna

$$\omega+h)\ \mathrm{Cos}\,h - f(\omega) = h\cdot f'(\omega) + \frac{h^2}{2}\{f''(\omega) - f(\omega)\} + \delta h^2$$

$$f(\omega+h)\ \mathrm{Sin}\,h = h\cdot f(\omega) + h^2 f'(\omega) + \delta_1 h^2$$

δ och δ_1 äro qvantiteter, som försvinna på samma gång h, så erhålla vi lätt

$$= \pm\frac{\lambda(\lambda-1)}{4}\{f(\omega)\cdot f''(\omega) - f^2(\omega) - 2f'^2(\omega)\}\Delta\omega^3 + \varepsilon\Delta\omega^3,$$

ε aftager med $\Delta\omega$.

13. Arean af den krokliniga figuren ABC är

$$S = \pm\frac{1}{2}\varphi(\Delta\omega)$$

$$\varphi(\Delta\omega) = \int_{\omega}^{\omega+\Delta\omega} f^2(\omega)\,d\omega - f(\omega)\cdot f(\omega+\Delta\omega)\ \mathrm{Sin}\,\Delta\omega\cdot$$

Emedan nu

$$\int_{\omega}^{\omega+\Delta\omega} f^2(\omega)\,d\omega = f^2(\omega)\Delta\omega + f(\omega)f'(\omega)\Delta\omega^2 +$$
$$+\{f'^2(\omega)+f(\omega)f''(\omega)\}\frac{\Delta\omega^3}{3} + \delta\cdot\Delta\omega^3$$

och

$$f(\omega+\Delta\omega)\ \mathrm{Sin}\,\Delta\omega = f(\omega)\Delta\omega + f'(\omega)\Delta\omega^2 + \\ + \{3f''(\omega) - f(\omega)\}\frac{\Delta\omega^3}{6} + \delta_1\Delta\omega^3$$

är

$$S = \pm\frac{1}{12}\{2f'^2(\omega) + f^2(\omega) - f(\omega)f''(\omega)\}\Delta\omega^3 + \varepsilon\Delta\omega^3$$

14. Af föregående paragrafer finna vi

$$\mathrm{Lim.}\frac{T_\lambda}{\Delta\omega^3} = \pm\frac{\lambda(1-\lambda)}{4}\{2f'^2(\omega) + f^2(\omega) - f(\omega)\cdot f''(\omega)\}$$

och

$$\mathrm{Lim.}\frac{S}{\Delta\omega^3} = \pm\frac{1}{12}\{2f'^2(\omega) + f^2(\omega) - f(\omega)\cdot f''(\omega)\},$$

då tecknen respektive hafva afseende på första och andra ren, samt, såsom i 4 och 5,

$$\mathrm{Lim.}\frac{T_\lambda}{S} = 3\lambda(1-\lambda)$$

och för $\lambda = \frac{1}{2}$

$$\mathrm{Lim.}\frac{T_{\frac{1}{2}}}{S} = \frac{3}{4}.$$

15. Sätta vi nu approximativt

$$S = \frac{4}{3}T_{\frac{1}{2}},$$

så är

$$\frac{1}{2}\int_\omega^{\omega+\Delta\omega} f^2(\omega)\,d\omega = \frac{1}{2}f(\omega)\cdot f(\omega+\Delta\omega)\ \mathrm{Sin}\,\Delta\omega \pm \frac{4}{3}f_{\frac{1}{2}}$$

eller

$$\frac{1}{2}\int_\omega^{\omega+\Delta\omega} f^2(\omega)\,d\omega = \\ \frac{1}{3}\,\mathrm{Sin.}\frac{\Delta\omega}{2}\left\{2f(\omega)\cdot f\left(\omega+\frac{\Delta\omega}{2}\right) + 2f\left(\omega+\frac{\Delta\omega}{2}\right)f(\omega+\Delta\omega)\right. \\ \left. - f(\omega)\cdot f(\omega+\Delta\omega)\ \mathrm{Cos.}\frac{\Delta\omega}{2}\right\}$$

och för ett utbyte af $\Delta\omega$ mot $2\Delta\omega$

$$\frac{1}{2}\int_{\omega}^{\omega+2\Delta\omega} f^2(\omega)\,d\omega =$$

$$\operatorname{Sin}\Delta\omega\{2f(\omega)\cdot f(\omega+\Delta\omega)+2f(\omega+\Delta\omega)f(\omega+2\Delta\omega)-$$
$$-f(\omega)f(\omega+2\Delta\omega)\operatorname{Cos}\Delta\omega\}$$

Tecknar man nu i allmänhet

$$\varrho_r = f(\omega+r\Delta\omega)$$

kan man skrifva:

$$^{+2(i+1)\Delta\omega}_{(\omega)\,d\omega} = \frac{1}{3}\operatorname{Sin}\Delta\omega\{2(\varrho_{2i}\varrho_{2i+1}+\varrho_{2i+1}\cdot\varrho_{2i+2})-\varrho_{2i}\cdot\varrho_{2i+2}\cdot\operatorname{Cos}\Delta\omega\}$$

$^{i\Delta\omega}$

, om man sätter

$$2n\Delta\omega = \Omega-\omega$$

summerar från $i=0$ till $i=n-1$,

$$^{)}d\omega = \frac{1}{3}\operatorname{Sin}\Delta\omega\cdot\sum_{i=0}^{i=n-1}\{2(\varrho_{2i}\varrho_{2i+1}+\varrho_{2i+1}\cdot\varrho_{2i+2})-\varrho_{2i}\cdot\varrho_{2i+2}\operatorname{Cos}\Delta\omega\},$$

r

$$\frac{1}{2}\int_{\omega}^{\Omega} f^2(\omega)\,d\omega =$$

$$\frac{1}{3}\operatorname{Sin}\Delta\omega\{2(\varrho_0\varrho_1+\varrho_1\varrho_2+\cdots+\varrho_{2n-1}\cdot\varrho_{2n})-$$
$$-\operatorname{Cos}\Delta\omega(\varrho_0\varrho_2+\varrho_2\varrho_4+\cdots+\varrho_{2n-2}\cdot\varrho_{2n})\},$$

formel, som är analog med den Simpsonska.

Det begångna felet kan lätt visas vara proportionelt mot
te digniteten af $\Delta\omega$. Expressionerna på de gränser, mellan
ka det ligger, äro alltför complicerade för att vara till något
n.

16. Användes föregående formel på ett lätt exempel, såsom

$$\varrho = \omega,$$

fås för $n=5$, $\Omega=2$ och $\omega=1$

$$\frac{1}{2}\int_1^2 \omega^2\, d\omega = 1{,}1666350\ldots.$$

Rätta värdet på denna integral är 1,1666666 ..... och begångna felet således mindre än

0,00004.

Användes åter formeln

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\,\Delta\omega\{\varrho_0\varrho_1 + \varrho_1\varrho_2 + \cdots + \varrho_{2n-1}\cdot\varrho_{2n}\},$$

så får man

$$\frac{1}{2}\int_1^2 \omega^2\, d\omega = 1{,}16306027\ldots.,$$

ett resultat, som är felaktigt redan i tredje decimalen.

Om Approximativ Kubatur.

Af H. T. Daug.

[Meddeladt den 14 Juni 1865.]

Såsom tillägg till min i *Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-ademiens Förhandlingar* för år 1860 intagna uppsats *om Simpska formeln* anhåller jag få meddela följande:

Om man för enkelhetens skull använder beteckningarna

$$\frac{d^{r+s}f(x,y)}{dx^r\,dy^s}=f^{r+s}_{x^r y^s}(x,y),$$

$$f^{r+s}_{x^r.y^s}(x,y)=f^{r+s}_{x^r.y^s},$$

blir uttrycket för den lilla volym, som inneslutes mellan planen

$$Z=0,\ X=x,\ X=x+2\delta,\ Y=y,\ Y=y+2\varepsilon$$

den bugtiga ytan

$$Z=f(x,y),$$

$$=\int_y^{y+2\varepsilon} dy \int_x^{x+2\delta} f(x,y)\,dx$$

$$= 4\delta\varepsilon\,.f$$

$$+4\delta\varepsilon^2.f^{\mathrm{I}}_{y}+4\delta^2\varepsilon\,.f^{\mathrm{I}}_{x}$$

$$+\tfrac{8}{3}\delta\varepsilon^3.f^{\mathrm{II}}_{y^2}+4\delta^2\varepsilon^2.f^{\mathrm{II}}_{xy}+\tfrac{8}{3}\delta^3\varepsilon\,.f^{\mathrm{II}}_{x^2}$$

$$+\tfrac{4}{3}\delta\varepsilon^4.f^{\mathrm{III}}_{y^3}+\tfrac{8}{3}\delta^2\varepsilon^3.f^{\mathrm{III}}_{xy^2}+\tfrac{8}{3}\delta^3\varepsilon^2.f^{\mathrm{III}}_{x^2y}+\tfrac{4}{3}\delta^4\varepsilon.f^{\mathrm{I}}_{x^3}$$

$$+\tfrac{8}{15}\delta^5\varepsilon.f^{\mathrm{IV}}_{y^4}\{x,y+2\mu\varepsilon\}+\tfrac{4}{3}\delta^2\varepsilon^4.f^{\mathrm{IV}}_{xy^3}\{x,y+2\mu_1\varepsilon\}$$

$$+\tfrac{16}{9}\delta^3\varepsilon^3 f^{\mathrm{IV}}_{x^2y^2}\{x,y+2\mu_2\varepsilon\}$$

$$+\tfrac{4}{3}\delta^4\varepsilon^2 f^{\mathrm{IV}}_{x^3y}\{x,y+2\mu_3\varepsilon\}+\tfrac{8}{15}\delta^5\varepsilon.f^{\mathrm{IV}}_{x^4}\{x+2\lambda\delta,y+2\mu_4\varepsilon\},$$

naturligtvis under förutsättning att derivatorna, till och med af fjerde ordningen, äro ändliga och kontinuerliga. Samtlige och μ, liksom i det följande σ, beteckna qvantiteter, hvill gränser äro 0 och 1.

Vidare är, om man utvecklar

$$\Delta V_1 = \frac{\delta\varepsilon}{3}\{f(x,y) + f(x,y+2\varepsilon) + 8f(x+\delta,y+\varepsilon) + f(x+2\delta$$
$$+ f(x+2\delta,y+2\varepsilon\} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

i serie,

$$\begin{aligned}\Delta V_1 = {} & 4\delta\varepsilon . f \\ & + 4\delta\varepsilon^2 . f'_y + 4\delta^2\varepsilon . f'_x \\ & + \tfrac{8}{3}\delta\varepsilon^3 . f''_{y^2} + 4\delta^2\varepsilon^2 . f''_{xy} + \tfrac{8}{3}\delta^3\varepsilon . f''_{x^2} \\ & + \tfrac{4}{3}\delta\varepsilon^4 . f'''_{y^3} + \tfrac{8}{3}\delta^2\varepsilon^3 . f'''_{xy^2} + \tfrac{8}{3}\delta^3\varepsilon^2 . f'''_{x^2y} + \tfrac{4}{3}\delta^4\varepsilon f'''_{x^3} \\ & + \tfrac{5}{9}\delta\varepsilon^5 f^{IV}_{y^4}\{x,y+2\sigma\varepsilon\} + \tfrac{4}{3}\delta^2\varepsilon^4 f^{IV}_{xy^3}\{x,y+2\sigma_1\varepsilon\} \\ & + 2\delta^3\varepsilon^3 f^{IV}_{x^2y^2}\{x,y+2\sigma_2\varepsilon\} \\ & + \tfrac{4}{3}\delta^4\varepsilon^2 f^{IV}_{x^3y}\{x,y+2\sigma_3\varepsilon\} + \tfrac{5}{9}\delta^5\varepsilon f^{IV}_{x^4}\{x+2\lambda_1\delta,y+2\sigma_4\varepsilon\}.\end{aligned}$$

Jemföras utvecklingarne af ΔV och ΔV_1, så finner man

$$\begin{aligned}\Delta V_1 - \Delta V = {} & \delta\varepsilon^5\{\tfrac{5}{9}f^{IV}_{y^4}\{x,y+2\sigma\varepsilon\} - \tfrac{8}{15}f^{IV}_{y^4}\{x,y+2\mu\varepsilon\} \\ & + \tfrac{4}{3}\delta^2\varepsilon^4\{f^{IV}_{xy^3}\{x,y+2\sigma_1\varepsilon\} - f^{IV}_{xy^3}\{x,y+2\mu_1\varepsilon\} \\ & + \delta^3\varepsilon^3\{2f^{IV}_{x^2y^2}\{x,y+2\sigma_2\varepsilon\} - \tfrac{16}{9}f^{IV}_{x^2y^2}\{x,y+2\mu_2\varepsilon\}\} \\ & + \tfrac{4}{3}\delta^4\varepsilon^2\{f^{IV}_{x^3y}\{x,y+2\sigma_3\varepsilon\} - f^{IV}_{x^3y}\{x,y+2\mu_3\varepsilon\} \\ & + \delta^5\varepsilon\{\tfrac{5}{9}f^{IV}_{x^4}\{x+2\lambda_1\delta,y+2\sigma_4\varepsilon\} \\ & - \tfrac{8}{15}f^{IV}_{x^4}\{x+2\lambda\delta,y+2\mu_4\varepsilon\}.\end{aligned}$$

Denna differens visar, att

$$\Delta V_1 = \Delta V,$$

ofta Z är af formen

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fxy + Gy^2 + Hx + Ky + L, \quad (3)$$

att man således i detta fall får exakt

$$\int_y^{y_1} dy \int_x^{x_1} f(x,y)\, dx$$

$$\cdot \frac{x_1 - x}{2} \cdot \frac{y_1 - y}{2} \left\{ f(x,y) + f(x,y_1) + 8f\left(\frac{x+x_1}{2}, \frac{y+y_1}{2}\right) \right.$$
$$\left. + f(x_1,y) + f(x_1,y_1) \right\}.$$

Vidare visar den, att

$$\Delta V_1 = \Delta V + \tfrac{8}{15} A \,.\, \delta^5\varepsilon + \tfrac{8}{9} C\delta^3\varepsilon^3 + \tfrac{8}{15} E \,.\, \delta\varepsilon^5,$$

Z har formen

$$Ax^4 + Bx^3y + Cx^2y^2 + Dxy^3 + Ey^4 + Fx^3 + Gx^2y + Hxy^2 + Ky^3$$
$$+ Lx^2 + Mxy + Ny^2 + Px + Qy + R,$$

att i detta fall

$$\int_y^{y_1} dy \int_x^{x_1} f(x,y)\, dx$$

$$= \frac{1}{3} \frac{x_1 - x}{2} \cdot \frac{y_1 - y}{2} \left\{ f(x,y) + f(x,y_1) + 8f\left(\frac{x+x_1}{2}, \frac{y+y_1}{2}\right) \right.$$
$$\left. + f(x_1,y) + f(x_1,y_1) \right\} - \frac{1}{120} \cdot A \cdot (x_1 - x)^5 (y_1 - y)$$
$$- \frac{1}{72} C(x_1 - x)^3 (y_1 - y)^3 - \frac{1}{120} E(x_1 - x)(y_1 - y)^5.$$

ej nog härmed, den lär oss äfven, att vi vid approximativ
ning af en gifven volym V, som begränsas af ytan

$$Z = f(x,y) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

planen

$$X = x, \quad X = x_1, \quad Y = y \text{ och } Y = y_1,$$

a på följande sätt göra bruk af formeln (1). Genom de 5
er af den begränsade ytan, hvilkas koordinater äro

$$\begin{cases} x \\ y+2\varepsilon \\ f(x,y+2\varepsilon) \end{cases} \quad \begin{cases} x+\delta \\ y+\varepsilon \\ f(x+\delta,y+\varepsilon) \end{cases} \quad \begin{cases} x+2\delta \\ y \\ f(x+2\delta,y) \end{cases} \quad \begin{cases} x+2\delta \\ y+2\varepsilon \\ f(x+2\delta,y+2\varepsilon) \end{cases}$$

kan naturligtvis alltid läggas någon yta, hvars eqvation å formen (3). Emedan så förhåller sig, utbyter man det ele af ytan (4), som inneslutes mellan planen

$$X = x,\ X = x + 2\delta,\ Y = y \text{ och } Y = y + 2\varepsilon,$$

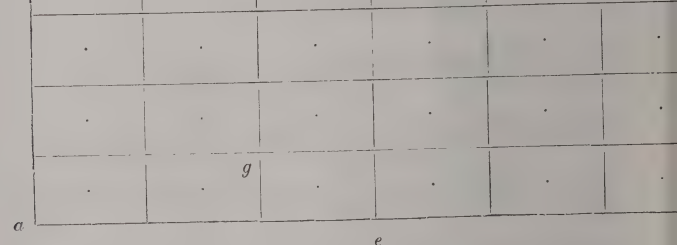
mot ett motsvarande element af en yta, hvars eqvation har nämnda form. På samma sätt förfar man med alla öfriga menter af ytan (4). Derigenom erhåller man en ny volyn som kan exakt beräknas genom ett upprepadt användan formeln (1) och blifver

$$V_1 = \Sigma_y \Sigma_x \Delta V_1.$$

Naturligtvis kan denna volym i allmänhet fås att obetydlig ferera från den gifna, endast δ och ε göras tillräckligt hvadan man också kan approximativt beräkna V ur

$$V = \Sigma_y \Sigma_x \Delta V_1. \quad \ldots\ldots\ldots$$

Denna formel, som innehåller en summa af summor, ka som vi här skola visa, skrifvas under en ganska enkel for



Låt i ofvanstående figur den stora rektangeln *abcd* va till det gifna solidum och hvarje liten rektangel bas ti element ΔV_1. Då är först och främst tydligt, att i form ingå endast sådane z, som beteckna storleken af vertikaler, stå i de små rektanglarnas hörn och medelpunkter. Vidar lätt, att en vertikal linie, som står i någon rektangels hör kan alltefter sin belägenhet tillhöra ett, två eller fyra el af den solida figuren. Så t. ex. tillhör den vertikal, som punkten *a*, endast ett, vertikalen i *e* tvenne, och vertika

en gång fyra elementer. Betecknas nu, då så förhåller sig, respective summorna af vertikaler, hvilka förekomma såsom ıter i ett, två eller fyra elementer, med S_1, S_2 och S_4, och are med S_8 summan af alla de vertikaler, som stå i rekt-ılarnes medelpunkter, samt slutligen hvarje rektangels längd d 2δ och bredd med 2ε, så kunna vi skrifva approximations-neln (5) sålunda:

$$V = \frac{\delta \cdot \varepsilon}{3} \{1 . S_1 + 2 . S_2 + 4 . S_4 + 8 . S_8\}.$$

Beträffande såväl deduktionssätt som form, är denna formels ıet med den Simpsonska i ögonen fallande.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

(Forts. från sid. 414

Från K. Nederländska Regeringen.

Geologische kaart van Nederland, Bl. 3, 4, 8, 11, 17.

Från R. Geographical Society i London.

Proceedings, Vol. **8**: 5. **9**: 1, 2.

Från Geological Society i London.

Journal, N:o 82.

Från Chemical Society i London.

Journal, 1864: 10—12.

Från Meteorological Society i London.

Proceedings, N:o 16, 18.

Från Royal Society i Dublin.

Journal, N:o 31.

Från Société Géologique i Paris.

Bulletin, T. **21**: 24—28. **22**: 1—7.

Från Société Philomatique i Paris.

Bulletin, T. **2**: 1, 2.

Från Société Linnéenne de Normandie i Caen.

Mémoires, Vol. 14.
Bulletin, Vol. 9.

Från Académie Imp. des Sciences i Dijon.

Mémoires. 2:e Sér. T. 11.

Från Observatorium i Athen.

Publications. Série 1. T. 1. **1. 2**: 1, 2.

(Forts. å sid. 43

CURIOSITÉS MATHÉMATIQUES.

LA GRAPHIE BONIFIÉE

SUIVIE DU

Calcul de la Prédiction approchée des Éclipses

MÉTHODE DE M. DE LA HIRE

RAMENÉE A NOS JOURS, SIMPLIFIÉE ET A LA PORTÉE DE TOUS CEUX QUI SAVENT FAIRE UNE MULTIPLICATION ET UNE DIVISION

Par M. DAUMARÈS

Ex-Répétiteur de Mathématiques et de Tenue des Livres en Partie double
Près BEAULIEU (Corrèze).

PRIX : 1 Fr. 50.

Avec une Planche, ou Feuille volante, contenant 9 Figures procurant 36 Exercices, destinés à l'Elève pour former sa main

Et où nous faisons voir que le Praticien n'a que faire de la Quadrature du Cercle à toute rigueur.

LIMOGES

IMPRIMERIE H. DUCOURTIEUX ET Cie, RUE CROIX-NEUVE

1860

SOMMAIRE.

Specimen de notre Lacune géométrique ou notre Étude sur le Cercle. La Graphie bonifiée et appliquée aux constructions graphiques approchées permettant de quarrer pratiquement l'hexagone, le cercle, la cycloïde, et enfin l'ellipse, et cela excessivement mieux qu'il n'est possible de quarrer le rectangle, et surtout un rectangle fort allongé; le praticien a donc réellement la quadrature polygonale ou la quadrature du cercle; comme aussi nous faisons voir qu'une construction parfaite et sans réduction ne revient pas au praticien, tandis qu'une construction imparfaite avec réduction, et dont la limite est excessivement reculée, est ce qui lui convient, vu que la Graphie ou le dessin purement géométrique a sa limite comme toute autre chose. Donc le praticien a la quadrature pratique du cercle. (Voir art. 30.)

Nous apprenons l'art, dans bien des cas, de ne jamais faire une erreur plus grande que la tolérance graphique accordée, toujours égale à la huitième partie d'un millimètre, et en employant telle échelle que ce soit. Quant à nos descriptions graphiques, elles ne laissent rien à désirer, aussi sont-elles à la portée de tout le monde.

Nous engageons beaucoup le lecteur, et dans son intérêt, à ne pas chercher numériquement la quadrature du cercle parce que c'est une folie. Paulian dit à ce sujet : « *C'est un problème possible en lui-même, et impossible par rapport à nous.* » L'entreprendre c'est vouloir s'égarer gratuitement dans de vaines et décevantes recherches; qu'il se procure, s'il veut, des constructions graphiques approchées avec réduction, mais en se basant toujours sur π trouvé par nos distingués et illustres géomètres. Quand on s'appuie sur les jalons plantés, dans le vaste domaine de la science, par la pansophie, on ne chute jamais; mais, quand on les déserte, on se falaise toujours!...

Nous terminerons cet article par des problèmes d'application sur le terrain fort piquants, pour démontrer à nouveau s'il est vrai que la géométrie soit une science boiteuse. On laisse de côté la mécanique et on veut réussir! Un oiseau n'ayant qu'une aile ne vole plus.

Nous nommons la recherche des constructions graphiques approchées avec le secours des lignes du cercle, *le casse-tête géométrique*, ou ancienne méthode, et la même recherche en se servant du rapporteur, *le petit casse-tête trigonométrique*, ou nouvelle méthode; ces dernières constructions sont de beaucoup à préférer. Nous ne nous flattons pas d'avoir tout trouvé; on peut faire mieux encore. Que faut-il pour cela? une rencontre heureuse ou une bonne inspiration et pas davantage; donc, etc.

Nous donnons aussi un autre specimen pour la prédiction des éclipses, méthode de M. de La Hire, bonifiée et ramenée à nos jours, que nous avons appliquée à trois éclipses, et à la fameuse éclipse totale de soleil du 30 septembre 610, qui a mis fin à la bataille entre les Mèdes et les Lydiens, etc., méthode à la portée de l'élève. La graphie joue un bien beau rôle pour ce cas piquant : une année quelconque étant donnée, trouver toutes les éclipses qui lui reviennent, et avec la force de chacune d'elles, ou encore sans en omettre une seule.

Dans notre ouvrage, et à la suite d'un piquant tableau de cosmographie, nous donnons la démonstration de la double motion de la terre autour du soleil, et où nous faisons voir que ce sont les phases de la lune qui ont servi de base au fameux Babylonien, pour trouver si heureusement la marche de notre monde planétaire; effectivement, le rapport de la distance de la lune à nous et de nous au soleil est environ comme 1 est à 400; mécaniquement, nous démontrons que le soleil ne peut tourner autour de la terre sans tourner de même autour de la lune, ces deux derniers corps étant situés au centre du cercle que paraît décrire chaque jour le soleil. Par exemple, prenons le jour de la pleine lune : tout le monde a déjà remarqué, ce jour-là, que la lune se lève quand le soleil se couche, et qu'elle se couche quand le soleil se lève. Or comment veut-on que le soleil, ce même jour, vienne à tourner autour de la lune, puisque ces deux corps sont diamétralement opposés (une éclipse de lune en est la preuve); conséquemment, puisque le soleil ne tourne pas autour de la lune lorsqu'elle est pleine, donc il ne saurait tourner autour de la terre, vu qu'il ne peut tourner autour de l'un de ces deux corps sans tourner autour de l'autre; donc, etc. Nous avons six démonstrations pour une, et pas une seule n'a pu tourner en faveur du prétendu système de Ptolémée. Elles sont à la portée de tout le monde, à l'exception de la dernière; cependant nous la croyons plus accessible que le pendule et le gyroscope de M. Foucault, etc.

Comme nous ne donnons qu'un specimen, pour éviter d'essuyer une trop grande perte en cas de non réussite, nous nous trouvons donc forcé de tomber dans un laconisme qui nous est fort nuisible; cependant ce que nous donnons à notre lecteur peut lui permettre d'apprécier au juste ce que peut être notre ouvrage; d'ailleurs le dernier positif est à la portée de tout le monde de nos jours, et le cachet du mérite, s'il existe, ne peut lui échapper; c'est la seule recommandation, pour le moment, que nous ayons à lui offrir; à lui de nous lire et ensuite de nous juger. C'est en faveur de l'élève et du praticien que nous écrivons, afin de leur rendre plus accessibles les questions les plus ardues des mathématiques, etc.

Le signe ≂ signifie : *divisé par.*

LA GRAPHIE BONIFIÉE

ET

APPLIQUÉE AUX CONSTRUCTIONS GRAPHIQUES

EXCESSIVEMENT APPROCHÉES

ANCIENNE & NOUVELLE MÉTHODE

DONNANT LA RECTIFICATION EN TOTALITÉ OU EN PARTIE DE LA CIRCONFÉRENCE

ET LA

QUADRATURE PRATIQUE DU CERCLE

D'UNE MANIÈRE ARCHI-SUPÉRIEURE A TOUS LES BESOINS HUMAINS.

1. Articles préliminaires. — Réduction signifie que la construction possède la propriété remarquable de réduire l'erreur graphique, qui nous est inhérente à la moitié, au tiers, au quart, au cinquième, etc. C'est en examinant mécaniquement nos constructions que nous avons découvert que celles qui ont une réduction sont de beaucoup préférables aux anciennes constructions graphiques ;

Que l'on peut quarrer excessivement mieux le cercle que le rectangle, et surtout certains rectangles, comme l'enseignent les auteurs de géométrie, en nous offrant trois méthodes parfaites pour cela faire.

Nous avons trouvé l'art de ne pas faire une erreur en graphie, supérieure aux tolérances accordées, c'est-à-dire à l'échelle de 1 à 2,000, ci : 0^m 25 et 0^m 31, à l'échelle du cadastre. Selon Duhousset, *Topographie régulière,* on ne doit pas faire une erreur en graphie plus grande que la huitième partie d'un millimètre, tant sur la simple ligne que sur une ligne double, triple, décuple, etc.

Ce n'est que sous le point de vue pratique seulement que nous allons examiner la quadrature du cercle ; la quadrature à toute rigueur n'étant pas connue, numériquement voici comment nous la possédons :

2. *Tableau des Rapports approchés de π, que l'on emploie en bonne pratique, et selon la précision que l'on veut obtenir dans les résultats définitifs :*

Le rayon étant 1,		ou a la circonférence à		et le côté du carré équivalent à	
1er »	$\pi = 3.14$..... »	$\frac{1}{1,974e}$	près< »	$\frac{1}{3,942e}$	près< »
2e »	7 à 22..... »	$\frac{1}{2,486e}$	près> »	$\frac{1}{4,972e}$	près> »
3e »	106 à 333..... »	$\frac{1}{37,749e}$	près< »	$\frac{1}{75,498e}$	près< »
4e »	$\pi = 3.1416$..... »	$\frac{1}{427,637e}$	près> »	$\frac{1}{855,274e}$	près> »
5e »	$\pi = 3.14159$..... »	$\frac{1}{1,184,000e}$	près< »	$\frac{1}{2,368,000e}$	près< »
6e »	113 à 355..... »	$\frac{1}{11,776,622e}$	près< »	$\frac{1}{23,553,244e}$	près> »
7e »	$\pi = 3.14159,265$. »	$\frac{1}{875,000,000e}$	près> »	$\frac{1}{1,750,000,000e}$	près< »
8e »	π 3.14159,26535,9. »	$\frac{1}{15 \text{ trillionièmes.}}$	près< »	$\frac{1}{30 \text{ trillionièmes.}}$	près> »

Donc le praticien n'a rien à désirer ni à souhaiter; donc ne confondons pas la quadrature théorique et la quadrature pratique du cercle. (Voir article 4.)

3. Quand nous dirons tirer exactement une ligne (3), cela signifiera d'employer la règle et le calquoir, et de recourir au présent article. Tout le travail doit se faire au crayon; ce dernier doit être très dur et taillé très pointu. On ne tire les lignes à l'encre qu'après avoir entièrement fini, et pas avant : au crayon, on peut se reprendre, mais pas à l'encre; donc, etc.

Tirez une ligne indéfinie au bas d'un morceau de papier un peu épais et très résistant, ayant environ 18 à 20 centimètres de large sur 23 à 25 de long, fort commode, parce qu'on peut le tourner comme on veut; on le posera sur un morceau de carton très uni, ce sera votre croquis; sur un autre morceau de papier vous construirez votre figure au net. Le rayon R d'un cercle étant donné, triplez sa valeur, prenez avec le grand compas cette dernière valeur à l'échelle, et portez-la au bas de votre croquis, sur la ligne déjà tirée; avec un autre compas prenez à l'échelle la valeur du rayon et portez-la trois fois sur la ligne triplée; cette ouverture sera bonne si vous tombez juste à l'autre bout, autrement il faut obtenir ce résultat par des essais successifs; cette ouverture obtenue, tournez la vis à droite afin que le moindre accident ne puisse ni l'ouvrir, ni le fermer, vérifiez de nouveau cette même ouverture sur la ligne relatée ci-dessus, et, si vous avez juste, ce sera votre rayon et votre compas de réserve, l'erreur étant réduite environ au tiers. Si vous veniez à quadrupler ou quintupler votre rayon, l'erreur serait encore plus petite, vu qu'à l'échelle on fait environ la même erreur tant sur la ligne simple que sur la ligne

triple, quadruple, quintuple, etc. Rappelons-nous bien qu'une erreur commise sur le rayon devient double pour le diamètre, et trois plus un septième pour la circonférence, ou, en somme, plus de six fois plus grande ; donc, par cet artifice, nous rendons la première erreur bien plus petite, *c q f s t.*

Au milieu de votre croquis tirez une ligne indéfinie avec le calquoir, marquez le point C (pas de miniature en graphie si l'on tient à bien opérer); le rayon doit avoir environ 100 mètres : on me donne un rayon de 35 mètres et un autre de 72 ; je triple le premier, j'ai 105 mètres ; je prends l'échelle de 1 à 2,000, je double le second, j'ai 144 mètres ; je prends l'échelle du cadastre ; il ne faut pas dépasser 150 mètres. Je dis qu'on aura trois fois plus de chance de réussite dans le premier cas et deux fois seulement dans le second, bien entendu qu'il faudra tripler ces deux rayons, comme nous venons de le dire dans le précédent alinéa ; donc, etc. Poursuivons : prenez votre compas de réserve du centre C, décrivez un petit arc en A et en B, à l'œil, marquez avec le calquoir le point A avec soin sur le petit arc surtout, puis prenez votre équerre, qui peut vous servir de règle, et placez-la très près des points A et C, de manière à toucher exactement votre calquoir pour chacun de ces deux points ; le tenant dans la même position, coupez le petit arc vers B, marquez avec soin le point d'intersection, ce sera le point B réclamé ; donc les trois points A, C et B seront exactement situés sur le même axe. Prenez votre compas avec le porte-crayon des points A et B, et, au-dessus des points D et E, décrivez de petits arcs de cercle (sans trop appuyer la branche en A et en B), marquez avec le calquoir les deux points d'intersection, placez votre règle près de ces deux points et à toucher votre calquoir comme dessus, tirez deux traits visibles avec ce dernier environ vers D et E, prenez votre compas de réserve, coupez-les par deux petits arcs, prenez un autre compas, placez une branche en B et l'autre sur le point d'intersection, mais n'appuyez pas ; portez l'autre branche en A et voyez si vous tombez juste ; dans le cas contraire, par des essais successifs, il faudra obtenir ce résultat en vous réglant sur le petit arc fait avec le rayon ; même chose absolument dans la partie inférieure ; en un mot c'est l'inscription du carré au cercle qu'il faut exécuter aussi exactement que possible ; ainsi les quatre lignes BD, DA, AE et EB doivent être exactement égales ; même chose pour les quatre rayons CA, CD, CB et CE ; c'est un peu délicat, mais pratique rend maître. Ce premier travail étant bien fait, nous répondons du reste. Les quatre points A, D, B et E et le compas de réserve, par de petits arcs, fourniront le carré circonscrit. (Voir fig. 7.)

4. Notre étude sur les constructions graphiques approchées nous a

donné pour résultat définitif ce que nous allons démontrer : que le praticien a réellement la quadrature pratique du cercle, et qu'il peut quarrer avec dix fois, trente fois, etc. plus de précision le cercle que le rectangle, et surtout un rectangle allongé. Le praticien ne connaît que sa chaîne, son graphomètre, les petites tables de logarithmes, son compas, sa règle, son alidade, son échelle, etc.; pour lui pas de lignes ni d'angles incommensurables, c'est-à-dire rien d'indéterminé : sa plus petite mesure sur le terrain est cinq centimètres; par ce seul fait l'incommensurabilité a disparu et n'existe plus. Il faut de plus lui accorder une tolérance graphique; sur le mesurage des lignes, dans le cadastre, $\frac{1}{500^e}$ lui est accordé en plus comme en moins. En pratique il faut combattre et vaincre tous les obstacles qui peuvent se présenter; en théorie jamais d'obstacles, quelle différence? Preuve à l'appui :

5. Une construction parfaite quelconque convient-elle au praticien?

Le vrai dynamomètre graphique (qu'on nous passe l'expression), ou l'inscription de l'hexagone au cercle (fig. 1re). Prenez le compas et le porte-crayon, décrivez une circonférence d'un rayon arbitraire, tirez le diamètre AB et portez sur sa circonférence le petit arc suivant : prenez avec votre plus petit compas trois mètres à l'échelle de 1 à 2,000, portez-les sur la circonférence, vous aurez l'arc 1, 2, puis, avec le calquoir et à vue, marquez un point au milieu; vous répéterez ce petit arc à d'autres endroits de la circonférence, parce que les premiers points marqués peuvent faire manquer l'opération. Relevez le rayon de votre cercle avec soin, puis, à partir de *n*, portez-le six fois sur la circonférence de votre cercle; voyez, la sixième fois, où tombera votre pointe de compas; je dis que, si vous avez bien opéré, elle sera logée dans le petit arc 1, 2; dans le cas contraire elle tombera au-dessus ou au-dessous. Démonstration : le petit arc vaut 3 mètres, tant pour un petit rayon que pour un grand, parce que $0^m\ 25$ (tolérance article 1er) $\times$ 6 fois le rayon porté sur la circonférence, $= 1^m\ 50$ en plus et autant en moins, font les trois mètres en question. Or si vous n'atteignez pas l'arc ou si vous le dépassez, l'erreur faite sur le rayon sera plus grande que la tolérance accordée, ce qui est du dernier évident. Ainsi, en géométrie, la construction la plus simple est sans contredit l'inscription de l'hexagone au cercle; et pourquoi, en pratique, est-elle si difficile?

Le huitième d'un millimètre à l'échelle de 1 à 2,000 vaut $0^m\ 25$; si, graphiquement, une telle quantité peut échapper à notre vue, donc, à plus forte raison, $0^m\ 10$; mais $0^m\ 10 \times 6 = 0^m\ 60$, parce qu'il y a amplification. Peut-on apprécier une quantité qui peut se loger dans l'angle limite de notre vue bornée? Pouvons-nous voir les lunes de Jupiter? Donc tout ce

que nous pouvons faire c'est de relever artistement les lignes, mais jamais parfaitement; notre vue est très bornée en graphie, nous ne pouvons obtenir que trois chiffres de certains et pas au-delà. Donc l'inscription de l'hexagone au cercle est excessivement au-dessus de notre vue et de notre exécution bornées; sur dix fois on pourra peut-être réussir une, que dire d'une construction compliquée? *c q f p* et *d*.

5 *bis*. En graphie il existe trois erreurs dont nous ne pouvons nous contregarder, savoir : 1° erreur de construction; 2° erreur du relevé des lignes, et 3° erreur de lecture à l'échelle; or, si elles sont faites toutes les trois en plus ou en moins, l'erreur peut même dépasser $0^{m}\ 50$; donc ce sont ces trois erreurs-là que nous avons vaincues avec le secours de nos constructions mixtes approchées, ancienne méthode, en prenant les lignes du cercle, et, nouvelle méthode, en se servant du rapporteur. Il faut se procurer de bonnes échelles; on en vend de très fausses (avis). Nos préliminaires achevés, entrons en matière :

6. Dans les *Leçons nouvelles sur la Géométrie*, par M. Amiot, pag. 152, 10e problème graphique, on trouve la construction suivante : Les deux diamètres sont menés à angles droits exactement (3). Portez le compas de réserve de A en F et de B en G en décrivant deux petits arcs de cercle; du centre C, avec le même, coupez-les, marquez les points d'intersection, vous aurez les points F et G; avec un autre compas prenez avec soin la moitié des cordes AF et BG, vous aurez les deux points *e* et *e'*; tirez exactement (3) les deux sécantes D*d* et D*d'*, du centre C, avec le compas de réserve; coupez ces deux sécantes qui passent exactement sur les points *e e'*, marquez avec le calquoir les points d'intersection avec soin, les deux points *d* et *d'* seront obtenus avec précision; tirez la corde *d d'* exactement (3), marquez le point d'intersection I, finalement D*d* ou D*d'* sera égale au côté du carré équivalent au cercle donné à $\frac{1}{3,900e}$ près $<$, et DI, en vertu de la seconde méthode de quarrer le rectangle (voir article 21) est égal au quart de la circonférence à $\frac{1}{1,950e}$ près $<$, la réduction étant égale au quart; en prenant la moitié de AF l'erreur graphique se réduit à la moitié pour le point *e;* cette même erreur se réduit de nouveau à la moitié pour la corde D*d*, ce que le calcul démontre : on a $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; donc, etc. La description mécanique ci-dessus nous appartient; l'auteur la donne par écrit mais sans figure. Voici les constructions graphiques approchées que nous donnons à notre lecteur, en lui signalant celles qui ne sont pas de nous :

Seconde Construction graphique approchée, donnant le côté du carré équivalent au cercle donné à $\frac{1}{7,200^e}$ près >, l'erreur graphique étant réduite à la dixième partie.

Prenez avec soin la moitié du rayon, vous aurez le point *c*; relevez de même DB ou AD et portez-le de C en H en coupant par un petit arc AB prolongé, marquez exactement (3) le point H, tirez la sécante HE exactement (3), je dis que vous rencontrerez infailliblement le point *d* déjà obtenu, et vous aurez là un moyen de contrôle. Remarquez bien qu'une erreur faite sur CH ne vaut plus que la cinquième partie pour la corde D*d*.

Troisième Construction graphique approchée, donnant le quart de la circonférence numériquement à $\frac{1}{6,900^e}$ près >, et le côté du carré équivalent au cercle donné à $\frac{1}{13,800^e}$ près >, la réduction étant égale à la neuvième partie.

Tirez DB, avec le compas prenez-en la moitié avec soin, vous aurez le point a; prenez de même le tiers de D*a* ou de *a*B et portez-le de A en *b* et de B en *b'* par de petits arcs; prenez le compas de réserve du centre C, coupez ces deux petits arcs, avec le calquoir marquez avec soin les points d'intersection, vous aurez les points *b* et *b'*; tirez les cordes D*b* et D*b'*, chacune d'elles sera égale au quart de la circonférence (voir plus haut). Du point D voyez si la corde D*b* est égale à l'autre, rabattez-là en I, vous rencontrerez immanquablement le point I déjà trouvé; ainsi DI est égal à l'arc de cercle D*g*A.

Quatrième Construction graphique excessivement approchée, donnant le côté du carré équivalent au cercle donné à $\frac{1}{545,000^e}$ près >, la réduction étant égale à la neuvième partie.

Portez le rayon du cercle de A en *g* en décrivant un petit arc; avec le même, du centre C, coupez-le, marquez le point d'intersection avec soin, vous aurez le point *g* réclamé; avec le calquoir coupez exactement (3) le rayon AC selon *g*E et AB, marquez le point d'intersection, ce sera le point *h* réclamé, et *h*C sera la tangente de l'angle de 15°; prenez avec soin la moitié du rayon AC vous aurez le point *c;* prenez la moitié de *h*C et portez-la de *c* en *f;* prenez le tiers de *f*B, plus le tiers de ce tiers, ce sera le neuvième que vous porterez de B en *i* et en *j;* tirez exactement (3) *i*E et *j*D; finalement marquez le point d'intersection, ce sera le point J, et AJ sera égal au côté du carré équivalent. (Voir plus haut.)

7. *Étude mécanique de la Construction donnée par M. Amiot* (art. 6).

C'est la seconde construction que nous ayons rencontrée qui jouisse de cette piquante propriété de réduire l'erreur graphique au quart; c'est

ommage que son degré d'approximation ne soit pas plus élevé; on peut pendant l'appliquer au cercle de 600 mètres de diamètre et à l'échelle 1 à 2,000. Numériquement voici ce qui se passe :

L'erreur inhérente à cette construction, sur le côté du carré équivant au cercle de 600 mètres de diamètre (a) est égale à 0^m 136, plus rreur graphique supposée égale à 0^m 40 $\backsimeq$ 4 = 0^m 10 = 0^m 236, et lérance graphique accordée égale à 0^m 25 — 0^m 236 = 0^m 014; donc tte construction peut s'appliquer au cercle précité, et, à plus forte rain, à des cercles de deux ou trois cents mètres de diamètre, et comme ns la pratique des arts de tels cercles ne se rencontrent pas, et vu sa mplicité et sa solidité, nous la préférons de beaucoup à celle qui se ouve consignée dans les *Récréations mathématiques*, par M. Ozanam, dont pproximation s'élève à $\frac{1}{126,600^e}$ près >; comme elle est sans réduction us ne la donnons pas ici.

Il va sans dire que les seconde et troisième construction (6) pourraient ppliquer à de bien plus grands cercles, parce que l'approximation et réduction sont bien supérieures à celles de la première construction, nt nous venons de faire l'étude.

Étude de la quatrième Construction. (Art. 6.)

L'erreur inhérente à cette construction, sur le côté du carré (103,245^m), équivalent au cercle de 116,500^m de diamètre, est égale à. .	0^m 19
Erreur graphique supposée égale à 0^m 50 $\backsimeq$ 9 = ...	0 055
Erreur environ égale à la tolérance accordée article 1.	0^m 245

La limite de cette construction peut s'étendre à un cercle de 29 petites ues ou de 4,000 mètres.

8. En raison de ce que nous venons de présenter, les lignes AJ, DI, D*b* D*d* sont donc quatre lignes fort exactement déterminées; et si à l'éelle on trouve une erreur grossière, pas moyen de l'imputer à ces consctions, puisqu'on peut les employer réciproquement comme preuves, is bien à notre vue bornée, et à l'échelle si on veut se servir de la rai- logique. En apparence on a beaucoup, et en réalité on n'a rien; donc s constructions mixtes approchées sont de beaucoup à préférer, ce que is ferons voir dans un moment.

es constructions graphiques approchées, de recette, peuvent donc rem-

---

a) Voir art. 31, Tableau des Formules 1, 77245 × R = 300 = 531^m 735 pour le du carré équivalent au cercle de 600^m de diamètre. Et 531,735 $\backsimeq$ 3,900 (l'apximation de la construction) = 0^m 136, comme dessus; donc, etc.

placer aussi avantageusement la construction parfaite qui nous manq que le calcul logarithmique peut remplacer, dans bien des cas, le cal ordinaire; malgré la petite erreur qui existe toujours dans le dern chiffre, les résultats n'en sont pas moins bien accueillis; donc le pratic a la quadrature pratique du cercle.

9. Nos opérations graphiques sont donc fort piquantes; elles ne peuv qu'éclairer la masse des lecteurs, qui s'imagine que parce que nous n vons pas la quadrature du cercle à toute rigueur [voir l'examen ci-des de la quatrième construction (6)]; il n'est pas possible de quarrer le c cle même pratiquement, et bien des auteurs, par leur mutisme, l'aide commettre cette grossière erreur; effectivement, unanimement ils dise *Pour avoir l'aire du cercle il faut multiplier le carré du rayon par π ou core :* $\overline{R}^2 \times (\pi = 3.1416) = S$. Je dis qu'il faut être conséquent avec même; dans le positif pas d'antinomie. Si j'obtiens la surface du cer mais c'est une quadrature que j'ai là, vu que $\sqrt{S} = c$, c'est-à-dire qu j'extrais la racine carrée de la surface S, elle sera égale au côté du ca équivalent à cette même surface, ou encore au cercle. M. Legendre n site pas à dire que l'on peut quarrer le cercle; voir son scolie, Liv Pon XII. Eh bien, si on s'avise de dire que l'on peut quarrer pratiquem le cercle, on vous rit au nez comme à un quadrateur. Hélas! ces pauv rieurs ne connaissent pas la différence qu'il y a entre la théorie et la p tique, et ils veulent nier. Pauvres ignorants!...

Si une construction graphique imparfaite donnant le côté du ca équivalent au cercle donné à $\frac{1}{5,900e}$ près est suffisante en bonne pratic que penser de notre construction ci-dessus, qui fournit ce même cô $\frac{1}{545,000e}$ près? Cette construction pourrait s'appliquer graphiquement cercle de 29 petites lieues de diamètre; les besoins humains vont-ils jusc là? Il faudrait une feuille de papier de 59 mètres environ de côté, et p n'importe quelle échelle (voir article 15); est-ce que la graphie n'a pas limite? Le praticien ne peut-il pas regarder une telle construction con étant sans limites pour lui? En un mot comme en cent, graphiquem peut-on quarrer un cercle de 29 petites lieues de diamètre? On veut parfait, et rien que du parfait; mais, pauvres rieurs, pour s'en sortir a du parfait il vous faudrait une vue et une exécution infinies; on ne sau atteindre la limite de l'imparfait, et vous ne voulez que du parfait? La tance des étoiles à nous est une quantité finie; rigoureusement peut l'obtenir? Enfin savez-vous combien il nous revient de chiffres certain graphie? Trois, et pas davantage, et vous osez réclamer du parfait; ré ment vous me faites pitié!.....

10. Quand nous disons constructions imparfaites ou approchées, c'est parce que nous les rapportons au cercle en nous basant toujours sur π trouvé par nos géomètres; de sa nature nous croyons le cercle insaisissable : un polygone n'est jamais un cercle, et *vice versâ;* donc nos constructions reviennent à des polygones (*a*); moins la construction a de précision, plus le polygone s'éloigne du cercle; et plus de précision elle a, plus elle s'en approche. La première construction (6) s'accorde avec $\pi = 3.14$, qui revient au polygone inscrit de 80 côtés environ; la quatrième construction donne $\pi = 3.1416042$, répondant au polygone circonscrit de 640 côtés environ; le rapport de $\pi = 3.1416$ répond au polygone circonscrit de 1,000 côtés environ, et celui de 113 à 355 à un polygone circonscrit de 7,500 côtés environ; donc, pratiquement parlant, on peut regarder les trois derniers polygones comme étant trois cercles; donc, etc.

Pour les constructions que nous venons de donner et celles qui vont suivre, nous ne craignons pas la vérification, loin de là; nous la provoquons, au contraire; d'ailleurs ce sont des exercices qui conviennent à l'élève de trigonométrie.

Dans deux ouvrages pratiques de nos jours figurent la soi-disant méthode générale de l'inscription des polygones réguliers au cercle; nous engageons beaucoup les auteurs à consulter les *Récréations mathématiques*, par Ozanam, page 307; dans aucune Géométrie de renom ils ne trouveront cette prétendue méthode. On trouve aussi dans les deux ouvrages précités deux constructions graphiques : Pour transformer le cercle en un carré équivalent à $\frac{1}{292e}$ près $<$, et la seconde en un triangle dit équivalent à $\frac{1}{65e}$ près; donc ces deux constructions ne sont point de recette et ne devraient pas se trouver dans de pareils ouvrages, et encore moins l'affreux paralogisme de l'inscription générale des polygones réguliers au cercle. *Avis aux auteurs mêmes.*

11. Voici des constructions graphiques approchées assez curieuses :

1° Les deux diamètres sont tirés à angles droits (3), avec le compas de réserve, et des points A et D, D et B, donnez-vous les points R et S; tirez RS avec le rapporteur, et du centre C relevez l'angle de 27° 30′ (on vend des rapporteurs en cuivre qui marquent les demi-degrés), tirez exactement (3) C*y* en coupant DS, marquez le point d'intersection, vous aurez le point T; prenez la moitié de RT, plus le tiers de cette moitié, que vous porterez aux bouts des diamètres; tirez les sécantes, vous aurez le carré 1, 3, 2 et 4, équivalent au cercle donné, et le côté de ce dernier à $\frac{1}{12,000e}$ près $>$, la réduction étant égale au quart, sa limite est le cercle de 2,000 mètres de diamètre. (Nouvelle méthode.)

(*a*) Et pour ce dernier cas elles sont encore imparfaites.

2° Autre, donnant de même le carré équivalent au cercle, comme dessus, et le côté du carré à $\frac{1}{77,000^e}$ près $>$, la réduction étant égale à la huitième partie.

Portez le rayon du cercle de D en F, tirez exactement (3) EF en coupant CB par un petit trait, coupez-le de même selon AB, marquez le point d'intersection, et vous aurez le point G réclamé ; du centre C, avec le compas de reserve, décrivez un petit arc visible environ en L; avec un autre compas prenez la moitié juste de l'arc DLB ou DL égale à LB, qui sera égale au côté de l'octogone inscrit, le point L doit se trouver sur le petit arc décrit avec le rayon ; tirez LB, prenez-en la moitié juste et portez-la de C en h ; prenez la moitié de hG, et portez-la de A en i' ; prenez la moitié de i'B, plus le tiers de cette moitié que vous porterez aux bouts des diamètres, je dis que vous rencontrerez les quatre points 1, 3, 2 et 4, déjà obtenus, ou le carré équivalent au cercle donné. Donc on a la preuve de la première opération graphique. Plus tard nous en donnerons une autre pour faire une bonne lecture à l'échelle.

3° Construction graphique approchée, donnant le carré isopérimètre, même périmètre que le cercle, ou enfin le quart de la circonférence à $\frac{1}{87,500^e}$ près $<$, et le côté du carré équivalent au cercle donné à $\frac{1}{415,000^e}$ près $<$, la réduction étant égale au quart.

Portez le rayon de A en I, prenez juste le quart du rayon et portez-le de I en J, prenez la moitié de EJ, puis le tiers de cette moitié que vous porterez aux bouts des deux diamètres; tirez les sécantes, vous aurez le carré 1′, 3′, 2′ et 4′, dit isopérimètre, dont le côté, numériquement, est égal au quart de la circonférence. (Voir plus haut.)

Construction graphique approchée, donnant le triangle équilatéral isopérimètre (même périmètre que le cercle), ou encore le tiers de la circonférence du cercle à $\frac{1}{423,000^e}$ près $<$, et le côté du carré équivalent au cercle donné à $\frac{1}{246,000^e}$ près $<$, la réduction étant égale à la neuvième partie.

Portez le compas de réserve de E en m et en n, tirez Cj et Ck indéfinies.

Donnez-vous le côté de l'octogone inscrit DL ou LB (voir seconde construction ci-dessus, présent article), puis tirez la sécante CS. Prenez le tiers de LB et portez-le de L en M ; prenez la moitié de CM, plus le tiers de cette moitié, que vous porterez de D en i, de m en j et de n en k, finalement tirez les trois sécantes, vous aurez le triangle équilatéral ijk, dont le côté est égal au tiers de la circonférence du cercle, donné comme il est dit plus haut.

La figure présente un carré équivalent au cercle; le plus petit carré, le triangle équilatéral et le cercle sont trois figures dites isopérimètres, on a donc là de bien belles quadratures et rectifications pratiques. Pour

avoir le côté du triangle équilatéral ci-dessus, on a la formule 2.0944 $\times$ R $=$ $\frac{1}{5}$ C, ou le tiers de la circonférence. Le rayon d'un cercle vaut 120^{m}, trouver le côté du triangle équilatéral isopérimètre? On a 2. 0934 $\times$ 120 $=$ 251^{m} 33. A la fin, nous donnerons le tableau de toutes les formules que nous aurons employées.

12. Sans contredit, voici la plus belle construction trouvée par mes devanciers; elle donne la rectification de la demi-circonférence à $\frac{1}{53,000^{e}}$ près $<$, et le côté du carré équivalent au cercle donné à $\frac{1}{106,000^{e}}$ près $<$, la réduction étant égale pour la demi-circonférence, ou HE environ au quart; pour le quart de la circonférence, ou JE à la septième partie environ, et finalement pour le côté du carré équivalent au cercle donné, ou E*u* à la neuvième partie. Sa limite est le cercle de 24,000 mètres, ou de six petites lieues de diamètre; il faudrait une feuille de papier de plus de 12 mètres de haut sur 24 mètres de long.

Pour les deux diamètres voir (3). Des points A et C, avec le compa de réserve, donnez-vous les points *m* et *n*, portez le rayon de *s* en *t*; tirez *t*D parallèle à C*s* exactement (3), avec le calquoir marquez un trait lisible vers GHF; tirez de même *mn* et *m*E; marquez le point d'intersection *o* qui doit se trouver à la fois sur les axes *m*E et BA.

1° Portez deux fois le compas de réserve de D en F; avec un autre compas prenez avec soin le tiers de B*o*, et portez-le de F en H; par un petit arc de cercle marquez le point d'intersection vous aurez le point H qui doit se trouver tant sur l'axe *t*D que sur l'axe HE; menez la sécante HE, elle sera égale à la demi-circonférence du cercle BA, donné comme il est dit plus haut. Ce moyen nous appartient.

2° Portez trois fois le compas de réserve de D en G, prenez avec soin le tiers de *mn* et portez-le de G en H, je dis que vous rencontrerez infailliblement le point H déjà trouvé, et HE sera comme dessus égale à la moitié de la circonférence, exactement comme nous venons de le dire. Ce moyen est donné par M. Amiot, c'est ainsi qu'il fallait présenter la fameuse construction trouvée par le P. Kochanski. (Voir *Montucla*, pag. 77.)

3° Portez le compas de réserve de D en *p* par un petit arc vers *p*, du centre C avec le même coupez-le, marquez le point d'intersection, ce sera le point *p* réclamé; tirez exactement (3) *p*E, marquez avec soin le point d'intersection *q*, *q*C sera la tangente de 30°, et C*o* celle de 15°. Poursuivez: Prenez avec soin le quart de *qo* et portez-le de B en J; tirez la sécante JE, elle sera égale au quart de la circonférence, absolument avec la même approximation que dessus; mais la réduction n'est égale qu'au quart. Il faut JE $=$ JD; cela obtenu, rabattez cette sécante, E étant le centre, de J en I, et portez-la de *v* en *r*; tirez exactement la sécante I*r*, avec le compas de

réserve coupez-la, marquez le point d'intersection, vous aurez le point *u*, et la corde E*u* sera égale au côté du carré équivalent au cercle donné (voir plus haut), la réduction étant égale à la cinquième partie. Cette construction nous appartient.

Mais si vous prenez exactement la moitié de la sécante HE, vous aurez de même le point J ; du centre E rabattez cette moitié en I, portez-la aussi de *v* en *r*, et le reste, comme nous venons de le dire à l'instant, la corde E*u*, sera égale au côté du carré équivalent, et la réduction, pour ce cas, sera égale à la neuvième partie. (Voir plus haut.)

Ces trois constructions dans le fond n'en font qu'une ; donc le P. Kochanski avait trois chances pour une de trouver sa construction, donc elle n'est pas le fait du hasard, ce que nous démontrons et prouvons.

Observation. Nos prédécesseurs ne se sont attachés qu'à trouver des constructions sans réduction ; deplus, ils n'ont pas eu l'idée, comme nous, de recourir à la seconde méthode de quarrer le rectangle ; ils ont donné séparément leurs constructions pour rectifier une partie de la conférence et pour quarrer le cercle, et pas au-delà ; au lieu qu'avec notre méthode en avoir une quelconque c'est posséder l'autre, et *vice versâ*. (Voir fig. 1re, 3e et 4e, *c q f s t* (*a*).

Fig. 4. **13.** La figure parle d'elle-même : on a obtenu le carré inscrit (voir art. 3), et le côté de l'octogone ou le point I (voir art. 11), seconde construction qu'il faudra porter de J en L ; on se donnera de même, avec le compas de réserve, les points H et G. Continuons :

Prenez avec soin le tiers de LI et portez-le de E en M, tirez exactement (3) la sécante MH, marquez le point d'intersection *o* qui doit se trouver à la fois sur les axes DB et MH ; sans cette précaution on pourrait avoir A*o* ou trop grande ou trop petite (avis) ; finalement, tirez A*o* elle sera égale au côté du carré équivalent au cercle donné AB à $\frac{1}{240,000e}$ près $<$, l'erreur graphique étant réduite à la dixième partie.

Cette piquante et élégante construction peut s'étendre jusqu'au cercle de 13 petites lieues et demie, il faudrait une feuille de papier de plus de 27 mètres. Donc tous les besoins humains sont archi-dépassés.

(*a*). Menez BD, vous rencontrerez l'arc JI en S, on a pour trouver ce point : Donnez-vous le côté de l'octogone EQ (seconde construction, art. 11) ; portez au bout la moitié du rayon égale à QR ; portez le rayon de B en *s'* ; prenez le quart de ER et portez-le de *s* en S, le point S devant se trouver à la fois sur les axes BD et ES, cette dernière ligne est égale au quart de la circonférence à $\frac{1}{393,000e}$ près $<$, et numériquement le côté du carré équivalent à $\frac{1}{786,000e}$ près $<$, la réduction étant égale à la huitième partie.

De nos jours, un auteur emploie les rapports de 7 à 22 et de $\pi = 3.1416$, t il a donné la préférence au premier (voir art. 2). Avec de telles asser-ons, comment voulez-vous que les sectes des quadrateurs et des chica-eurs s'éteignent?

Notre figure 4 nous offre deux quadratures pour une; effectivement le arré M′ construit sur A*o* est équivalent au cercle AB; le carré K n'est pas utre chose que le carré inscrit, puisqu'il est construit sur un de ses côtés D. En vertu du carré de l'hypoténuse, second cas, si du carré M′ vous tez le carré K, je dis qu'il vous restera le petit carré L; si du cercle vous etranchez le carré inscrit, il vous restera les quatre segments *r*, *s*, *t* et *u*; onc le petit carré L est équivalent aux quatre segmens précités, vu que a somme des deux carrés ou K + L est égal au carré M′, égal au cercle, t construit sur l'hypoténuse A*o* du triangle rectangle AD*o*; donc, etc., *q f s t* (*a*).

Nous avons une autre construction du même genre et mixte qui est fort e recette avec le compas de réduction; elle donne A*o* ou le côté du carré quivalent à $\frac{1}{7,000,000^e}$ (*b*) près environ <, la réduction étant égale à la 25e artie; en voici une autre qui peut donner une assez bonne lecture à l'é-helle du côté du petit carré L égal à D*o*, et nouvelle méthode.

14. Enfin nous allons donner à nos lecteurs les constructions mixtes pprochées, c'est-à-dire qu'il pourra les appliquer à un rayon inconnu ou onnu, ou mieux encore, pour ce dernier cas, pour faire une bonne lecture l'échelle. Applications.

Avec le rapporteur (fig. 4) relevez l'angle de 80°, vous aurez le point *g* n coupant C*y* avec le compas de reserve et en marquant le point d'in-ersection; tirez la corde A*g*, prenez-en la moitié, vous aurez le point *h*; irez C*h* indéfinie, coupez-la, avec le compas de réserve, par un petit arc, e point d'intersection vous donnera le point *f*; avec un autre compas rele-ez A*f* de manière à avoir A*f* = *fg*; tirez une quelconque de ces deux ordes, portez le compas de reserve de D en *n*; prenez, avec un autre ompas, la moitié de la corde A*f*, plus le cinquième de cette moitié, vous urez le dixième du côté de l'ennéagone, que vous porterez de *n* en *o*; irez A*o*, cette ligne sera égale au côté du carré équivalent à $\frac{1}{60,000^e}$ près <, a réduction pour D*o*, ou le côté du carré équivalent aux quatre segments u cercle à la 20e partie.

(*a*) Rabattez le diamètre AB en *q*, construisez le carré *qr*, il est équivalent aux quatre arties extérieures au cercle *v*, *x*, *y*, *z*, et appartenant au carré circonscrit 1, G, donc e dernier est équivalent aux trois petits carrés K, L et 0.

(*b*) Limite. Le cercle de 410 lieues, de25 au degré.

Lecture a l'échelle. — Relevez la corde A*f* ou *fg*, portez-la sur l'échelle, cotez sa valeur, et, numériquement, prenez-en le dixième, ajoutez-y le rayon du cercle donné, vous aurez le côté du petit carré L. Élevez ce côté au carré; le diamètre AB×DC ou le rayon, vous donnera l'aire du carré inscrit, à laquelle vous ajouterez celle du petit carré L, la somme sera égale à celle du cercle donné. Pour ce cas la réduction est égale à la dixième partie seulement. La limite de cette construction mixte peut aller (lecture à l'échelle comprise) jusqu'au cercle dont le diamètre vaut 12,000 mètres, et graflquement à celui de 16,000 mètres; donc c'est la réduction surtout qui recule le plus la limite. Donc une construction imparfaite mixte avec réduction est préférable de beaucoup à une construction parfaite sans réduction, vu que la présente construction offre dix fois plus de chance pour obtenir l'appoint *no* que si elle était sans réduction; donc, c'est comme si notre vue était devenue dix fois plus forte pour ainsi dire.

Observation. Il va sans dire qu'avec l'emploi de toutes nos constructions graphiques, ancienne et nouvelle méthode, on n'a que faire de décrire la circonférence du cercle donné; de plus, si on applique nos constructions, nouvelle méthode, avec l'aide du rapporteur, on est dispensé de se donner le diamètre vertical. Par exemple pour la construction ci-dessus, qui nous a donné *no*, la circonférence et le diamètre deviennent nuls, ou encore on peut s'en passer; même chose absolument pour celles que nous allons donner, à l'exception, néanmoins, des constructions nouvelle méthode (art. 11), première construction, et (art. 15) construction 3°, lesquels réclament seulement le tirage du diamètre vertical.

15. *Construction graphique ordinaire, et constructions graphiques mixtes approchées de réserve, servant à vérifier soit le quart de la circonférence soit le côté du carré équivalent au cercle donné :*

1° Construction graphique approchée, nouvelle méthode, à double résultat, c'est-à-dire que si on a le côté du carré équivalent, elle fournira le quart de la circonférence à $\frac{1}{17,000^e}$ près $<$; et si on a le quart de la circonférence, elle fournira de même le côté du carré équivalent à $\frac{1}{20,000^e}$ près $<$ la réduction, dans les deux cas, pour l'appoint et la différence, est égale à la sixième partie.

Avec le rapporteur en cuivre marquant les demi-degrés, relevez du centre C l'angle de 46° 30′ (fig. 4), tirez la corde *a*E avec le compas prenez juste la moitié, que vous porterez de C en *l*; prenez le tiers de *l*E avec soin, et portez-le de *o* en *k*, A*k* sera égale au quart de la circonfé

rence ; portez-le de même de J en *k* (fig. 3), *k*E sera égal à E*u*, ou le côté du carré équivalent au cercle dont AB est le diamètre. Pour les fig. 3 et 4, le diamètre est le même ; mais pour la fig. 2, par exemple, le diamètre est plus grand ; il faudrait opérer sur ce dernier cercle comme nous venons de le faire pour celui de la fig. 4 ; c'est-à-dire que l'on porterait le tiers du rayon moins la moitié de la corde de l'angle ci-dessus sur 1, 4, par exemple ; le reste serait égal au quart de la circonférence, ou à 1′, 4′, et si on portait cette même ouverture de compas au bout de 1′, 4′, on aurait le côté du carré équivalent au cercle, ou encore égal à 1, 4. Donc, etc. Nos devanciers ont-ils su trouver pareille chose ?

Voici les constructions mixtes annoncées plus haut :

2° Les deux diamètres sont perpendiculaires l'un sur l'autre (3), avec le compas de reserve on s'est donné les point F, a et *d*, puis, des points A et C, les points *r* et *s*, *rs* étant le côté du triangle équilatéral inscrit.

Relevez AE ou EB avec soin, et portez-là de *r* en H ; tirez FE exactement (3) avec le compas de reserve, et du centre C coupez-la en G, marquez le point d'intersection, prenez la moitié de GE et portez-la de *s* en I ; prenez la moitié de HI et portez-la de A en J ; prenez le tiers de JC avec soin, et portez-le de B en K et de *a* en *k*, et AK ou F*k* sera le quart de la circonférence à $\frac{1'}{27,500^e}$ près <, et le côté du carré équivalent à $\frac{1}{54,600^e}$ près <, la réduction étant égale à la sixième partie.

Lecture a l'échelle. — Relevez HI, portez-la sur l'échelle, cotez sa valeur, numériquement prenez-en la moitié, ajoutez-y le rayon ; prenez le tiers de cette somme = KB, et retranchez-le du diamètre, le reste AK sera le quart de la circonférence, avec six fois plus de chance que si vous releviez AK directement.

3° Relevez avec le rapporteur l'angle de 23° juste (bien entendu qu'on se donnera le point F et qu'on mènera exactement (3) FDa) ; tirez exactement (3) un trait en *b*, marquez le point d'intersection, ce sera le point *b* ; prenez la moitié de *b*a et portez-la de D en *c*, prenez avec soin le tiers de *c*a et portez-le de C en K et de D en *k*, menez *k*K exactement (3), avec le compas de réserve, coupez-la en O, tirez AO indéfinie, marquez le point d'intersection O ; numériquement on a AK, ou le quart de la circonférence à $\frac{1}{34,000^e}$ près <, et AO ou le côté du carré équivalent à $68,\frac{1}{000^e}$ près <, la réduction étant égale à la sixième partie.

Lecture a l'échelle. — Relevez *b*a, portez-la sur l'échelle, cotez sa valeur, et numériquement prenez-en la moitié, ajoutez-y le rayon, prenez le tiers de cette somme que vous ajouterez au rayon, cette dernière somme sera égale au quart de la circonférence, avez six fois plus de chance que si vous releviez directement AK.

4° Portez sur la diagonale F*d* deux fois le compas de reserve, en partant de *d* vous aurez le point *e*, prenez la moitié de F*e* que vous porterez de *s* en *g*; prenez le cinquième de *rg* et portez-le de B en K et de a en *k*, et numériquement AK vaut le quart de la circonférence à $\frac{1}{32,000^e}$ près $<$, et AO ou le côté du carré équivalent à $\frac{1}{64,000^e}$ près $<$, la réduction étant égale à la cinquième partie (*a*).

Lecture a l'échelle. — Relevez *rg*, sachez ce qu'elle vaut à l'échelle, numériquement prenez-en le cinquième ou encore doublez cette valeur, retranchez un chiffre vous aurez le dixième ou le cinquième de *rg*, retranchez-le du diamètre, le reste sera égal au quart de la circonférence, avec cinq fois plus de chance que si vous releviez AK directement.

Avec le secours de ces constructions on peut donc vérifier la construction fig. 3, par exemple; effectivement elles donnent les unes ID et CI; donc ce point peut se vérifier. Pour la fig. 2, si on porte le rayon sur 1′, 4′, on aura un reste que les constructions 3° et celle de la note (*a*) pourront vérifier. Si on porte de même deux fois le compas de réserve sur 1′ 4′ prolongé, vous aurez un excès que les constructions 2° et 4° pourront vérifier, etc. Bien entendu qu'il faudra opérer sur les diamètres des figures 3 et 2, comme nous venons de le faire sur celui de la figure 5.

5° Par de petits arcs de cercle, et des points A et C (fig. 5), donnez-vous les deux points *r* et *s* avec le compas de réserve. Avec un autre compas prenez la moitié juste de *rs*, vous aurez le point *h;* prenez la moitié du rayon et portez-la de *h* en *i*; prenez la moitié de *is* plus le tiers de cette moitié, que vous porterez de *j* en O (on a porté deux fois le compas de réserve de A en *j*, donc A*j* est égale au diamètre), si vous avez bien opéré la première fois vous rencontrerez exactement le point O déjà trouvé, autrement l'opération sera manquée; donc on peut graphiquement opérer comme on le fait numériquement par une ou plusieurs preuves, *c q f s t*.

Cette construction donne le côté du carré équivalent au cercle donné à $\frac{1}{44,225^e}$ près $<$, la réduction étant égale à la sixième partie.

Lecture a l'échelle. — Relevez *is* avec soin et portez-la sur l'échelle; cotez sa valeur, puis, numériquement, vous en prendrez la moitié plus le tiers de cette moitié, que vous retrancherez du diamètre, le reste sera égal à AO ou AL.

(*a*) Prenez la moitié plus le tiers de GE, ou encore le sixième, portez-le de E en *l*, prenez de nouveau le tiers de A*l* que vous porterez de C en K et de D en *k*; on a AK ou le quart de la circonférence à $\frac{1}{143,000^e}$ près $<$, et AO, ou le côté équivalent à $\frac{1}{286,000^e}$ près $<$, la réduction étant égale à environ la sixième partie. C'est une construction ordinaire.

Limites de cette construction aux échelles suivantes :

Diamètre 2,800m à l'échelle de 1 à 2,000
— 3,500 — de 1 à 2,500
— 7,000 — de 1 à 5,000

Pour chacun de ces diamètres il faudrait une feuille de papier de plus de 1 m 40 de côté ; dans la pratique des arts va-t-on jusque-là ?

6° Portez le compas de réserve de A en *f*. Relevez l'angle de 37° avec le rapporteur, etc.; tirez la corde E*p*, prenez la moitié de cette corde et portez-la de B en *q* ; prenez le tiers de A*q* et portez-le de C en L et de *f* en O, A*f* ou AC n'étant pas autre chose que le rayon, et si la première opération est bonne je dis que vous rencontrerez exactement les points O et L déjà trouvés. Cette construction fournit le côté du carré équivalent à $\frac{1}{94,000^e}$ près $<$, la réduction étant égale à la 6e partie.

Lecture a l'échelle. — Relevez la corde E*p*, voyez ce qu'elle vaut à l'échelle, cotez sa valeur, numériquement prenez-en la moitié, ajoutez-y le diamètre, prenez le tiers de cette somme auquel vous ajouterez le rayon ; cette nouvelle somme sera égale au côté du carré équivalent au cercle donné, avec six fois plus de chance que si vous releviez ce même côté directement.

Ainsi, avec l'emploi de ces piquantes constructions, notre vue devient pour ainsi dire six fois plus grande, ou encore c'est le microscope graphique (qu'on nous passe le mot).

16. *Autres constructions mixtes approchées de réserve pour faire une bonne lecture à l'échelle, le diamètre ou le rayon du cercle étant connu :*

Obtenez comme de coutume le carré inscrit, et les deux diamètres perpendiculairement l'un sur l'autre (voir article 3). Poursuivons :

1° Avec le compas de réserve obtenez les points 1 et 4; tirez 1, 4 du centre C, coupez cette ligne en L, marquez le point d'intersection, ce sera le point L réclamé. (Voir art. 3, 3e alinéa.)

Relevez avec le grand compas la diagonale 1, 4, cotez sa valeur sur un morceau de papier ; relevez de même avec un autre compas 1, L, et portez-la sur l'échelle, cotez de même sa valeur, et, numériquement, prenez-en le quart, retranchez-le de la première valeur de 1, 4, prenez le dixième du reste et ajoutez-le aux trois quarts du diamètre, ou le rayon plus la moitié de ce dernier, la somme sera égale au côté du carré équivalent au cercle donné à $\frac{1}{55,000^e}$ près $>$, la réduction étant égale à la dixième partie;

2° Des points A et C, avec le compas de réserve, donnez-vous les points *c* et *d*, tirez *cd;* du point *d* portez le rayon du cercle en *e*, relevez *ce*, portez-la sur l'échelle, cotez sa valeur, prenez-en la moitié numériquement, ajoutez-y le rayon, vous aurez une somme ; prenez-en la moitié, puis le tiers

de cette moitié, que vous retrancherez du diamètre, le reste sera égal au côté du carré équivalent au cercle donné à $\frac{1}{15,000^e}$ près $<$, la réduction étant égale à la douzième partie ;

3° Du centre C, avec le rapporteur, relevez l'angle de 32° juste ; tirez la corde *a*E, relevez cette même corde, portez-là sur l'échelle, cotez sa valeur, numériquement prenez-en la moitié, ajoutez-y le rayon, et prenez le dixième de cette somme que vous retrancherez du diamètre, le reste sera égal au côté du carré équivalent au cercle donné à $\frac{1}{100,000^e}$ près environ $<$, la réduction étant égale à la vingtième partie. La limite de cette excellente construction s'étend jusqu'au cercle de vingt-six kilomètres environ ; il faudrait une feuille de papier de treize mètres de côté ; donc elle est archi-supérieure à tous les besoins humains ;

4° Portez deux fois le compas de réserve à partir du point 4, vous aurez le point K (les points 1 et 4 ayant été obtenus avec ce même compas) ; relevez 1, K, voyez ce que vaut cette ligne à l'échelle, cotez sa valeur, numériquement prenez-en le tiers, ajoutez-y le diamètre, vous aurez une somme ; prenez-en le dixième, que vous retrancherez du diamètre, le reste sera égal au côté du carré équivalent à $\frac{1}{26,000^e}$ près $<$, la réduction étant égale à la trentième partie.

Pour que l'erreur graphique fût égale à la tolérance accordée à l'échelle de 1 à 2,000 égale à 0^m 25, il faudrait commettre dans le principe, pour 1°, une erreur de 2^m 50 ; pour 2° une autre de 3^m ; pour 3° une autre de 5^m ; et enfin pour 4° une autre de 7^m 50. Ces erreurs sont réellement trop grandes pour qu'un élève vienne à les faire, et, à plus forte raison, un praticien ; donc, etc. ;

5° Donnez-vous avec le compas de réserve le point 4, menez 4, C indéfinie, à partir du point 4 portez deux fois le compas de réserve, vous aurez le point K réclamé ; avec un autre compas relevez CK et portez cette ligne sur l'échelle, cotez sa valeur, numériquement prenez-en la moitié, ajoutez-y le double du diamètre, vous aurez une somme, prenez-en le dixième et ôtez-le du diamètre, le reste sera égal au quart de la circonférence du cercle donné à $\frac{1}{18,500^e}$ près $<$, et le côté du carré équivalent à $\frac{1}{56,600^e}$ près $<$, la réduction étant égale à la 20e partie ;

6° Voici la plus piquante et la plus belle de toutes les constructions mixtes approchées que nous ayons pu trouver, touchant la rectification du quart de la circonférence du cercle donné absolument avec la même approximation et réduction que la précédente construction :

Relevez DB (la diagonale du carré du rayon, ou encore le côté du carré inscrit), portez cette ouverture de compas sur l'échelle, cotez sa valeur, et, numériquement, prenez-en la moitié plus le dixième de cette moitié, ce sera le vingtième, auquel vous ajouterez le rayon plus la moitié de ce

dernier, ou encore les trois quarts du diamètre, la somme sera égale au quart de la circonférence, comme il est dit plus haut (voir 5°).

Cette belle construction donne un centimètre environ en moins pour le cercle dont le diamètre est égal à deux cents mètres. Sa limite s'étend jusqu'au cercle de 9,400 mètres de diamètre; il faudrait une feuille de papier de plus de 4^m 70.

Remarque. Les trois quarts du diamètre sont représentés par AM = 150^m, en faisant R = 100^m . . . . . 150^m »

Mais AI = $^1/_2 \pi \times 100^m = 157^m$ 08 en prenant $\pi = 3.1416$;

donc l'appoint MI vaut ci. 7 08

Donc AI est égal à l'arc DLA, ci. . . . . 157^m 08

Les trois quarts du diamètre valent comme dessus, ci. . . . 150^m »

La diagonale DB du carré C 2 est égale à 141^m 42 ≈ 2 = 70^m 71 ≈ 10 = ... 7 071

Donc la différence en moins est égale à environ un centimèt. 157^m 071

Donc, pour le praticien, c'est une magnifique rencontre; effectivement puisque l'on fait graphiquement environ la même erreur sur MI ou sur DB vingt fois à très peu de chose près plus grande, donc il vaut beaucoup mieux la faire sur DB que sur MI. Pour mieux fixer encore les idées, posons que nous aurions pu trouver une ligne juste égale à MI; il nous aurait fallu relever cette ligne (5), la porter sur l'échelle, coter sa valeur, l'ajouter aux trois quarts du diamètre pour avoir enfin une somme égale au quart de la circonférence du cercle donné; cette lecture ne serait-elle pas des plus douteuses? Enfin l'erreur commise resterait entièrement pour tout ce qu'elle serait, absolument comme si vous releviez directement AI ou AJ, mais avec cette différence qu'en supposant l'erreur égale à la tolérance graphique ou à 0^m 25 tant sur MI que sur AI, elle devient égale à la vingt-huitième partie de MI et à la six cent vingt-huitième partie de AI; donc il faut éviter de relever directement une petite ligne qui serait demandée, ceci est du dernier tangible. Convenons de faire sur DB une erreur de quatre mètres en plus (évidemment c'est une erreur qu'on ne peut faire (voir art. 3), nous aurions 141^m 42 + 4^m = 145. 42 ≈ 2 = 72. 71 ≈ 10 = 7. 271 + 150 = AM = 157^m 271 − 157^m 08 ci-dessus = 0^m 19, erreur encore plus petite que la tolérance graphique accordée. Une erreur de 5 mètres en donnerait une autre, en définitive, juste égale à la tolérance accordée; donc il vaut beaucoup mieux employer nos constructions mixtes approchées pour faire une bonne lecture à l'échelle, que de relever directement toute la ligne égale soit au quart de la circonfé-

rence, soit au côté du carré équivalent, etc., puisque, pour ce dernier cas, il n'y a pas de réduction; donc nous avons eu raison de dire (art. 1) que l'on peut quarrer excessivement mieux le cercle que des rectangles fort allongés.

Le cercle offre cet avantage que voici : si je connais le diamètre c'est connaître le rayon, et *vice versâ;* j'ai donc pour rectification du quart de la circonférence les appoints CI, MI et BI, trois chances pour une; pour l'obtention du côté du carré équivalent au cercle donné, les appoints CJ, MJ et BJ, trois chances pour une, ce qui donne en tout six chances, plus toutes les lignes que l'on peut tirer dans le cercle et au-dehors, et l'emploi du rapporteur. Comme les cercles sont des figures semblables, opérer sur un c'est opérer sur tous les autres, et c'est ce qui n'a pas lieu pour le rectangle, vu que le rapport de la base avec la hauteur varie sans cesse, et que les éléments de l'un ne sont nullement proportionnels avec les éléments de tous les autres; donc, graphiquement, on quarrera mieux le cercle que le rectangle allongé, quoique nous possédions pour le dernier cas trois méthodes parfaites et pas une seule pour le premier cas; donc les constructions imparfaites avec une réduction sont à préférer à des constructions parfaites sans réduction, *c q f s t p* et *d*.

Corollaire. La raison logique nous force donc d'accepter le moyen le plus solide comme le plus exact; or, comme le moyen le plus avantageux est indirect, nous devons préférer le moyen d'emprunt au moyen direct, ceci saute aux yeux; d'ailleurs les résultats parleront bien plus haut que nous. A l'épreuve donc, et puis on jugera mieux avec les faits.

17. Ici nous présentons l'hexagone; dans notre ouvrage nous démontrons que l'apothème ne peut s'obtenir numériquement; effectivement, supposons le rayon du cercle circonscrit ou encore le côté égal à 10, la moitié vaudra 5 (cas de l'hypoténuse), on a $\overline{10}^2 - \overline{5}^2 = 100 - 25 = 75$, et $\sqrt{75} = 8,660\ 25,40378$, etc., interminable en chiffres, vu que 75 est un carré imparfait; donc, etc.

Voici la construction que nous donnons pour quarrer l'hexagone sans avoir besoin de construire la figure ; nous la croyons parfaite, parce que nous l'avons trouvée juste avec quinze chiffres (fig. 3) : BC ou CA représente l'apothème ou encore le rayon du cercle inscrit. Des points C et A donnez-vous les points *m* et *n*, tirez *m n*, portez le rayon de *n* en *x*, relevez avec soin avec un autre compas le reste *m x* et portez-le de B en *y;* par un petit arc, avec le rayon, coupez-le, marquez le point d'intersection, vous aurez le point *y* réclamé; menez la corde *y*A, elle sera égale au côté du carré équivalent à l'hexagone donné, et la ligne *mn* sera égale

au quart du périmètre de la même figure. Ce qu'il y a de piquant c'est que cette construction a une réduction pour le moins égale au tiers. Plus tard nous en donnerons une autre de mixte pour vérifier la corde yA.

L'étude de l'hexagone m'a conduit à un bien piquant résultat, c'est que le triangle extérieur est égal au triangle oblique intérieur; nous avons trouvé absolument la même chose pour l'octogone; donc c'est une loi commune à tous les polygones. Voyons à présent s'il n'en serait pas de même pour le cercle, c'est-à-dire le triangle rectangle extérieur ou intérieur équivalent au segment du quart du cercle adjacent?

7. 18. Voici la méthode donnée par M. Legendre, à l'exception que nous ne prenons que le quart de la circonférence et le diamètre au lieu de toute la circonférence, et la moitié du rayon, vu qu'on a $\frac{1}{4}$ C $\times$ D $=$ C $\times$ $\frac{1}{4}$ D $=$ S ou la surface du cercle; donc ces deux formules reviennent au même pour quarrer le cercle. On s'est donné le carré inscrit, etc. (3); ici nous adoptons le rapport de $\pi = 3.1416$; le rayon du cercle vaut 100 mètres, et on a $\pi \times \frac{1}{2}$ R $= \frac{1}{4}$ C, ou $3.1416 \times 50 = 157^{m}\ 08$; afin de diminuer l'erreur de lecture à l'échelle nous avons triplé l'appoint $57^{m}\ 08$, qui nous a donné $171^{m}\ 24$, et quadruplé la différence $42^{m}\ 92$, qui nous a donné $171^{m}\ 68$ en opérant comme pour le rayon (voir 3, 2e alinéa); par cet artifice nous avons pu vérifier les points h, f, etc.

Dans notre ouvrage figure ici la construction donnée par M. Cirodde (*Géométrie*, pag. 177, art. 357), comme elle est sans réduction nous la sautons ici; mais, à son occasion, nous nous écrions : Bravo! Voici donc deux théoriciens distingués, MM. Amiot et Cirodde qui, dans leur ouvrage, présentent à leur lecteur les constructions graphiques approchées pour quarrer le cercle, ou encore rectifier la demi-circonférence et la circonférence entière; nous ne trouvons rien de plus logique, et leurs devanciers auraient dû, selon nous, en faire autant; la secte des quadrateurs ne serait pas si grande.

Dans l'*Encyclopédie moderne*, par Courtin, au mot *Circonférence*, page 109, on lit ce qui suit : « Les géomètres ont longtemps cherché à ex-» primer le rapport de la circonférence au diamètre par des lignes de » construction facile à l'aide de la règle et du compas; mais ces recher-» ches n'ont pas été plus heureuses que les premières (voie numérique). » On n'a réussi à trouver que des approximations souvent fort compli-» quées. » Voici les plus simples de ces constructions :

Je suis fort surpris que, dans un ouvrage aussi sérieux, on ait pu donner deux constructions pareilles : la première n'est pas digne d'y figurer; c'est à peine si la seconde devrait s'y trouver. Comment a-t-on pu négliger

la belle construction de Kochanski (voir art. 12 et fig. 3)? Pas un de mes prédécesseurs n'a pensé au rapporteur.

Revenons à notre (fig. 7). Autre vérification : le premier appoint C*f* triplé, la différence *f*B quadruplée donnent à peu près le même produit. Le calcul des rapports rompus approchés (fractions continues) fournit le rapport de 4 est à 3, qui revient absolument au rapport d'Archimède; effectivement on a le carré inscrit équivalent au rectangle *a*E; les quatre parties segmentales du cercle sont équivalentes au rectangle D*k*, et enfin les quatre parties extérieures ou le carré N est équivalent au rectangle *hd;* donc les deux rectangles D*k* et *hd* sont équivalents au carré inscrit, qui est juste la moitié du carré circonscrit; donc les deux rectangles précités qui ont même hauteur sont dans le rapport de E*k* est à *kd* ou leurs bases, ou encore comme 4 est à 3, ce qui va nous fournir la construction suivante :

19. *Construction graphiqne approchée simple, facile, excessivement solide et à la portée de tout le monde, pour obtenir ou vérifier les deux points* f *et* h (*fig.* 7); *voici sa simple description :*

Prenez un compas un peu dur en tournant sa vis à droite; prenez une ouverture environ égale au quart du rayon, portez sur CD, en partant de D, quatre fois cette ouverture, supposons le point 2; portez de même, à partir du point *c*, trois fois seulement cette même ouverture, vous tomberez en 1 (supposition); tirez 2, 1, exactement (3), un petit trait en *h*, ou encore voyez si la pointe de votre calquoir tombe exactement dans le point *h* déjà trouvé; si cela n'a pas lieu la première opération sera manquée, voici du positif. Pour vérifier le point *f* on opérera semblablement sur CE et sur B*c*, comme nous venons de le faire sur DC et sur B*c* prolongée, etc. Cette piquante et magnifique construction dérive de l'étude mécanique de la construction de M. Cirodde. Elle a une solidité excessive; mécaniquement je ne découvre aucune erreur graphique. Sa limite s'étend jusqu'au cercle de 1,400 mètres de diamètre; effectivement on a 1. 77245 × 700 = R 1,240^{m} 715 (côté du carré équivalent) ≈ 5,000 (environ l'approximation de 7 à 22) = 0^{m} 25, erreur égale à la tolérance graphique accordée. Il faudrait une feuille de papier de 0^{m} 75 de côté; mais comme la graphie a sa limite comme toute autre chose, cette curieuse construction est donc bien supérieure aux cercles qui peuvent se présenter dans la pratique des arts; et puisqu'on adopte même numériquement, en pratique, le rapport de 7 à 22, donc, à plus forte raison, en graphie, on doit accepter de même la construction ci-dessus, qui est immanquable pour le praticien, et l'envisager pour lors sans erreur. Convention fait loi. La géométrie n'est donc boiteuse que pour ceux qui laissent de

côté la mécanique. Avant l'arrivée du fameux Vernier qu'était le graphomètre? Nous avons appliqué la présente construction aux figures (*a*).

20. Pour obtenir la surface du cercle on a les deux formules suivantes : $\pi \times \overline{R}^2 = S$ (1), et $\pi \times \frac{1}{2} R \times D = S$ ($\pi \times \frac{1}{2} R = \frac{1}{4} C$, ou le quart de la circonférence) (2).

C'est-à-dire, pour la première, $\pi \times$ par le carré du rayon, et pour la seconde le quart de la circonférence $\times$ par le diamètre, ou 3. 1416 $\times$ 100 $\times$ 100, ou encore 3, 1416 $\times$ 10,000 = ... 31,416^m carrés, et 3. 1416 $\times$ 50 = 157^m 08 = A*f* ou *e*E $\times$ 200 = parité 31,416 —

Je dis que le parallélogramme *ef* est équivalent au demi-cercle, ou encore au rectangle A*k*, vu qu'on a 157^m 08, ou le quart de la circonférence $\times$ A*b* ou CE, ou le rayon du cercle = 100 = ... 15,708^m carrés, ce qui est du dernier évident. La diagonale du carré du rayon = AE divise donc le parallélogramme *ef* en deux parties parfaitement égales, et, conséquemment, chacune d'elles est égale au quart du cercle dont la surface vaut 31,416 mèt. carrés, surface de tout le cercle $\backsimeq$ 4 = 7,854^m carrés.

Triangle isocèle ACE ou 100 $\times$ 100 $\backsimeq$ 2 = ... 5,000 —

La surface du segment est donc égale à celle du quart du cercle, moins celle du triangle ci-dessus, ou encore égale à 7,854 — 5,000 (ACE) = ... 2,854 *a* —

Surface du quart du cercle, voir plus haut = ... 7,854^m carrés.

Triangle isocèle A*b*E, comme dessus = ... 5,000^m carrés.
Triangle rectangle A*be*, *eb* = 57. 08 $\times \frac{1}{2}$ R = 50 = 2,854 *a'* —

Surface du quart du cercle comme plus haut, ci . . . 7,854^m carrés.

Donc le segment A*m*EA est équivalent aux triangles rectangles extérieur A*be* et intérieur *f*CE. (Voir *a* et *a'* ci-dessus.)

La moitié du parallélogramme AE*f* est de même égale au quart du cercle CA*m*EC; n'ont-ils pas tous les deux de commun le triangle isocèle ACE. Retranchons ce triangle de part et d'autre, ne reste-t-il pas le segment A*m*E égal au triangle rectangle EC*f*, parce que si à deux quantités égales nous retranchons une même quantité, les deux restes seront encore égaux, et comme le triangle EC*f* est égal en toute chose à son opposé A*be*; donc ce dernier triangle extérieur est équivalent au segment adjacent A*m*E, *c q f* ; *t p* et *d*.

Seconde démonstration. On peut transformer de même le quart du cercle

---

(*a*) (3) L'oblique *dc*; (5) les deux obliques *mm'* et *nn'*; (6) les deux obliques *mm'* et *nn'*, et (7).

en un trapèze dit équivalent; effectivement la formule de l'aire du trapèze est égale à $S' = \frac{(a+b)}{2} \times h$ ou encore $2\,S' = (a+b) \times h$. S' veut dire la surface du trapèze, *a* signifie le plus grand côté, *b* le plus petit parallèle au grand côté *a*, et enfin *h* est égal à la hauteur du trapèze ou encore à la distance qui sépare ses deux côtés. La seconde équation peut nous en fournir une autre pour nous donner le petit côté *b* : la surface S', le grand côté *a* et *h* étant connus, la voici : $2\,S' \div h = (a+b)$ et $(a+b) - a = b$. Ou, en nombres : $3.1416 \times \overline{R}^2 = S$, ou $3.1416 \times 10{,}000 = 31{,}416$, égal à la surface du cercle $\div 2 = 15{,}708 = 2\,S' \div (h = R = 100) = 157.08 = (a+b) - (a$ ou $R = 100) = 57^m\,08 = i$E ou *eb*. Preuve :

$a = 100, b = 57.08$ ou $100 + 57.08 = 157.08 \div 2 = 78.54 \times (h = R = 100) = 7{,}854$ mètres carrés pour la surface du trapèze ACE*i*, équivalent au quart du cercle, en portant *i*E ou *eb* de E en *k*, de D en *l* et en *h*, le cercle sera transformé en un hexagone irrégulier *ik*B*hl*A*i*; donc le triangle extérieur *eb*A, le triangle oblique A*i*E et le segment A*m*E sont trois figures dites équivalentes. Ici notre cercle nous offre le côté d'un cylindre qui a roulé sur le plan *ed* de la valeur juste d'un angle droit, vu que l'arc A*m*E est égal (supposition) à *e*E, ou la développée, c'est-à-dire que le point A, dans l'origine, se trouvait situé en *e*; donc, etc.

Observation. Il est à remarquer que le cercle possède deux surfaces hétérogènes : le carré inscrit donne une surface rectiligne, et les quatre segments le bordant une surface mixtiligne; or un carré n'a donc pas besoin qu'on le quarre; cela est si vrai que c'est le quart du carré inscrit qui a carré la lunule d'Hippocrate de Chio, mais non la lunule une partie du cercle; donc c'est la partie segmentale du cercle qu'il faudrait pouvoir quarrer, et non le cercle en entier. Nous n'entendons pas donner ici une quadrature absolue, vu que nous n'avons pas de construction parfaite pour la rectification du quart ou de la circonférence du cercle; donc nous n'offrons à notre lecteur qu'une belle et magnifique quadrature pratique excessivement approchée, ou, encore mieux, polygonale, dont nous pouvons pousser la précision jusqu'aux 155 chiffres trouvés pour π par l'autrichien Wéga; effectivement si dans les deux formules 1 et 2, données en tête de cet article, nous faisons π ou plus grand ou plus petit, le produit sera toujours le même; donc on aura toujours le triangle rectangle extérieur *eb*A équivalent au segment A*m*E; prouvons-le. Les formules (1), $\pi \times \overline{R}^2$; (2), $\pi \times \frac{1}{2}\,R \times D$, donnent toutes les deux la surface du cercle; retranchons de part et d'autre π, nous aurons $\overline{R}^2 = \frac{1}{2}\,R \times D$; faisons disparaître du second membre $\frac{1}{2}$ et prenons la moitié de D ou du diamètre, nous aurons le rayon ou R; donc nous trouvons $\overline{R}^2 = R \times R$, ce qui est absolument la même chose; donc, soit que π devienne ou plus grand

ou plus petit, le produit, pour les formules 1 et 2, sera toujours le même ; donc le triangle rectangle extérieur précité sera équivalent au segment adjacent (voir plus haut) ; d'ailleurs deux produits égaux multipliés par une même quantité seront encore égaux ; donc, etc. *c q f p* et *d*. Voici comment la géométrie est une science boiteuse pour le praticien qui n'ignore pas que, numériquement, on ne peut avoir d'une manière absolue ni la valeur de π, ni celle de la diagonale du carré, ni celle de l'apothème de l'hexagone ; donc il est instruit qu'on ne saurait avoir ni la surface de ce dernier polygone ou de tout autre, ni celle du cercle à toute rigueur ; mais pratiquement, et avec le secours des rapports rompus excessivement approchés ou avec celui des logarithmes à sept figures, il peut donc se procurer la surface des polygones et du cercle à une vétille près qui ne l'occupe aucunement ; donc, etc.

21. Si nous menons exactement (3) la sécante *hf*, si nous tirons la corde A*g*, en vertu de la seconde méthode de quarrer le rectangle, on a AB : A*g* :: A*g* : A*f*, ou encore $\overline{Ag}^2 =$ (AB × A*f*, ou le diamètre multiplié par le quart de la circonférence. Même chose absolument pour la (fig. 1re) $\overline{dD}^2 =$ DE × DI ; (fig. 3), $\overline{Eu}^2 =$ ED × EI, et (fig. 6), $\overline{AH}^2 =$ AB × AI ; donc (fig. 7), si sur la corde A*g* vous construisez un carré, il sera égal en surface à celle du cercle ; si vous construisez de même un autre carré sur la petite corde B*g*, je dis qu'il sera équivalent aux quatre parties mixtilignes *v x y* et *z*, débordant le cercle et appartenant au carré circonscrit ; effectivement l'angle inscrit *g* est droit, puisqu'il s'appuie sur le diamètre ; donc les carrés M et N sont égaux au carré fait sur AB ou le diamètre égal au côté du carré circonscrit ; c'est de même l'hypoténuse du triangle rectangle A*g*B ; donc ce n'est pas autre chose que le carré de l'hypoténuse, etc. C'est donc la seconde méthode de quarrer le rectangle qu'il fallait accueillir pour quarrer pratiquement le cercle, et non la première méthode, comme le font nos soi-disant géomètres-praticiens pour quarrer le rectangle (voir art. 18) (*a*), c'est-à-dire le rayon d'un cercle étant donné, il faut multiplier $\frac{1}{2}\pi$ par R ou le rayon donné, le produit sera égal au quart de sa circonférence, puis on vous dit de prendre la première méthode pour obtenir la moyenne proportionnelle entre la circonférence du rayon donné et la moitié de son rayon, ou encore entre le quart de la circonférence et son diamètre, cette moyenne proportionnelle sera égale au côté du carré équivalant au cercle dont le rayon est donné. Mais si le rayon n'était pas donné, il est évident qu'on ne peut plus quarrer le cercle,

---

(*a*) Nous exceptons M. Legendre ; pour nous c'est un théoricien distingué et non un praticien.

puisqu'il faut commencer par la voie numérique et terminer ensuite par la voie graphique; donc ce n'est rien avoir ou encore c'est une quadrature bâtarde. La géométrie n'est pas aussi pauvre qu'on la veut faire, les constructions que nous avons données (voir les fig. 1re, 2e, 3e et 4e) sont là pour prouver notre assertion. Ainsi une ouverture de compas quelconque étant donnée, on peut la regarder comme étant égale à un rayon de cercle, lequel rayon est inconnu à l'opérateur, et néanmoins on lui demande la rectification du quart de la circonférence et le côté du carré équivalent au cercle en question. Comme ce problème est purement graphique, l'opérateur peut donc employer (fig. 1re, art. 6) la première construction donnée par M. Amiot, ou encore la seconde construction s'il veut, mais en opérant à droite comme à gauche, pour tirer la corde *dd'* et obtenir le point I; puis, pour vérifier le point I, il devra prendre (fig. 7 art 19) la piquante construction que nous donnons à cet endroit, toutes les autres constructions (fig. 2, 3 et 4) ne sont que du luxe, ou encore elles peuvent convenir à l'élève comme exercices graphiques pour former sa main. Donc, pour résoudre le problème ci-dessus, les trois constructions données plus haut sont plus que suffisantes en bonne graphie (voir les art. 7 et 19); donc, etc. Il va sans dire que si le rayon était donné numériquement on devrait recourir à nos constructions mixtes de réserve (voir art. 15 et 16), et on pourra se donner, soit le quart de la circonférence, soit le côté du carré équivalent, avec une erreur bien plus petite que la tolérance graphique accordée. Ici nous laissons le lecteur libre dans son choix, à lui de voir ce qui lui conviendra le mieux; cependant le plus simple comme le plus facile doit toujours être préféré. (Voir notre *observation* art. 14.)

22. Quand le maître reconnaîtra que ses élèves seront bien au fait de nos constructions, il pourra établir un concours avec les deux rayons suivants, ou avec d'autres s'il veut : 1° Rayon de la place du Trône, 128 mètres; 2° rayon de la barrière de l'Étoile, (au centre se trouve l'arc de triomphe), 120 mètres 43 centimètres non compris les jardins. Nous avons pris nous-mêmes ces deux rayons à l'Hôtel-de-Ville de Paris, (4e étage, division des Plans). Ce sont les deux plus grands cercles que nous ayons pu rencontrer (fig. 1re); ils devront appliquer les quatres constructions qui la composent, puis ils devront prendre à l'échelle la valeur de la corde D*d* ou de son égale D*d'*; du segment A*j*, elle sera égale au côté du carré équivalent qu'ils écriront sur un morceau de papier; au-dessous devra figurer de même la valeur de DI ou du quart de la circonférence, que chaque élève signera. Le maître calculera d'avance le côté du carré équivalent par la formule 1. 77245 $\times$ R, et le quart de la ciconférence par la formule $\frac{1}{2}\ \pi \times$ R. Rien donc ne lui sera plus facile que de reconnaître les

plus forts et les plus faibles ; il doit les surveiller attentivement, vu qu'ils pourraient très bien se donner, comme lui par le calcul, chacune de ces lignes. Même chose absolument pour les fig. 2, 3, 4, 5 et 6. Pour les constructions avec réduction, le maître devra multiplier chacune des erreurs faites en plus ou en moins par la réduction : au sixième par 6, au dixième par 10, etc., le produit sera l'erreur commise dans le principe. Si l'erreur est plus petite que la tolérance graphique accordée (*a*) l'élève aura excessivement bien opéré, et très mal opéré si elle est plus de deux fois plus grande ; donc, etc.

23. Revenons à notre fig. 7. Voyez ce qui arrive quand nos pauvres quadrateurs à cerveau troublé viennentà nous donner un autre chiffre que π trouvé par les Viètes, Adrianus, Romanus, Ludolph, Snellius, Grégory, Wallis, Euler, Newton, Leibnitz, de Lagny, Simpson et Wéga, la grimace qu'ils font faire au cercle: Lacomme, par exemple, quart de cercle (1′), donne un chiffre plus petit qui s'accorde avec la ligne courbe pointillée intérieurement (*o*′) ; Donnelly en donne un autre qui est plus grand (voir la courbe pointillée en dehors) ; de manière que les quatre segments sont aplatis dans le premier cas et bombés dans le second ; donc l'erreur ne frappe jamais le carré inscrit, mais toujours les quatre parties segmentales du cercle ; donc tout autre rapport de π donné par les illustres géomètres cités plus haut n'est digne que du dernier mépris. (Lire Montucla.)

Nos constructions graphiques mixtes de réserve (art. 15) fourniront avec la dernière exactitude les points *e*, *f* et *h* et le triangle rectangle extérieur équivalent au segment adjacent. Nous allons rapporter les valeurs à l'unité pour donner les formules suivantes : $\frac{1}{4}\,\pi = 0.\ 7854 \times \mathrm{D}$, ou le diamètre $= \frac{1}{4}$ C (circonférence). 2° $0.\ 7854 \times \mathrm{D}^2 = \mathrm{S}$ ou la surface ; 3° $0.\ 7854 \times \mathrm{R}^2 = \frac{1}{4}$ S. Enfin si de $\frac{1}{2}\,\pi = 1.\ 5708$ on retranche l'unité il reste 0. 5708 pour le côté *b* du trapèze ACE*i* ou la base du triangle oblique A*i*E équivalent au triangle rectangle A*be* et au segment A*m*E ; la surface de ce dernier est donc égale à celle de l'un quelconque des deux triangles précités, ou encore $s = 0.\ 5708 \times \mathrm{R} \times \frac{\mathrm{R}}{2}$, où encore en prenant la moitié de notre constante on a simplement $0.\ 2854 \times \mathrm{R}^2 = s$, ou la surface du segment appartenant au quart du cercle. Donc nous obtenons l'aire du segment de l'angle droit directement avec le secours du triangle extérieur A*be* par la formule $s = 0.\ 2854 \times \mathrm{R}^2$, *c q f s t p* et *d*.

24. Pour avoir le quart du périmètre d'un hexagone dont l'apothème A

(*a*.) Le professeur a donc intérêt à nous lire; lui qui apprend tant de choses à la fois, comme dans notre pays, a-t-il le temps de s'occuper de graphie comme nous qui n'avons pas autre chose à faire? Non, il ne l'a pas ; donc il doit nous lire.

sera donné, on aura 1. 73205 × A = $\frac{1}{4}$ P, et pour le côté *c* du carré équivalent on aura 1. 86121 × A = *c* (1).

Pour le cercle dont le rayon R sera connu, pour avoir le quart de sa circonférence on aura 1. 5708 × R = $\frac{1}{4}$ *c*, et pour le côté du carré équivalent on aura 1. 77245 × R = *c* (2); cette dernière formule remplace celle-ci : $\sqrt{\pi \times \overline{R}^2} = c$, et la formule (1) ci-dessus pour l'hexagone revient à celle-ci : $\sqrt{\frac{1}{4} P \times 2 A} = c$. C'est à la seconde méthode de quarrer le rectangle que nous sommes redevable des deux simples formules (*a*) pour l'obtention du côté *c* du carré équivalent soit à l'hexagone, soit au cercle dont l'apothème ou le rayon est donné.

Par exemple, pour le cercle, on a 1. 77245 × R = *c* et *c* × *c* ou $\overline{c}^2$ = S (3); $\pi \times \overline{R}^2$ = S donne bien la surface du cercle, il est vrai, mais pour avoir *c* il faut de rigueur en venir à une extraction de racine carrée, ou $\sqrt{S} = c$; donc, dans la pratique, la formule (3) est préférable puisque elle est plus simple et à la portée de tout le monde, *c q f s t p* et *d*.

Pour l'hexagone voici le seul rapport presque commensurable que fournit le calcul des rapports rompus approchés, 36 est à 67 : le premier nombre est l'apothème, le second le côté du carré équivalent. Pour le cercle nous en avons trouvé deux : 145 est à 257 et 167 est à 296; les deux premiers nombres représentent les rayons, et les deux autres les côtés des carrés équivalents aux cercles revenant à chacun de ces deux rayons, et il n'y en a pas d'autres de plus simples; voici comment la géométrie est pauvre!...

25. Enfin, pour montrer jusqu'où l'on peut aller en graphie, faisons voir comment il faut s'y prendre pour obtenir à l'échelle le côté du carré équivalent au cercle de 2,000 mètres de diamètre et à l'échelle de 1 à 5,000, prise pour celle de 1 à 10,000, à 1 ou 2 centimètres près environ, 5,000 mètres vaudront 1,000 mètres = R.

Vous n'avez que faire (fig. 6) de tirer le diamètre vertical DE ni de décrire la circonférence; menez seulement le diamètre AB indéfini de part et d'autre et relevez du centre C l'angle de 98° avec le rapporteur en cuivre ayant environ 8 centimètres de rayon, vous aurez le point *o*, votre rayon AC aura un décimètre; menez exactement (3) C*o* indéfinie, avec le rayon coupez-la en N, marquez le point d'intersection, ce sera le point N réclamé; menez la corde AN, avec un autre compas prenez la moitié de cette corde et portez-là de A en P; avec le compas de réduction, armé au cinquième et vérifié, prenez la moitié juste de PB, l'ouverture des petites branches sera le dixième que vous porterez de B en *q*; prenez de nouveau

---

(*a*) (1) et (2).

avec le même compas la moitié juste aussi de Aq, l'ouverture des petites branches sera le dixième que vous porterez de B en J, et AJ sera égal au côté du carré équivalent au cercle donné dont AB est le diamètre à $\frac{1}{1,800,000^e}$ près $<$, la réduction étant égale à la 200e partie; effectivement on a $\frac{1}{2} \times \frac{1}{10^e} \times \frac{1}{10^e} = \frac{1}{200^e}$; donc, etc.

Lecture a l'échelle. — Nous venons d'opérer à l'instant même sur le rayon de 1,000 mètres; nous avons trouvé pour la corde AN à l'échelle de 1 à 5,000, ci 755 mètres, à l'échelle de 1 à 10,000 nous eussions trouvé le double ou 1,510 mètres, et numériquement nous avons :

$$\begin{array}{rl} AN = & 1,510^m \\ \frac{1}{2} = & 755 \\ + D = & 2,000 \\ + D = & 2,000 \\ \hline & 227,55 \\ \hline & 100 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Et } D = & 2,000^m \\ \left.\begin{array}{r}\text{moins le centième}\\ \text{ci-dessous.}\end{array}\right\} = & 227\ \ 55 \\ \hline & 1772\ \ 45 \end{array}$$

$1.772454 \times 1,000^m =$ $1772^m\ 454$ pour le côté du carré équivalent au cercle de 2,000 mètres de diamètre. L'erreur commise est égale à $0^m\ 004 \times 200$ (réduction) $= 0^m\ 80$. Mais la tolérance graphique accordée à l'échelle de 1 à 10,000 vaut $1^m\ 25$; puisque notre erreur est encore plus petite, donc nous avons bien opéré. Cependant, comme l'opération est un peu délicate, et qu'elle réclame une main un peu habile, nous nous adressons au bon praticien. Nous avons donc trouvé six chiffres de certains, c'est-à-dire que nous avons gagné trois chiffres en graphie. Nous donnons cette construction plutôt par curiosité que par utilité, vu que les besoins humains sont fort loin d'aller jusque-là ; donc, etc.

Si le rayon de notre rapporteur eût été suffisamment grand, nous eussions attaqué le cercle de 3,000 mètres de diamètre; quelqu'un avant nous aurait-il osé le faire? Voici comment la graphie est un art grossier.

26. Dans notre ouvrage nous avons consacré un article à l'ellipse dans lequel figurent des tableaux ramenés à l'unité pour des voûtes de pont à anse de panier, ellyptiques et cycloïdales, à quatre trois, cinq sept et neuf centres, que nous offrons au praticien. La cycloïde est une courbe fort piquante dont nous faisons l'étude; nous la nommons courbe *aux surprises*. Nous avons trouvé qu'en rabattant le diamètre du cercle générateur du milieu de la base sur celle-ci on a un point qui est le pied de la quadratrice de Dinostrate, conséquemment la base se trouve à être égale au diamètre précité. Ce quart de cercle permet de diviser la cycloïde en trois parties mixtilignes parfaitement égales, etc. La cycloïde sert à démontrer que toute autre valeur de π que celle trouvée par nos illustres géomètres est fausse, par exemple le rapport de Lacomme, 9 à $28 \times 2 =$ 18 à 56 + le rapport de O'Donnelly 17 à $54 =$ 35 à $110 \backsim 5 =$ 7 à 22 (moyenne), rapport d'Archimède. Ainsi nous faisons voir que les rapports

9 à 28 et 17 à 54 sont faux comme des jetons. Lacomme me paraît un cerveau troublé, et O'Donnelly un cerveau troublé puis un trouble cerveau. Nous donnons des constructions graphiques approchées très piquantes au sujet de la cycloïde ; comme tout ceci est plus curieux qu'utile nous le sautons ici.

27. Revenons à l'ellipse. Comment faut-il s'y prendre pour quarrer pratiquement et exactement cette élégante figure, la lecture à l'échelle étant comprise ?

On démontre en géométrie que la surface d'une ellipse est égale à celle d'un cercle dont le diamètre est moyen proportionnel entre le grand axe et le petit axe, ou encore en nommant a le demi-grand axe et b le demi-petit axe, on a $\sqrt{a \times b} = \mathrm{R}$ ou le rayon du cercle équivalent à l'ellipse donnée ; par exemple on donne l'ellipse suivante : $a = 100^{\mathrm{m}}$ et $b = 50^{\mathrm{m}}$, on a $\sqrt{100 \times 50} = \sqrt{5,000} = 70^{\mathrm{m}}\ 7106$ pour le rayon moyen demandé. On a des tables qui donnent à vue la racine réclamée ; donc on est dispensé d'employer la formule ci-dessus.

La base du triangle dont le rayon est 1 vaut 0. 5708 (fig. 7) (art. 20) ; sachons si pour l'ellipse (fig. 8) nous pouvons appliquer ce chiffre constant provenant du cercle ?

On a 0. 5708 × AC = 100 = 57. 08 = FA, et 0. 5708 × CD = 50 = 28. 54 = DG (art. 23), formule 0. 2854 × $\mathrm{R}^2 = s$ pour le cercle, devient pour l'ellipse 0. 2854 × $a \times b = s$; effectivement on a 0. 2854 × 100 × 50 = 1,427 m. . . . . 1,427 m carrés.

La formule pour obtenir la surface de l'ellipse est égale à $\pi \times a \times b$, ou encore $\frac{1}{4}\ \pi \times a \times b = \frac{1}{4}$ S ou 0. 7854 × 100 × 50 = ... 3,927, quart de l'ellipse.

Moins la surface du triangle rectangle ACD = $\frac{100 \times 50}{2}$ = ... 2,500

——— = 1,427 m carrés

pour la surface du segment AD*m*A et égale à celle de l'un quelconque des triangles (1) et (2) (voir plus haut), vu que le produit de $a \times b$ est absolument le même que celui de $b \times a$; donc la surface de la partie segmentale de l'ellipse est égale à celle de l'un quelconque des deux triangles rectangles (1) et (2), absolument comme nous l'avons trouvé pour le cercle (20).

Les triangles rectangles (1) et (2) peuvent être remplacés par les deux triangles obliques FAD et GDA, dits équivalents puisqu'ils ont même base et même hauteur que chacun des triangles (1) et (2) ; donc le quart de l'ellipse est transformé en deux triangles rectangles équivalents FCD et ACG, *c f s t p* et *d*.

Corollaire. Donc la surface de l'ellipse est égale à FC $\times$ 2DC ou $2b$; mais FC est égal à $\frac{1}{2}\ \pi \times a$; donc on a $\frac{1}{2}\ \pi \times a \times 2b = S$, ou encore $\pi \times a \times b = S$ formule à l'ellipse (voir plus haut); donc la proposition ci-dessus est prouvée et démontrée, *c f s t.*

Remarque. FC est le quart de la circonférence du cercle dont AC est le rayon, comme aussi CG est le quart de la circonférence du cercle dont CD est le rayon; donc c'est avec le périmètre du cercle que l'on obtient la surface de l'ellipse, donc le périmètre de cette dernière A*m*D = 121^{m} 10 ne joue aucun rôle.

28. Le rayon moyen de notre ellipse ci-dessus peut être pris = 70^{m} 70, opérez comme il est dit article 3, etc. Des points A et D, D et L (compas de réserve) donnez-vous les points I et G; menez AI, AD, IG (prolongée), IC, DJ et enfin IJ. Du centre C, avec le rapporteur, relevez l'angle de 23°, tirez exactement (3) C*y* et LG, marquez le point d'intersection, vous aurez le point *s;* portez le compas de réserve de *s* en *u*, avec un autre compas prenez la moitié de L*u* et rabattez-la de *v* en *x;* prenez le tiers de C*x* et portez-le de G en F et de *t* en H (*t* A est égale au rayon), vous aurez IF et HC égales chacune au quart de la circonférence à $\frac{1}{50,000^{e}}$ près <, la réduction étant égale à la sixième partie. Pour la lecture à l'échelle (voir construction 6°, art. 16) on en peut tirer la construction graphique suivante : prenez le cinquième de A*i* ou *i*D, I*i* ou *i*C, et portez-le aux bouts du diamètre sur votre croquis de I en *m* et de G en *n*, de manière que le point D au milieu ne marque pas; prenez avec soin le quart de *mn* et portez-le de D en F et de A en H, vous devez rencontrer infailliblement les points F et H déjà trouvés. Tirez CF et HI, vous aurez le parallélogramme HF équivalent au demi-cercle ADL, et conséquemment sa moitié HIC équivalent au quart de cercle A*e*DCA et au quart de l'ellipse (fig. 8), et le reste comme il est démontré à l'article 20 (*a*); donc chacune des parties (1), (2) et (3) (fig. 8) sont égales à chacune des trois parties (1′) (2′) et (3′) (fig. 9); que le triangle isocèle ACD (fig. 9) est équivalent au triangle rectangle ACD (fig. 8); donc, etc.; donc c'est par emprunt que nous obtenons la surface de l'ellipse, donc le périmètre de l'ellipse ne figure en rien ni pour rien.

Menez HD, vous aurez le triangle rectangle IAH et le triangle oblique

---

(*a*) Ce qui constitue une nouvelle proposition de géométrie, par exemple, quelle est la base du triangle rectangle équivalent au segment du quart du cercle de la place du Trône, à Paris, le rayon vaut 128^{m}? *Réponse.* 0^{m} 5,708 $\times$ 128 = 73^{m} 0624 (pour la base) $\times \frac{1}{2}$ R = 64^{m} = 4676^{mm}. Surface du quart du cercle, 12,868^{mm}, moins celle du triangle isocèle = 8,192^{mm} = 4,676^{mm} ou 46 ares, 76 centiares; donc, etc.

HDA, dits équivalents, puisqu'ils ont même base et même hauteur le rayon ; donc le triangle rectangle HCD est équivalent au quart du cercle et au quart de l'ellipse, ce qui saute aux yeux. Donc le cercle peut se transformer de même en un losange dont la grande diagonale serait égale à la moitié de sa circonférence, la petite étant égale à son diamètre.

Ainsi la géométrie, toute boiteuse qu'elle est, nous enseigne à transformer l'ellipse en un losange dont la grande diagonale est égale à la demi-circonférence revenant au rayon AC (fig. 8), et la petite égale à son petit axe, ou encore en un autre dont la grande diagonale est égale à son grand axe et la petite à la demi-circonférence du cercle dont CD est le rayon ; même chose pour le cercle. (Voir plus haut.) C'est à la seconde méthode de quarrer le rectangle que nous devons tout cela.

29. *Construction mixte approchée donnant le côté du carré équivalent au cercle donné à* $\frac{7}{65,000^e}$ *près* $>$, *la réduction étant égale à la neuvième partie.*

Portez le rayon de D en *a* (fig. 9), menez la corde A*a* ; du centre C avec le compas de réserve coupez la sécante IJ, marquez le point *b*, prenez la moitié de la corde A*a* et portez-là de *b* en *c* ; prenez le tiers de *c*J, plus le tiers de ce tiers que vous porterez de L en *d*, le segment A*d* sera égal au côté du carré équivalent. (Voir plus haut.)

Lecture a l'échelle. — Relevez *c*J, portez-la sur l'échelle, cotez sa valeur, numériquement prenez-en le tiers, plus le tiers de ce tiers, que vous ôterez du diamètre, le reste sera égal au côté du carré équivalent. Ce côté vaut 125^m 33.

Dans notre ouvrage nous donnons des constructions fort piquantes 1° pour obtenir AD (fig. 9) ; 2° le quart de la circonférence ou le côté du carré équivalent étant donné, numériquement trouver le rayon qui reveient soit au premier comme au second avec une précision satisfaisante. Nous apprendrons au lecteur le moyen de se procurer des constructions graphiques approchées ; nous nommons la recherche des constructions, avec les lignes du cercle seulement, le *casse-tête géométrique*, et la recherche des constructions nouvelle méthode, en employant le rapporteur, *petit casse-tête trigonométrique*, si toutefois ce jeu peut lui convenir.

Corollaire. Donc, en raison de ce que nous venons de donner, nous pouvons bien affirmer à notre lecteur que nous possédons de très belles quadratures pratiques du cercle, et que le praticien n'a que faire de la quadrature du cercle à toute rigueur ; ce que nous avons prouvé et démontré plus haut ; donc, etc.

30. *Conclusion.* Non, il n'en est pas de la quadrature du cercle comme des voyages aériens, comme du grand œuvre, et enfin comme du mouvement perpétuel ; en voici la preuve :

Pratiquement je puis quarrer le cercle en prenant le fameux rapport de 113 à 355, comme je l'ai fait en admettant celui de 1. 0000 est à 3. 1416 (voir fig. 7, art. 20). Voici les erreurs absolues que donne le premier rapport pour un cercle dont le diamètre vaut 1,000 mètres : il donne pour

la circonférence de ce cercle, ci	3,141 m	59292
moins la vraie valeur, presque ci	3,141	59265359
Erreur en plus, ci	0 m	00026641
Pour la surface on a	785,398 mm	23
moins la vraie valeur, presque ci	785,398	1634
Erreur en plus, ci	0 mm	0666

Nous le demandons au gros bon sens, sont-ce là des erreurs pour le praticien auquel on accorde des tolérances? Notons, de plus, qu'un tel cercle ne se rencontre jamais en pratique ; qu'on juge maintenant, si on applique ce même rapport aux cercles qui peuvent se présenter dans la pratique des arts?

Un géomètre arpenteur pourrait-il se promettre de mesurer 78 hectares 53 ares 98 centiares, etc., à sept centièmes environ de mètre carré? Non, parce qu'il faudrait que son exécution pût atteindre à la précision de $\frac{1}{11,776,622^e}$ près. (Voir art. 2.) Donc, pour le praticien, tant vaut ce rapport comme s'il était parfait. Quand bien même nous aurions la quadrature du cercle d'une manière absolue, qu'y gagnerions-nous de plus? Notre exécution grandirait-elle en proportion? Absolument rien que ce soit ; quant à notre exécution elle resterait toujours la même ; donc, etc. Généralement on dit que, pratiquement, nous avons la quadrature du cercle ; mais une assertion n'est pas une démonstration : une découverte en mathématiques n'appartient pas à celui qui l'affirme, mais bien à celui qui la démontre.

Arrivons maintenant aux voyages aériens ; a-t-on trouvé encore un grossier à peu près tel que celui de $\pi = 3.14$ pour garder la direction, ou encore comme on le fait sur mer? Non, rien encore. Pour le grand œuvre a-t-on pu seulement obtenir du plomb rien qu'avec de la matière sans prix? Non. Pour le mouvement perpétuel a-t-on pu construire une pompe qui pourrait marcher pendant mille ans? Non, rien encore de semblable n'a paru.

Pour la quadrature du cercle le théoricien a su trouver pour π 155 chiffres, et l'erreur est au bout de cette kirielle de figures. N'a-t-il pas de même trouvé des constructions à satisfaire complètement son esprit pour

quarrer le cercle et le rectifier? (Voir Montucla, pag. 272 et 276.) Donc je conclus que les trois questions ci-dessus ne doivent pas être comparées du tout avec la quadrature du cercle, parce que le géomètre praticien peut fournir une quantité fabuleuse de moyens graphiques approchés excessivement supérieurs à tous les besoins humains (ce que nous démontrons aux articles (7), (9), etc., et bien certainement plus solides que la construction parfaite tant désirée et qui serait, il est à parier, sans réduction; donc le praticien n'a rien à désirer, tandis que pour les trois questions plus haut on ne peut rien offrir absolument de semblable; donc rien de plus illogique ou de plus stupide à nos yeux que de comparer la quadrature du cercle aux trois questions précitées ci-dessus.

Je dis plus encore : les moyens et les formules empiriques employés dans l'astronomie pratique et sur mer, et dans les ponts-et-chaussées, faute de mieux, ont-ils l'approximation du fameux rapport de Pierre Métius (art. 2, 6e rapport)? Sans hésitation aucune nous dirons non. La distance de la terre au soleil est-elle connue à cela près? Connaît-on de même l'épaisseur à donner à la clef des voûtes de pont et aux culées? La résistance des matériaux est-elle connue à cela près? Non. Eh bien, cela n'empêche pas qu'à chaque instant on construit néanmoins dans toute l'Europe, etc., une infinité de ponts en pierres, en briques ou en moellons, droits ou obliques, à voûtes excessivement surbaissées, etc.

Remarquez bien que la quadrature du cercle à toute rigueur n'est jamais qu'un problème de luxe et nullement d'utilité, car en pratique jamais ce cas ne se rencontre (*a*). Que de géomètres sont morts sans avoir quarré un seul cercle, et cependant la quadrature approchée que nous venons de donner a une précision excessivement supérieure à celles qui reviennent aux observations des marins et aux travaux d'art cités ci-dessus, moyen que l'ingénieur met continuellement en pratique. Pourquoi est-on si difficile à l'occasion de la quadrature pratique du cercle et si facile ou si complaisant pour tant d'autres questions? Quant à nous nous ne pouvons l'expliquer que de cette manière : 1° par ignorance; 2° parce qu'on s'appuie sur le passé et sur le ridicule bien mérité que s'attirent nos pauvres quadrateurs par leurs paralogismes épouvantables, comme aussi sur les expressions suivantes : *à peu près, à environ, approché, approximatif*, etc., comme qui dirait trouver la surface d'un cercle *grosso modo;* je le répète, ce sont ces mêmes expressions vagues, incertaines et incomprises qui font naître à chaque instant de pauvres quadrateurs, à qui il semble que l'on n'a que grossièrement la circonférence du cercle ainsi que sa surface, et,

(*a*) C'est tout au plus un problème graphique pour exercer la main des élèves.

dans leur tête détraquée, ils vont jusqu'à prendre l'ombre pour la lumière, ou encore c'est l'affreux cauchemar incessant qu'on nomme *folie!!!*

Feu M. Arago, dans son *Astronomie populaire*, emploie les expressions suivantes : *exactitude, précision* ; il serait à désirer que les auteurs de nos jours vinssent à les accueillir (en copiant MM. Amiot et Cirodde, c'est-à-dire en donnant quelques constructions graphiques applicables au cercle), car il est vraiment choquant de lire dans des ouvrages élémentaires : *trouver à peu près la surface d'un cercle de* 300 *mètres de diamètre en employant* 113 *à* 355? Voir l'application que nous avons faite en tête de la présente conclusion ; les deux erreurs seraient trois fois plus petites encore, et voilà l'à peu près. Peut-on s'imaginer qu'une vétille semblable soit la cause de l'emploi d'expressions aussi vagues qu'incertaines, lorsque l'on a à son service, si l'on veut : 7, 9, 11 chiffres (voir art. 2), 35 chiffres, et enfin 155 chiffres? (Voir Callet, Desdouits et Montucla.) En un mot comme en cent, le praticien a sa quadrature polygonale ou du cercle, et il n'a que faire de l'autre (voir articles 2, 7 et 9).

Ainsi, cher lecteur, n'écoutez plus les cris sauvages du détracteur de toutes choses, ou encore ceux du chicaneur, parce que l'un et l'autre vont pour ainsi dire jusqu'à nier le soleil, en poussant l'audace jusqu'à attaquer le dernier positif avec un cynisme aussi choquant que révoltant. Nous avons fait voir que nous possédons pour π 155 figures ; rien que ce chiffre effrayant, hors de notre portée, suffit pour les confondre du coup, et, afin de les écraser tout-à-fait, le calcul des éclipses est là, et ce qui va suivre :

1° Faites de Pythagore, d'Archimède et d'Euclide des hommes qui auraient douté de la géométrie, etc., le premier aurait-il découvert son fameux théorème du carré de l'hypoténuse et la table qui porte son nom? Le second aurait-il trouvé son rapport de 7 à 22; la quadrature de la parabole ; son étonnant problème : que la surface convexe du cylindre est égale à celle de la sphère inscrite ; la vis qui porte son nom, etc.? Le troisième son beau et admirable code qu'on nomme Géométrie et qui règne encore?

2° Si Christophe-Colomb avait douté de la rondeur de la terre et de l'astronomie aurait-il découvert l'Amérique, et plus tard trouvé son éclipse de lune à la Jamaïque?

3° Si le baron Néper avait douté des mathématiques, etc., aurait-il découvert ces nombres magiques qu'on nomme logarithmes? les tables des sinus et tangentes existeraient-elles (Tables de Lalande, de Callet, etc.)?

4° Si M. Daguerre avait douté de la chimie aurait-il résolu son phénoménal problème?

5° Si M. Le Verrier avait douté de la gravitation aurait-il découvert Neptune?

6° Enfin si, de nos jours, on avait douté de la physique, etc., les chemins de fer et la télégraphie électrique existeraient-ils? Si le scepticisme avait toujours prévalu que serions-nous donc?... Des sauvages, ou pour le moins des barbares. Voici comment, en amant sincère, je défends la belle et admirable *géométrie*.

31. *Tableau des formules employées ci-dessus.*

Pour le cercle on a les formules suivantes : nous adoptons $\pi = 3.1416$.

(1re) $3.1416 \times D$ ou le diamètre $= C$ ou la circonférence revenant au diamètre D donné;

(2e) $3.1416 \times \frac{1}{2}$ R ou la moitié du rayon $= \frac{1}{4}$ C ou le quart de la circonférence;

(3e) $3.1416 \times \overline{R}^2 = S$. $\overline{R}^2$ = le carré du rayon, ou encore $\pi \times R \times R = S$ ou la surface du cercle dont le rayon R est connu ou donné;

(4e) 1.5708 $(\frac{1}{2}\ \pi) \times R = \frac{1}{4}$ C ou le quart de la circonférence;

(5e) $\frac{1}{4}$ C $\times$ D $=$ S (ou le quart de la circonférence multiplié par le diamètre donne pour produit la surface du cercle dont le diamètre D est donné). Donc la surface du cercle est égale à celle du rectangle dont la base est égale au quart de la circonférence et la hauteur égale au diamètre du cercle donné;

(6e) $1.772454 \times R = c$ ou le côté du carré équivalent au cercle donné et $c \times c = \overline{c}^2 = S$, en vertu de la seconde méthode de quarrer le rectangle on a (fig. 7) l'angle gAB toujours le même, soit que le rayon devienne ou plus grand ou plus petit; donc les rayons sont réciproquement proportionnels, ou encore on a des triangles rectangles isogones comme les triangles rectangles Afg ou AgB; donc, etc.;

(7e) $\frac{1}{2}\ \pi - 1 = 0.5708 \times R = B$, ou la base du triangle rectangle extérieur Abe (fig. 7), lequel est équivalent au segment adjacent du quart du cercle (art. 20).

(8e) $0.2854 \times \overline{R}^2 = s$ ou $0.2854 \times R \times R = s$ ou la surface du segment de l'angle droit et équivalent aux triangles rectangles extérieurs Abe (fig. 7) et IAH (fig. 9).

(9e) $1.1416 \times \overline{R}^2 = S$ ou la surface des quatre parties segmentales du cercle.

Formules pour l'hexagone : A *représente son apothème*, P *son périmètre et enfin* c *le côté du carré équivalent, et on a :*

(10e) $1.73205 \times A = \frac{1}{4}$ P ou le quart du périmètre, et $\frac{1}{4}$ P $\times$ 2 A $=$ S ou surface;

(11e) $1.86121 \times A = c$ ou le côté du carré équivalent à l'hexagone donné, et $\overline{c}^2 = S$.

Formules pour la cycloïde : b = *la demi-base*, D = *le diamètre de son cercle générateur, et* c = *au côté du carré équivalent à la cycloïde donnée.*

(12e) 0. 63662 × b = D ou le diamètre du cercle générateur, ou encore égale à la base de la quadratrice de Dinostrate ;

(13e) 1. 5708 × D = b ou la demi-base de la cycloïde, le diamètre générateur D étant donné ;

(14e) 0. 977205 × b = c ou le côté du carré équivalent à la cycloïde dont la demi-base b est connue ou donnée, et $\overline{c^2}$ = S ou sa surface.

Formules pour l'ellipse : a *est la moitié du grand axe et* b *la moitie du petit axe.*

(15e) 3. 1416 × a × b = S ou la surface de l'ellipse ;

(16e) 0. 2854 × a × b = s ou la surface du segment du quart de l'ellipse ;

(17e) 1. 1416 × a × b = S ou la surface des quatre parties segmentales de l'ellipse ;

(18e) $\sqrt{S}$ = c ou le côté du carré équivalent à l'ellipse dont la surface S est connue ; cette formule ne peut se simplifier ou être remplacée par une autre dite équivalente, telles que les formules (6e), (11e) et (14e), vu que les ellipses ne sont point proportionnelles entre elles, parce que le rapport entre les axes varie à l'infini. Donc, de rigueur, il faut en venir à faire une extraction de racine carrée, si on n'a pas de tables où l'on puisse trouver à vue la racine dont on a le carré.

Ce tableau est donné au professeur afin d'aider l'élève à s'en servir ; il pourra donc lui donner de nouveaux problèmes à résoudre, soit graphiquement soit numériquement, et qui seront aussi instructifs que piquants pour le dernier. Si notre petit travail pouvait convenir, plus tard nous donnerions bien des choses que nous n'avons pu donner ici, parce que nous craignons de ne pas réussir (*a*).

FIN DE LA GRAPHIE BONIFIÉE

APPLIQUÉE SEULEMENT AUX CONSTRUCTIONS GRAPHIQUES APPROCHÉES.

(*a*) Vers la fin du mois d'avril, et par hasard, il nous tombe sous la main la Géométrie de M. H. Sonnet ; nous y trouvons une bien belle construction graphique et tout-à-fait dans le genre des nôtres. Sa description est toute théorique ; les lignes sont trop longues ; elle répète notre seconde construction (article 6), menez une tangente indéfinie en D, côté gauche (fig. 1re), la tangente que vous obtiendriez serait deux fois

plus grande que HC. Son approximation est égale à $\frac{1}{492,000}$ près $<$: sa limite peut s'étendre jusqu'au cercle de 111,000 mètres de diamètre. Un tel cercle dans la pratique des arts existe-t-il? Sa réduction est égale à la huitième partie. Ainsi l'auteur parle d'erreurs graphiques inévitables, et précisément sa construction la réduit à environ la huitième partie, et c'est ce que peut démontrer le calcul. (Voir art. 7 et 8.) En un mot comme en cent, c'est une magnifique construction, et elle efface du coup tout ce que les anciens avaient pu trouver. A cette construction-là l'orange!...

PRÉDICTION APPROCHÉE DES ÉCLIPSES.

1. *Fragments sur la Méthode de M. de La Hire pour retrouver les éclipses passées et prédire celles qui auront lieu dans une année donnée quelconque, et que nous avons excessivement bonifiée et simplifiée, et où la graphie joue aussi un très beau rôle; pour le moment nous ne donnons que ce qui suit :*

2. Voici comment Paulian, dans son *Dictionnaire de Physique*, au mot *éclipse*, donne la méthode de M. de La Hire : « L'époque d'une éclipse de soleil, pour une année quelconque étant donnée, savoir s'il y aura véritablement éclipse? » Voici les inconvénients que nous y trouvons : 1° il faudrait partir du 8 de janvier 1701 jusqu'à 1870, ce qui donnerait cent soixante-neuf années ; le nombre de jours devrait se multiplier par 24 pour avoir des heures ; même chose pour une lunaison. Pour les autres éléments en degrés, etc., il faut les multiplier par 4 pour avoir des quarts de minute, ce que nous n'expliquons pas, puis il faut ajouter une certaine quantité égale à l'éloignement de la lune à son nœud pour le 8 de janvier 1701, ou nouvelle lune, et sans qu'il y eût éclipse ce jour-là ; en somme on aurait une forêt de chiffres. Enfin le reste, qui est le plus piquant, où la force moyenne de l'éclipse est noyée ou perdue dans le reste gonflé mal à propos, et dont on ne peut comprendre en aucune manière la signification, voici comment nous la présentons à notre lecteur :

3. Articles préliminaires. — *Premièrement.* Obtenez les jours qui sont contenus dans les deux époques, c'est-à-dire de la lune de base du 31 décembre 1842 (ce jour-là il y eut éclipse de soleil presque à zéro degré du nœud), et l'époque de l'éclipse de soleil donnée;

Deuxièmement. Le mois synodique où une lunaison vaut 29 jours 53 (*a*) pour un petit nombre de lunaisons ;

Troisièmement. *n* est égal au nombre rond de lunaisons contenues entre les deux époques. (Voir *premièrement.*)

Première opération. Les jours ci-dessus étant trouvés, on les divisera par le mois synodique égal à 29 jours 53, etc. (*deuxièmement*), le quotient que l'on obtiendra sera égal à *n* (*troisièmement*).

Formule $\frac{n \times 30^{\circ}\ 67}{480^{\circ}} = (Q) + R$ *que nous allons expliquer :*

Quatrièmement. 30° 67 (pour un petit nombre de lunaisons ou *n*) (*troi-*

(*a*) Quand le nombre de lunaisons sera un peu grand il faudra prendre 29 j. 53058877, et entre les deux, 29 j. 5306.

sièmement) est la vitesse de la lune dans son orbe, plus celle de son nœud, marchant en sens contraire dans le mois lunaire, et pour n un peu grand il faudra prendre 30° 67053;

Cinquièmement. 180° est la distance qu'il y a d'un nœud à l'autre, ou nœuds ascendant et descendant, partant, diamétralement opposés;

Sixièmement. Q est un quotient que l'on néglige ici et qui marque les demi-tours faits par la terre et la lune; il sert à désigner aussi le nœud où l'éclipse a lieu;

Septièmement. R est le reste qui marque la force de l'éclipse; le reste au-delà du nœud est trouvé du coup; mais avant le nœud, et quand on a pour reste ou encore une longitude presque égale à deux angles droits, on la retranchera de 180° et cette différence sera la force moyenne de l'éclipse $=$ R;

Huitièmement. La limite moyenne des éclipses de soleil vaut 16° 8, et la limite des éclipses de lune vaut 10° 6 avant et après le nœud formant les deux arcs suivants : pour le premier cas, ci : 33° 6, et pour le second, 21° 2; donc, vu la dimension de ces deux arcs, une éclipse un peu forte est immanquable. Si le reste R ci-dessus est plus petit que l'une quelconque des limites précitées, il y aura infailliblement éclipse, soit de soleil soit de lune; cependant si le reste R s'approche de l'une quelconque des deux limites ci-dessus, il faut regarder l'éclipse comme étant *douteuse*, qui veut dire bonne si elle a eu lieu où si elle doit se reproduire, et nulle dans le cas contraire; c'est une réserve;

Neuvièmement. Limites des éclipses totales de soleil et de lune : pour les premières 10° 6 et pour les secondes 5 degrés environ; ici il y a encore incertitude, parce que les corrections lunaires peuvent rendre une éclipse totale partielle et *vice-versâ;* donc, etc.

Dixièmement. Pour les éclipses de lune on prendra pour base celle du 26 décembre 1833, qui a eu lieu à 0° degrés du nœud, $c\ q\ f\ s\ t$, et c'est ce qui simplifie la formule $\frac{n \times 30°\,67 \pm r}{180°} = (Q) + R$ (voir plus haut), ou $\pm r$ ne figure plus; donc, etc.

Onzièmement. Seconde opération. On multipliera 30° 67 par n ou le nombre rond de lunaisons trouvé, on aura un produit que l'on divisera par 180°, et le reste donnera la force moyenne de l'éclipse à vérifier. Voici pour éclairer la question les trois cas que nous allons traiter. (Nos nombres entiers sont toujours suivis de fractions décimales qui remplacent les heures, les minutes, les secondes, etc.; avec leur secours les opérations deviennent plus simples et plus faciles).

4. Y a-t-il eu éclipse de lune le 7 février 1860, et éclipse de soleil le 18 juillet 1860? Y aura-t-il éclipse de soleil le 21 décembre 1870?

Premier problème. (Voir *dixièmement* ci-dessus, base des éclipses de une.) Du 26 décembre 1833 au 26 décembre 1859 on a 26 ans et 365 j. 24 × 26 = ... 9,496 j. 24
lus, du 26 décembre 1859 au 7 février 1860, on compte, ci 43 j. »

Jours écoulés depuis le 26 décembre 1833 jusqu'au 7 février 1860, ci..... 9,539 j. 24

Première opération (voir plus haut). On a 9,539 j. 24 ≃ 29 j. 53 = 323 lunaisons = *n* (voir *troisièmement*) (*a*). Seconde opération (voir *nzièmement*). 30° 67 (*quatrièmement*) × *n* = 323 = 9,906° 4 ≃ 180° *cinquièmement*) = (55 = Q (*sixièmement*) + R = 6° 4 pour la force de 'éclipse, et après le nœud (valeurs moyennes), comme ce reste est bien lus petit que 10° 6 (voir *huitièmement*), donc effectivement il y a eu éclipse le lune le 7 février dernier, éclipse que nous avons vue.

Second problème. Pour les éclipses de soleil (voir *premièrement*) du 31 léc. 1842 au 31 déc. 1859, on a 17 ans et 365 j. 24 × 17 = ... 6,209 j.
lus du 31 décembre 1859 au 18 juillet 1860, on compte ci.... 200 j.

Jours écoulés entre les deux époques, ci..... 6,409 j.
= 29 j. 53 = 217 lunaisons = *n*, et 30° 67 × 217 = 6,655° 4 ≃ 180° = 36) + 175° 4; finalement 180° — 175° 4 = R = 4° 6 avant le nœud voir *huitièmement*); donc il y a eu infailliblement éclipse de soleil le 18 uillet 1860.

Troisième problème. Du 31 décembre 1842 au 31 décembre 1870, on a 28 ans et 365 j. 24 × 28 = ... 10,227 j.
Moins du 21 décembre au 31 décembre = ... 10 j.

Jours à écouler entre les deux époques, ci ..... 10,217 j.
= 29 j. 53 = 346 lunaisons = *n*, et 30° 67 × 346 = 10,611° 8 ≃ 180° = 58) + 171° 8, et finalement 180° — 171° 8 = R = 8° 2 avant le nœud voir *huitièmement*), donc il y aura immanquablement éclipse de soleil le 21 décembre 1870, donc nos trois questions sont résolues.

5. C'est ainsi que Paulian applique la méthode ci-dessus; mais on peut l'appliquer au cas cité (voir 1); ce cas exige parfois la connaissance des nombres d'or et des épactes, un peu trop ignorés de nos jours; c'est ainsi

(*a*) De courtes périodes comme dans le cas présent peuvent donner quelques heures en plus ou en moins; cette différence peut transporter la date vers le jour d'avant ou l'après, néanmoins la force de l'éclipse peut augmenter ou diminuer de un degré, et par cela même l'éclipse devient immanquable. (Voir *huitièmement.*)

que nous l'avons employée à la recherche de l'éclipse de lune dont s'est servi Christophe Colomb pour obtenir des vivres qui lui manquaient à la Jamaïque. D'après plusieurs auteurs ce serait dans l'année 1504 qu'aurait eu lieu cette éclipse; mais nous avons trouvé dans la vie de ce grand homme, écrite par son fils, à la Bibliothèque impériale de Paris, en novembre dernier, que cette même éclipse s'est produite en 1503 et non en 1504, mais pas de date; or, en 1504, il y eut deux éclipses de lune et trois de soleil, et en 1503 une seule éclipse de lune et deux de soleil. Comme en 1504 il y avait deux éclipses de lune, la méthode ne pouvait donc procurer l'éclipse en question, parce qu'elle ne donne pas rigoureusement *les époques des syzygies, partant ni la visibilité;* mais comme en 1503 il n'y a eu qu'une éclipse de lune, le 6 septembre (style Julien), donc c'est l'éclipse demandée, s'il faut s'en rapporter à l'ouvrage cité ci-dessus.

6. Cette piquante méthode, à la portée de tout le monde, nous a permis d'établir un tableau d'éclipses composé de trois nouvelles périodes de 358 lunaisons chacune, périodes que nous avons obtenues ainsi qu'il suit : Nous avons vérifié cette période à la Bibliothèque impériale à Paris, pas d'erreur pour les éclipses de lune; la méthode n'a été en défaut que pour une éclipse partielle de soleil de 14° 3, c'est une éclipse exceptionnelle qui figurait au-dessous de notre tableau des éclipses (voir Ve remarque); 180° est la moitié de l'écliptique, 30° 67053 est la vitesse de la lune plus celle du nœud dans un mois synodique; soumettant ces deux éléments $\frac{180°}{30°\ 67053}$ au calcul des fractions continues, on a pour rapports rompus approchés $\frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{7}{44},\ \frac{8}{47},\ \frac{15}{88},\ \frac{23}{135},\ \frac{38}{223},\ \frac{61}{358},\ \frac{465}{2,729},$ etc. Les numérateurs représentent les demi-circonférences et les dénominateurs des lunaisons.

Preuve. Si on applique le même calcul à la moitié de la révolution synodique du nœud, et la valeur d'une lunaison ou $\frac{173\text{ j. }509916}{29\text{ j. }530584}$ on a absolument comme dessus les huit premiers rapports, et pour le neuvième $\frac{587}{3445},$ etc.

Ces rapports sont forts remarquables : le premier, 1 à 5, marque que parfois on peut avoir des éclipses au bout de cinq mois; le second, 1 à 6, marque généralement que tous les six mois il y a éclipse; les trois rapports qui suivent sont de petites périodes approchées; la période 23 à 135 ramène la même éclipse presque au bout de 135 lunaisons, donnant un degré d'erreur tous les 21 ans; le rapport 38 à 223 est la période chaldéenne ramenant les éclipses dans le même ordre et presque avec les mêmes grandeurs au bout de 223 lunaisons, donnant un degré d'erreur tous les 38 ans, et enfin le suivant, 61 à 358, est la nouvelle période de 358 lunaisons, donnant l'erreur d'un degré tous les 579 ans; cette période a quinze fois plus de précision que la période chaldaïque de 223 lunaisons,

ou 18 ans et 11 jours environ. La nouvelle période de 358 lunaisons ramène les éclipses dans le même ordre et presque avec les mêmes grandeurs au bout de 29 ans moins 20 jours ; donc cette nouvelle période doit être préférée à la période chaldéenne. Plus tard nous dirons un mot au sujet des deux derniers rapports ci-dessus. Nous avons dressé un tableau de douze périodes anciennes et nouvelles, ramenant les éclipses, etc., fort curieux, qui figure à la suite de notre tableau des éclipses.

Avec le même calcul que dessus on peut faire concorder l'année tropique et l'année lunaire ; effectivement on a le rapport approché 1727 est à 1780, on encore 1727 années tropiques valent 630,773 j. 31, et 1780 années lunaires valent 630,773 j. 38, les années lunaires donnant en plus 0 j. 07, ou un jour en plus au bout de 28,000 années tropiques (valeurs de nos jours). Ainsi, au bout de 1727 années tropiques, le soleil et la lune se retrouveront exactement au même point de départ ; ce cycle vaut un peu mieux que celui de Méthon.

De nos jours la recherche des périodes ou des cycles est à la portée des élèves auxquels on a appris le calcul des fractions continues, que nous nommons calcul des rapports rompus approchés (7). Voici comment les musulmans ont établi leur calendrier (12 mois lunaires ou année) :

Année lunaire vaut 354 j. 367065 × 30 = ...	10,631 j. 01195
Moins 354 j. × 30 = ...	10,620 j.
(que l'on intercalle dans les trente années ci-dessus).	
En plus, ci	11 j. 01195

On voit clairement que le nombre qui pouvait faire le mieux disparaître la fraction de jour est 30, comme le nombre 36 pour l'année lunaire de dix mois : on obtient ces nombres par des essais successifs ; pas de mérite ici. Quant au reste 0 j. 01195, il ne donne qu'un jour d'erreur au bout de 2,500 ans environ (valeurs de nos jours).

8. La fameuse éclipse totale de soleil du 18 juillet dernier, pour l'Espagne et Alger, a été fort loin de donner l'obscurité annoncée par le Bureau des Longitudes : la lumière artificielle a été inutile. L'ignorance engendre la frayeur, et cette dernière nous fait voir même ce qui n'existe pas.

Voici ce qui m'a le plus étonné : c'est que l'axe du cône d'ombre de la lune ou encore la bande obscure a coupé le méridien passant par Pampelune sous l'angle de 36° environ, et son parallèle sous celui de 54°. L'inclinaison de l'écliptique vaut 23° 30′ environ, plus 5° pour le plan de l'orbe lunaire, font 28° 30′ au lieu de 54° (voir plus haut). Le Bureau des Longitudes devrait nous donner une petite notice dans l'Annuaire de l'année prochaine à ce sujet. De tous les auteurs que j'ai pu lire, pas un seul ne cite ce cas piquant.

Pourquoi avons-nous appliqué la méthode ci-dessus aux éclipses de soleil du 18 juillet 1860 et du 21 décembre 1870? C'est que ces deux éclipses sont très fortes pour Paris, et dans le reste du siècle il n'y en aura pas une autre. Nous avons trouvé, par le calcul, que le diamètre du cône d'ombre de la lune pour le maximum et pour l'Espagne est égal à 47 lieues $\frac{1}{5}$ de 25 au degré, et pour l'équateur, 44 lieues. Nous avons puisé les éléments principaux dans l'Annuaire du Bureau des longitudes.

9. M. Babinet s'exprime ainsi dans son quatrième volume, page 32 : « Calculer une éclipse qui a eu lieu il y a deux mille ans est tout aussi pé- » nible et incertain que d'en prédire une pour l'an 3855.» Herschell, article 636, note, page 495, nous apprend que, dans certains cas, la date d'une éclipse peut être fixée avec précision. « Voyez les *Phil. Trans.* pour 1817, » les calculs remarquables de M. Baily sur l'éclipse qui a mis fin à la bataille entre les rois de Médie et de Lydie, l'an 610 avant Jésus-Christ. » *Astronomie populaire,* par feu M. Arago, tome 3e, page 157 : « La date » correspondante à une éclipse totale dans l'Asie-Mineure, où les deux » armées se rencontrèrent (les Mèdes et les Lydiens), est le 30 septembre, » 610 avant Jésus-Christ. Ainsi se trouve réglé, par un calcul astronomi- » que, un point de l'histoire ancienne sur lequel les opinions avaient tant » varié.

Application de la Méthode de M. de La Hire à l'éclipse ci-dessus, sans aucune correction :

Du 31 décembre 610 avant Jésus-Christ au 31 décembre 1842 de notre ère on compte 2,451 ans × 365 j. 25 (moins 12 jours, différence entre les calendriers grégorien et julien), ci..... 895,216 j.
Plus, du 30 septembre au 31 décembre — 610 = ... 92 j.

Nombre de jours écoulés, ci..... 895,308 j.

Et 895,308 ≈ 29. 5306 = n = 30,318 lunaisons, ou encore 29 j. 53058877 × 30,318 = 895,308 j. 384, à pas un jour de différence pour 2,451 ans. Et 30° 67053 × 30,318 lunaisons = 929,869° ≈ 180° = (5165) + 169°; et 180° — 169° = 11° pour la force de l'éclipse ci-dessus.

Eclipses de l'année 610 avant Jésus-Christ.	Avant le nœud.	Après le nœud.
Éclipse de lune le 22 mars	8° 335	»
— de soleil, le 6 avril	»	7°
— de lune, le 15 septembre	4° 335	»
— de soleil, le 30 septembre (voir plus haut).	»	11°

Avoir la force moyenne d'nne éclipse pour une année quelconque c'est avoir les autres, vu que la différence entre deux éclipses consécutives de soleil ou de lune est toujours égale à 4° (voir le tableau); les dates sont plus coûteuses à trouver. Plus tard nous apprendrons le moyen le plus court et le plus solide pour obtenir le tableau pour une année quelconque donnée.

Comme ces quatre éclipses sont très fortes, un degré en plus ou en moins ne pourrait donc en faire disparaître une seule; donc en — 610 il y a eu les quatre éclipses ci-dessus, sans rien affirmer pour les dates, à l'exception de la dernière. Donc la méthode ci-dessus est des plus exquises, donc elle valait bien la peine que nous vinssions à l'exhumer de la poussière du passé (*a*)!...

10. Si nous avons bien compris Francœur (page 498), la variation séculaire du mois synodique vaut 0 j. 000000313 : en plus, en arrière, et en moins, en avant, sauf erreur. Cette fraction de jour en donne un en plus au bout de douze mille ans en arrière, et en moins, en avant. Notre période de base de 358 lunaisons s'approchera de son règne dans quarante mille ans d'ici; donc, plus nous irons, plus de précision aura cette période, parce qu'elle donne un résultat un peu plus grand qu'il ne faut. Quant à la période chaldaïque elle deviendra de plus en plus fautive, vu qu'elle donne un résultat beaucoup plus petit qu'il ne faut. Pour trouver son règne dans le passé il faudrait que le mois lunaire devînt plus grand que 29 j. 53263117 (Francœur, pag. 400, note). Le mois lunaire, il y a cinq mille ans, valait 29 j. 5307443; différence, 0 j. 00188687. La révolution synodique de la lune peut-elle s'élever jusque-là? La différence entre le mois lunaire, il y a cinq mille ans, et le mois de nos jours, vaut 0 j. 0020424 $\backsimeq$ 50 siècles $=$ 0 j. 00004085 par siècle, fraction bien plus grande que la première. (Voir plus haut.) A l'homme compétent de nous dire le dernier mot à ce sujet; pour nous c'est un vrai brouillard que le passé, et M. Babinet pourrait bien avoir quelque peu raison : dans deux mille ans d'ici nos petits neveux en sauront plus que nous, et cela sans être astronomes, ce que nous ferons voir plus tard.

11. La méthode ci-dessus nous permet d'annoncer et d'affirmer que, le 13 juillet de l'an 622 de notre ère, il y eut éclipse de soleil à 12° avant le

---

(*a*) Cette méthode repose sur des mouvements supposés uniformes qui n'existent pas, et cependant on ne manquera pas une éclipse partielle de soleil de 13° environ; et c'est tout ce qu'il faut pour celui qui n'est pas astronome, et nous trouvons que c'est beaucoup.

nœud, et quinze jours plus tard, ou le 28, une éclipse de lune à 3° 3 au-delà du nœud. (Voir art. 7.) Mais l'hégire, d'après divers auteurs, date du 16 juillet 622 (ancien style); un ouvrage donne le 15 juillet 622, et nous venons de trouver que la nouvelle lune eut lieu le 13 juillet. Comme l'année des Turcs est dite lunaire, il est étonnant qu'elle n'ait pas commencé le lendemain de la nouvelle lune, ou encore le 14 juillet de l'an 622 (ancien style). Pour ramener le calendrier grégorien au calendrier julien il faut, de la date du premier, ôter douze jours, le reste marquera la date julienne; ainsi $\frac{13 \text{ mars}}{25 \text{ mars}}$ nous apprend que le 13 mars pour les Russes et les Grecs répond au 25 mars pour nous, et *vice versâ*, le $\frac{26 \text{ mars}}{7 \text{ avril}}$ nous apprend que le 7 avril grégorien répond au 26 mars julien. En 1900 la différence vaudra 13, et toutes les épactes seront diminuées de une unité.

12. *Uranographie* (Francœur) *page* 132 : *Il peut arriver que la lune éclipse à la fois le soleil et une étoile. C'est ainsi qu'en* 755, *pendant une éclipse de lune, la belle planète de Jupiter a été occultée.* La première phrase laisse beaucoup à désirer, même chose dans bien d'autres endroits.

La méthode ci-dessus nous apprend qu'il y a eu dans l'an 755 cinq éclipses, trois de soleil et deux de lune : première éclipse de lune le 29 mai (ancien style), et la seconde le 22 novembre. Quelle est l'éclipse qui se rapporte au cas cité ci-dessus? Ici il y a doute pour nous, ce que nous ferons voir plus tard. Un tel problème ne se donne qu'au maître et non à l'élève; des auteurs d'ouvrages pratiques, soi-disant, donnent les deux questions suivantes : la somme de deux nombres est 64,005, le quotient de la division du plus grand par le plus petit est 84. Quels sont ces nombres et sans recourir à l'algèbre? Trouver, par un procédé graphique, la racine carrée de 258? Comment, ce qui embarrasse le maître n'embarrassera pas l'élève? Je dis plus, c'est abrutir le dernier. Pas *de route impériale dans les mathématiques;* conséquemment pas de subtilités pour l'élève parce qu'un rien l'arrête.

Enfin nous avons poussé ce piquant article des éclipses jusqu'à la portée de nos jeunes demoiselles; nous avons dressé pour elles un instrument procurant les éclipses de soixante-douze années environ, on n'a besoin que de savoir lire; nous le nommons l'Indicateur d'éclipses, donnant la force moyenne de chacune d'elles. Si le specimen ci-dessus convient au public nous pourrions le lui livrer plus tard, plus une arithmétique complémentaire de notre façon, où nous n'avons pas omis l'étonnant et prompt calcul logarithmique; ouvrage destiné à toute personne qui désirerait se fortifier dans les mathématiques : avec du goût, de la persévérance et un peu d'intelligence elle pourra se passer de maître. Sur la tenue des livres en partie double nous faisons voir, clair comme le jour, que l'on peut se

passer du livre-journal. Quant aux fameux *nombres rouges* nous faisons voir de même que ce ne sont que des escomptes; effectivement l'intérêt frappe toujours sur un temps passé ou écoulé et l'escompte sur un temps à venir ou à écouler; donc si on a un compte à établir et qu'il y ait des nombres rouges, on doit l'intituler *compte-courant d'intérêts et d'escomptes*, etc., si on ne veut blesser la raison logique. De nos jours on se sert d'une nouvelle méthode qui fait disparaître les nombres rouges, conséquemment on doit la préférer, etc.

FIN DU CALCUL APPROCHÉ DES ÉCLIPSES.

ERRATA.

Le signe > veut dire plus grand, et le signe < veut dire plus petit.

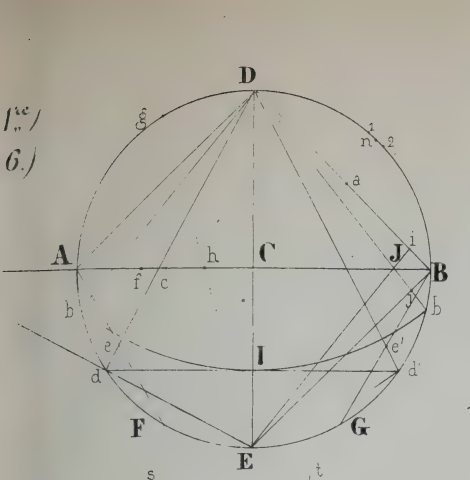
Pag. 16. Observation. Nos, etc..... qu'à trouver des constructions sans réduction, *lisez :* qu'à trouver des constructions à pleines lignes, conséquemment sans réduction.

Pag. 17, second alinéa, ligne 4e, M, *lisez :* M'.

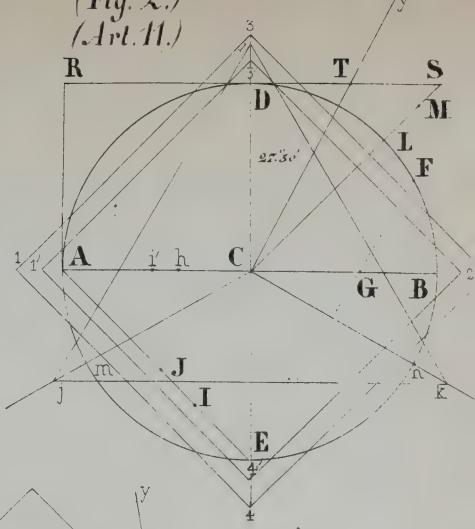
Pag. 19. 2o On s'est donné les point, etc., *lisez :* les points.

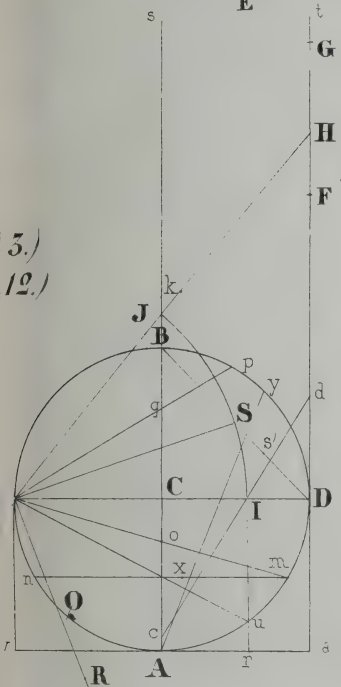
Pag. 44. Art. 4. L'éclipse aura lieu le 22 décembre 1870, et non le 21. (Bouillet.)

Limoges. — Imprimerie DUCOURTIEUX et Cie.

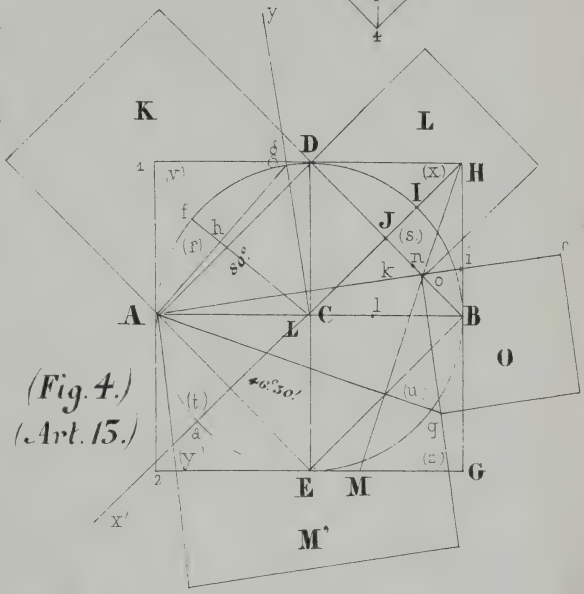


(Art. 11.)

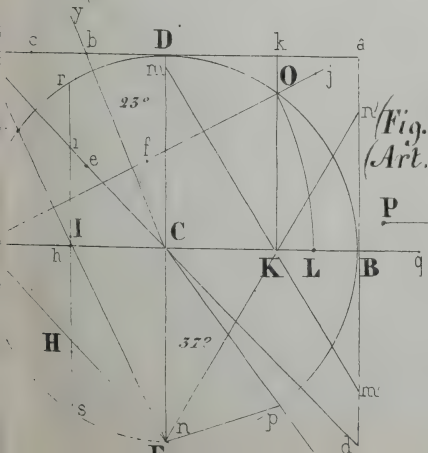




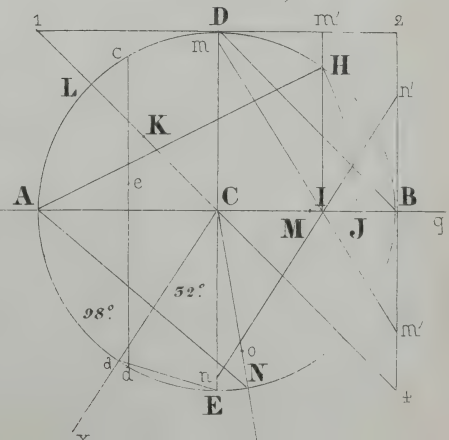
(Fig. 4.)
(Art. 13.)

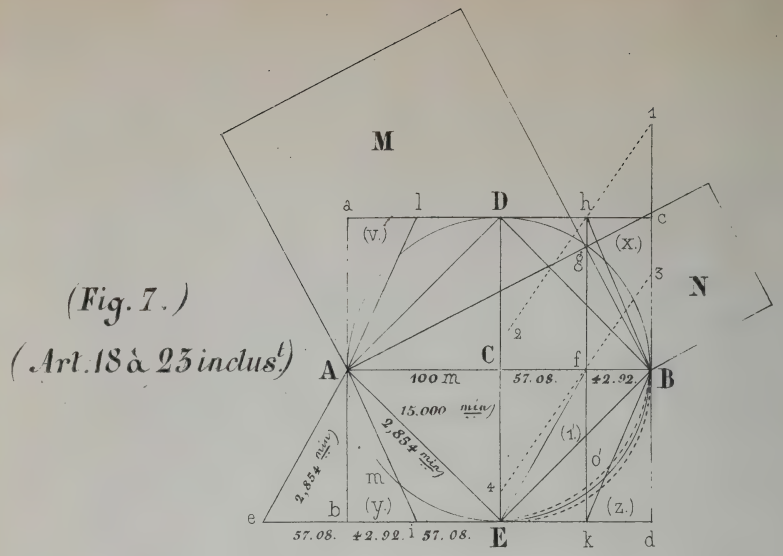


(Fig. 5.)
(Art. 15.)



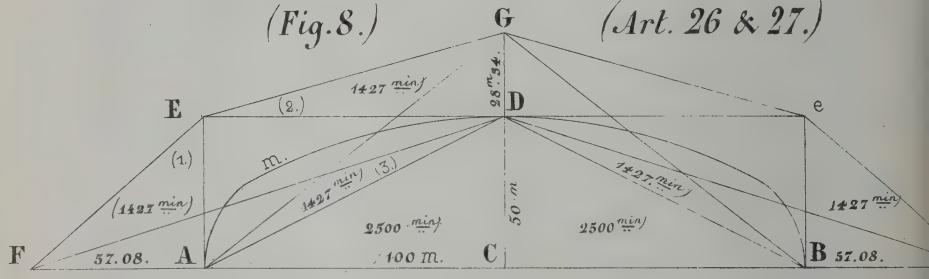
(Fig. 6.)
(Art. 16.)



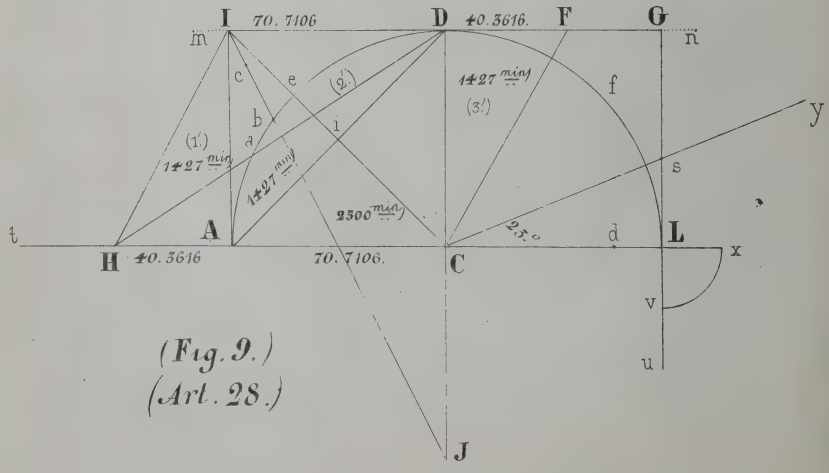


(Fig. 7.)
(Art. 18 & 23 inclus.)

(Fig. 8.)



(Art. 26 & 27.)



(Fig. 9.)
(Art. 28.)

ÜBER DIE ELEMENTE

DER

THEORIE DER EULER'SCHEN INTEGRALE.

INAUGURAL - DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER PHILOSOPHISCHEN DOCTORWÜRDE

VON

RICHARD DEDEKIND.

GÖTTINGEN,

DRUCK DER UNIVERSITÄTS-BUCHDRUCKEREI VON E. A. HUTH.

1852.

Ueber die

Elemente der Theorie der Euler'schen Integrale.

Es ist bekannt, dass die Ausführung der indirecten Operationen in der Analysis meist auf viel bedeutendere Schwierigkeiten stösst, als die der directen: aber gerade dieser scheinbar unglückliche Umstand hat auf die Entwickelung der Mathematik stets den günstigsten Einfluss ausgeübt. Nicht nur, dass die Besiegung dieser Schwierigkeiten, wenn sie möglich, immer einen eigenthümlichen Reiz für den Mathematiker darbietet, sondern auch gerade die Fälle, in welchen dies mit den früher eingeführten Begriffen und Hülfsmitteln nicht möglich war, haben immer der weitern Ausbildung der Mathematik ganz neue Felder eröffnet; so führen z. B. die Operationen der Subtraction, Division und Wurzelausziehung auf die Begriffe der negativen, gebrochenen und imaginären Zahlen, von denen jeder das Gebiet der Mathematik so ausserordentlich erweitert hat. Ganz ähnlich verhält es sich nun auch in der höheren Analysis mit dem ihr zu Grunde liegenden Begriffe der Function, welcher sich Anfangs nur auf die in der Elementarmathematik gelehrten Operationen (die ihnen entsprechenden Functionen könnte man füglich Elementarfunctionen nennen) und auf deren Zusammensetzung stützt. Die Differentialrechnung, der mächtigste Hebel zur Entwickelung der Theorie der Functionen, findet in ihrer Ausführung keine Schwierigkeiten, d. h. das Diferentiiren der aus den Operationen der Elementarmathematik gebildeten Functionen führt wieder auf eben solche Functionen. Dagegen ist es der umgekehrten Rechnungsart, welche in ihrer Gesammtheit die Integralrechnung bildet, nur in verhältnissmässig wenigen Fällen gelungen, dasselbe zu leisten; in den meisten ist es bisher nicht geglückt, oder vielleicht auch ganz unmöglich, die Integrale gegebener Functionen mit Hülfe eben solcher darzustellen. Aber gerade dieser Umstand hat zu einer beträchtlichen Erweiterung des Begriffes der Function geführt, indem man solchen nicht darstellbaren Integralen neue Namen und Bezeichnungen beigelegt, und sie dadurch in den Kreis der früheren Functionen eingeführt hat. Bei der Entwickelung der Theorie solcher Integralfunctionen sind nun namentlich die Fälle von der grössten Wichtigkeit, in denen sie sich auf die bisher allein gebräuchlichen Functionen zurückführen lassen, indem dadurch ihr Verlauf deutlicher hervortritt, und auch oft Mittel an die Hand gegeben werden, ihre Berechnung zu erleichtern. Die Zusam-

menstellung dieser Fälle für die Euler'schen Integrale, mit besonderer Rücksicht auf die dabei anzuwendende Methode, ist der Hauptzweck der folgenden Abhandlung.

1.

Es ist zuerst erforderlich, die Fundamentaleigenschaften der Euler'schen Integrale kurz in Erinnerung zu bringen. Die Definitionen dieser Functionen liegen in den Gleichungen

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx; \quad \Gamma(\mu) = \int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}\,dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Die Integrale rechts heissen Euler'sche Integrale der ersten und der zweiten Art; die ersteren lassen sich leicht auf die letzteren zurückführen. Führt man nämlich in dem Doppelintegrale

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x+y)}\, x^{a-1}\, y^{b-1}\,dy\,dx = \Gamma(a)\,\Gamma(b)$$

für x und y zwei neue Variabeln r und w ein, indem man $x+y=r$ und $x=w$ setzt, woraus $dydx = rdrdw$ folgt, so erhält man

$$\int_0^\infty e^{-r}\, r^{a+b-1}\,dr \int_0^1 w^{a-1}(1-w)^{b-1}\,dw = \Gamma(a)\,\Gamma(b)$$

und daraus zu Folge der Definitionen von B und Γ

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

woraus sich zugleich ergiebt, dass $B(b,a) = B(a,b)$ eine symmetrische Function von a und b ist, was man auch direct zeigen kann, wenn man in dem Integrale $B\,(1-x)$ statt x setzt.

Setzt man in dem Integrale $\Gamma\, rx$ statt x, und nimmt r als eine positive Constante an, so erhält man

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-rx}\,dx = \frac{\Gamma(\mu)}{r^\mu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

und hieraus durch $n$malige partielle Differentiation in Bezug auf r die wichtige Relation

$$\Gamma(\mu+n) = (\mu+n-1)(\mu+n-2)\ldots(\mu+1)\,\mu\,\Gamma(\mu) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Es leuchtet ein, dass man $\Gamma(\mu)$ nur für jedes μ innerhalb eines Intervalls zu berechnen braucht, welches eine Einheit umfasst, um daraus mit Hülfe dieser Gleichung $\Gamma(\mu)$ für jedes andere μ zu finden.

2.

Aus den eben entwickelten Formeln lassen sich wichtige Folgerungen für die Theorie der Euler'schen Integrale ziehen, namentlich in Bezug auf die Fälle, in denen sie sich ohne Hülfe neuer Functionen darstellen lassen. Da die der ersten Art auf die der zweiten zurückgeführt werden können, so beginnen wir mit der Untersuchung der letzteren. Nun ist bekannt,

dass sich bestimmte Integrale jedesmal ermitteln lassen, wenn man die unbestimmten Integrale allgemein darstellen kann (vergl. Art. 6.); die Integralrechnung lehrt aber, dass dies bei dem Integrale

$$\int x^{\mu-1} e^{-x} \, dx$$

nur dann möglich ist, wenn μ eine positive ganze Zahl n ist; wir können also im Voraus schliessen, dass dann auch $\Gamma(n)$ sich wird angeben lassen. Nun haben wir aber in der Gleichung (4) eine Reductionsformel gewonnen, welche uns lehrt, wie eine Gammafunction durch eine andere dargestellt werden kann, wenn ihre Argumente um eine ganze Zahl differiren; nehmen wir also am einfachsten $\mu = 1$, so erhalten wir aus der unbestimmten Integration

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} \, dx = 1 \text{ und folglich } \Gamma(n) = (n-1)\,(n-2)\,\ldots\,2\,.\,1 \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Dies ist aber auch der einzige Fall, in welchem a priori einleuchtet, dass $\Gamma(\mu)$ sich darstellen lässt.

Einen ähnlichen Weg können wir auch bei den Euler'schen Integralen der ersten Art einschlagen, indem wir zunächst die Darstellbarkeit des unbestimmten Integrals

$$\int x^{a-1} (1-x)^{b-1} \, dx$$

untersuchen; dieses gehört bekanntlich zu der Klasse der Integrale von sogenannten binomischen Differentialen, welche unter der allgemeinen Form

$$\int x^m (a + b x^n)^p \, dx$$

stehen; es ist aber bekannt, dass das binomische Differential jedesmal rational und folglich auch integrabel gemacht werden kann, wenn entweder $\frac{m+1}{n}$ oder $\frac{m+1}{n} + p$ eine ganze Zahl ist, und m, n und p rational sind. Damit also das obige unbestimmte Integral darstellbar sei, muss entweder a (oder auch b, da ja $B(a,b) = B(b,a)$ ist) oder $a+b$ eine ganze Zahl sein. Der erste Fall folgt aber auch unmittelbar aus den Formeln (2) und (4); denn wenn a eine ganze Zahl m ist, so geben diese Formeln

$$B(m,b) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(b)}{\Gamma(m+b)} = \frac{\Gamma(m)}{(m-1+b)\,(m-2+b)\,\ldots\,(1+b)\,b}$$

und folglich mit Hülfe von der Formel (5)

$$B(m,b) = \frac{(m-1)\,(m-2)\,\ldots\,2\,.\,1}{(m-1+b)\,(m-2+b)\,\ldots\,(1+b)\,b} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Eben so erhält man, wenn n eine positive ganze Zahl bedeutet:

$$B(a,n) = \frac{(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,2\,.\,1}{(n-1+a)\,(n-2+a)\,\ldots\,(1+a)\,a}; \quad B(m,n) = \frac{(m-1)\,\ldots\,2\,.\,1\,.\,(n-1)\,\ldots\,2\,.\,1}{(m+n-1)\,(m+n-2)\,\ldots\,2\,.\,1}$$

Dagegen liefert der zweite Fall, in welchem $a+b$ eine ganze Zahl, ohne dass a und b gleichzeitig ganze Zahlen sind, unabhängig von den Euler'schen Integralen der zweiten Art, eine neue Klasse von Integralen, von denen man a priori behaupten kann, dass sie sich darstellen lassen: doch können sie alle folgendermaassen auf ein einziges zurückgeführt werden. Ist nämlich $a+b$

eine ganze positive Zahl (positive, weil als bekannt vorauszusetzen ist, dass die Euler'schen Integrale für negative Argumente stets unendlich gross ausfallen), so kann man immer $a = m + r$, $b = n - r$ setzen, worin m und n positive ganze Zahlen, und r ein positiver echter Bruch ist. Mit Benutzung der Reductionsformel (4) findet man dann leicht

$$B(m+r, n-r) = \frac{\Gamma(m+r)\,\Gamma(n-r)}{\Gamma(m+n)} = \frac{(m-1+r)(m-2+r)\ldots r\,\Gamma(r)\,.\,(n-1-r)(n-2-r)\,..\,(1-r)\,\Gamma(1-r)}{(m+n-1)\,(m+n-2)\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,3.\,2.\,1}$$

oder da aus den Gleichungen (2) und (5) $\Gamma(r)\,\Gamma(1-r) = B(r, 1-r)$ folgt,

$$B(m+r, n-r) = \frac{(m-1+r)\,.\,.\,.\,.\,r\,.\,(n-1-r)\,.\,.\,.\,.\,(1-r)}{(m+n-1)\,(m+n-2)\,.\,.\,.\,.\,.\,2.\,1}\,B(r, 1-r) \qquad (7)$$

Das Integral $B(r, 1-r)$, auf welches hierdurch die Integrale $B(m+r, n-r)$ zurückgeführt werden, ist eines der interessantesten der Integralrechnung und namentlich von der grössten Wichtigkeit für die Theorie der Euler'schen Integrale beider Arten, wie schon aus der letzten Gleichung hervorgeht. So einfach aber die Form ist, in welcher der Werth desselben dargestellt werden kann, so verschiedenartig unter einander und complicirt sind die Methoden, welche diesen Werth kennen lehren. Mit diesem Integrale sollen sich daher die folgenden Artikel beschäftigen.

3.

Der Gleichmässigkeit in der Bezeichnung wegen will ich b statt r schreiben, und $B(b, 1-b) = \Gamma(b)\,\Gamma(1-b)$ kurz mit B bezeichnen, so dass B als Function der einen Veränderlichen b aufgefasst wird; zwischen b und B besteht also folgende Gleichung:

$$B = \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^b \frac{dx}{x} = \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{1-b} \frac{dx}{x} = \int_0^\infty \frac{x^{b-1}\,dx}{x+1} = \int_0^\infty \frac{x^{-b}\,dx}{x+1} \qquad (8)$$

Die beiden letzten Formen erhält man, wenn man in den beiden ersten x für $\frac{x}{1-x}$ schreibt.

Wenn nun schon im vorigen Artikel b auf das Intervall zwischen o und 1 beschränkt ist, weil sonst das Integral B als Euler'sches Integral ein negatives Argument und damit einen unendlich grossen Werth erhielte, so soll in diesem Artikel die Nothwendigkeit dieser Beschränkung unabhängig von der Theorie der Euler'schen Integrale in aller Strenge erwiesen werden. Grösserer Allgemeinheit wegen will ich diese Untersuchung nicht unmittelbar an das Integral B, sondern an das allgemeinere

$$\int_0^\infty \frac{1+x+xx+\ldots+x^{m-1}}{1+x+xx+\ldots+x^{n-1}}\,x^{b-1}\,dx = \int_0^\infty \frac{1-x^m}{1-x^n}\,x^{b-1}\,dx$$

anknüpfen, welches für $m = 1$, $n = 2$ in das Integral B übergeht. Die Form rechts erfordert auch nicht einmal, dass m und n ganze Zahlen sind; ich will daher gleich zu der Betrachtung des Integrals

$$\varphi(b) = \int_0^\infty \frac{1-x^\mu}{1-x^\nu}\,x^{b-1}\,dx \qquad (9)$$

worin b, μ, ν beliebige reelle Constanten bedeuten sollen, übergehen.

Zuerst wird man leicht einsehen, dass man μ und ν stets positiv annehmen darf, ohne die Allgemeinheit des Integrals zu beeinträchtigen, indem man statt $1-x^{\mu}$ und $1-x^{\nu}$ auch $x^{\mu}(x^{-\mu}-1)$ und $x^{\nu}(x^{-\nu}-1)$ schreiben kann. Zerlegt man dann $\varphi(b)$ in zwei Integrale von derselben Function, deren Grenzen resp. o, 1 und 1, ∞ sind, und setzt in dem zweiten Integrale $\frac{1}{x}$ für x, so erhält auch dieses die Grenzen o, 1, und beide lassen sich in

$$\varphi(b) = \int_o^1 \frac{1-x^{\mu}}{1-x^{\nu}}\left(x^b + x^{\nu-\mu-b}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

zusammenziehen. Da nun nach der Voraussetzung μ und ν positiv sind, so ist innerhalb der Integrationsgrenzen für x, d. h. wenn x ein positiver echter Bruch ist, der Quotient $\frac{1-x^{\mu}}{1-x^{\nu}}$ fortwährend eine positive endliche Zahl; denn auch für $x=1$ erhält dieser Quotient einen endlichen Werth, nämlich $\frac{\mu}{\nu}$. Bezeichnet man daher den grössten und kleinsten Werth desselben mit M und N, so sind dies ebenfalls endliche positive Zahlen, und es ist im ganzen Integrationsintervalle $M > \frac{1-x^{\mu}}{1-x^{\nu}} > N$, und folglich auch, nach einem bekannten Satze aus der Theorie der bestimmten Integrale

$$M\int_o^1\left(x^b + x^{\nu-\mu-b}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x} > \varphi(b) > N\int_o^1\left(x^b + x^{\nu-\mu-b}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Da nun das Integral, welches zu beiden Seiten von $\varphi(b)$ mit den Factoren M und N vorkommt, die Werthe $\frac{\nu-\mu}{b(\nu-\mu-b)}$, $\pm\infty$, oder $-\infty$ erhält, je nachdem sowohl b als $\nu-\mu-b$ positiv, oder eins von beiden o, oder negativ ist, so folgt, dass nur im ersten Falle $\varphi(b)$ einen endlicheu und zwar positiven, in jedem andern aber einen unendlich grossen Werth erhält; es ist daher erforderlich, dass sowohl b als auch $\nu-\mu-b$ eine positive Zahl sei, was man durch die Bedingung $\nu-\mu > b > o$ ausdrücken kann; hieraus geht zugleich hervor, dass $\nu > \mu$ sein muss. Wird $b=o$ oder $b=\nu-\mu$ so wird $\varphi(b)$ nicht nur unendlich gross, sondern auch unstetig, indem $\varphi(b)$ von $+\infty$ in $-\infty$ überspringt.

Aus der Gleichung (10) lässt sich noch eine interessante Folgerung ziehen; setzt man nämlich $\nu-\mu-b$ statt b, so erhält man unmittelbar

$$\varphi(\nu-\mu-b) = \varphi(b) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

und wenn man hierin $b = \frac{\nu-\mu}{2} + b'$ setzt, in Bezug auf b' differentiirt, und dann $b'=o$ setzt, so folgt $\varphi'\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)=o$, worin $\varphi'(b) = \frac{\mathrm{d}\varphi(b)}{\mathrm{d}b}$ ist; um zu entscheiden, ob der Werth $b = \frac{\nu-\mu}{2}$ einem Maximum oder Minimum von $\varphi(b)$ entspricht, muss man das zweite Differentialverhältniss $\varphi''(b)$ bilden; da dieses durch das Integral

$$\int_0^\infty \frac{1-x^\mu}{1-x^\nu}\, x^{b-1}\mathrm{d}x\,(lx)^2$$

dargestellt wird, worin lx den natürlichen Logarithmen von x bezeichnet, und folglich in dem ganzen Intervalle von b positiv ist, so wird $\varphi\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)$ ein Minimum von $\varphi(b)$ sein, und zwar das einzige. Dieses Minimum wird demnach

$$\varphi\left(\frac{\nu}{2}-\frac{\mu}{2}\right)=\int_0^\infty \frac{x^{\frac{\mu}{2}}-x^{-\frac{\mu}{2}}}{x^{\frac{\nu}{2}}-x^{-\frac{\nu}{2}}}\,\frac{\mathrm{d}x}{x}=2\int_0^\infty \frac{x^\mu-x^{-\mu}}{x^\nu-x^{-\nu}}\,\frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Wenden wir das Bisherige auf unsern Fall an, in welchem $\mu=1$, $\nu=2$ zu setzen ist, so ergiebt sich, dass das Integral B nur dann einen endlichen, und zwar positiven Werth besitzt, wenn b ein positiver echter Bruch ist; ferner dass $B=\varphi(b)=\varphi(1-b)$ ist und für $b=\frac{1}{2}$ ein Minimum

$$\varphi\left(\tfrac{1}{2}\right)=2\int_0^\infty \frac{x-\frac{1}{x}}{xx-\frac{1}{xx}}\,\frac{\mathrm{d}x}{x}=2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{xx+1}=\pi \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

erreicht.

4.

Es sollen jetzt die hauptsächlichsten Beweise angegeben werden, welche bisher für den Werth des Integrales B aufgestellt sind; indessen wird es genügen, kurz den Gang derselben anzudeuten, und nur da, wo eine strengere Begründung nöthig scheint, näher in's Detail zu gehen.

Da schon in Art. 2. gezeigt ist, dass sich der Werth des Integrals $B(m+r,\ n-r)$, von welchem B nur ein specieller Fall ist, aus der unbestimmten Integration ergeben muss, wenn r ein echter rationaler Bruch ist, so ist es am natürlichsten, mit dieser Methode den Anfang zu machen. Nimmt man daher $b=\frac{m}{n}$ an, worin m und n positive ganze Zahlen sind, und $m<n$, so kommt es zunächst darauf an, in dem Integrale

$$B=\int_0^\infty \frac{x^{b-1}\mathrm{d}x}{x+1}=\int_0^\infty \frac{x^{\frac{m}{n}-1}\mathrm{d}x}{x+1}=n\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\mathrm{d}x}{x^n+1} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

die unbestimmte Integration auszuführen, welche bekanntlich die Zerlegung der unter dem Integralzeichen stehenden Function in Partialbrüche erfordert. Setzt man zur Abkürzung $\vartheta=e^{\frac{\pi}{n}i}$, worin $i=\sqrt{-1}$ ist, so ist $x^n+1=(x-\vartheta)(x-\vartheta^3)\ldots(x-\vartheta^{2k-1})\ldots(x-\vartheta^{2n-1})$; führt man danach die Zerlegung in Partialbrüche mit linearen Nennern, und die Integration jedes einzelnen Gliedes aus, so findet man

$$n\int\frac{x^{m-1}\mathrm{d}x}{x^n+1}=-\sum_{k=1}^{k=n}\vartheta^{m(2k-1)}\,l\left(\vartheta^{2k-1}-x\right) \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

Die Summe rechts kann man auch so schreiben:

$$-\sum_{k=1}^{k=n} \vartheta^{m(2k-1)} l\left(\frac{\vartheta^{2k-1}}{x}-1\right) - lx \cdot \sum_{k=1}^{k=n} \vartheta^{m(2k-1)}$$

worin $\Sigma \vartheta^{m(2k-1)} = \vartheta^m \Sigma \left(\vartheta^{2m}\right)^{k-1} = \vartheta^m \frac{\vartheta^{2mn}-1}{\vartheta^{2m}-1} = o$ ist, so dass auch

$$n\int \frac{x^{m-1}\,dx}{x^n+1} = -\sum_{k=1}^{k=n} \vartheta^{m(2k-1)} l\left(\frac{\vartheta^{2k-1}}{x}-1\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

ist; hierbei ist wohl zu bemerken, dass die Summen in (15) und (16) vollkommen gleich, nicht etwa um eine Constante verschieden sind. Setzt man daher in (16) $x = \infty$, und in (15) $x = o$, so giebt die Differenz das bestimmte Integral B, nämlich

$$B = \sum_{k=1}^{k=n} \vartheta^{m(2k-1)} l(\vartheta^{2k-1}) = \frac{\pi i}{n} \sum_{k=1}^{k=n} (2k-1)\vartheta^{m(2k-1)} = \frac{\pi}{\sin b\pi} \quad \ldots \quad (17)$$

womit also der Werth von B für rationale b gefunden ist. Durch die Umformung von (15) in (16) glaube ich am kürzesten gezeigt zu haben, dass die Summe in (15) für $x = \infty$ verschwindet, und hinsichtlich seiner Strenge scheint dieser Weg denen wenigstens nicht nachzustehen, welche in den meisten Lehrbüchern der Integralrechnung befolgt sind.

5.

Ein zweiter Beweis ist der folgende, welcher, so viel mir bekannt ist, von Schlömilch gegeben ist. Aus der Gleichung

$$B = \int_0^1 \frac{x^{b-1}+x^{-b}}{x+1}\,dx$$

welche sich aus der Formel (10) in Art. 3. ergiebt, wenn man $\mu = 1$, $\nu = 2$ setzt, erhält man durch Entwickelung von $\frac{1}{x+1}$ nach Potenzen von x mit Berücksichtigung des Restes, und durch Ausführung der Integrationen für B die $n$gliedrige Reihe

$$\frac{1}{b}+\frac{2b}{1-bb}-\frac{2b}{4-bb}+\frac{2b}{9-bb}-\ldots+(-1)^n\frac{2b}{(n-1)^2-bb} \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

nebst dem Reste

$$\frac{(-1)^{n-1}}{n-b}+(-1)^n\int_0^1 \frac{(x^{b-1}+x^{-b})x^n}{x+1}\,dx$$

Durch ähnliche Betrachtungen, wie die in Art. 3. über die Endlichkeit von $\varphi(b)$ angestellten, lässt sich zeigen, dass dieser Rest für unendlich wachsende n gleich Null wird, so dass B der unendlich fortgesetzten Reihe (18) gleich zu setzen ist. Nimmt man aber in der als bekannt vorausgesetzten Formel

$$\operatorname{cosec} u = \frac{1}{u} + \frac{2u}{\pi\pi - uu} - \frac{2u}{4\pi\pi - uu} + \text{etc.}$$

$u = b\pi$, so findet man unmittelbar für B denselben Werth, wie im vorigen Artikel.

6.

Ein dritter Beweis (von Cauchy) stützt sich auf einen Satz über die sogenannte Umkehrung der Integrationsordnung bei Doppelintegralen. Da die hierhergehörigen Betrachtungen sehr feiner Natur sind, und sich öfters noch Unklarheiten darüber finden, so möge es mir vergönnt sein, hier etwas weiter auszuholen, um ein sicheres Fundament für diese Untersuchung zu gewinnen. Dazu ist aber erforderlich, auf die Grundlagen der Theorie der bestimmten Integrale zurückzugehen.

Das bestimmte Integral wird meistens definirt als Differenz zweier Werthe des unbestimmten Integrals, welche zwei speciellen Werthen der Integrationsvariabelen entsprechen; die letztern heissen die Grenzen des Integrals. So einfach aber diese Definition scheint, so wenig kann sie strengern Anforderungen Genüge leisten, die immer gemacht werden müssen, wenn es sich um die Festlegung einer Basis für eine ganze Theorie handelt. Der Hauptgrund für die Verwerfung dieser Definition liegt vorzüglich in dem Umstande, dass sie nicht unmittelbar auf der eigentlich gegebenen Function fusst, sondern als Mittelglied noch eine andere Function, nämlich das unbestimmte Integral voraussetzt; und dies ist ein Uebelstand in mehrfacher Hinsicht. Einmal ist die Existenz des bestimmten Integrals nicht eher evident, als bis die des unbestimmten nachgewiesen ist; gesetzt aber auch, dass dies allgemein möglich wäre, so fragt sich andererseits, ob nach dieser Definition das bestimmte Integral wirklich ein bestimmtes zu nennen ist, d. h. ob es nur von der gegebenen Function und den Grenzen abhängt. Es ist schon mehrfach gezeigt, dass dies keineswegs der Fall ist, und es sind Fälle bekannt, in welchen diese Definition zu Zweideutigkeiten führt, welche auf diesem Wege allein gar nicht zu heben sind. Ich hoffe nun zeigen zu können, dass das nach dieser Definition aufgefasste bestimmte Integral in jedem Falle vollkommen so unbestimmt ist wie das sogenannte unbestimmte Integral.

Während nämlich die obige Definition schon zu Zweifeln Anlass giebt, wenn es nicht möglich ist, mit Hülfe der bekannten Methoden das unbestimmte Integral darzustellen, so geschieht dies noch in viel höherem Maasse, wenn es mehre, ja unendlich viele Functionen giebt, deren Differential die gegebene Function ist. Es lässt sich zwar strenge beweisen, dass diese Functionen nur um sogenannte Constanten von einander verschieden sein können, und darauf fusst gerade die obige Definition, indem sie stillschweigend voraussetzt, dass der constante Unterschied solcher Functionen wirklich für alle Werthe der Veränderlichen derselbe bleibt. Aber gerade dies ist durchaus nicht nothwendig; man kann sich hingegen denken, dass diese Constante in verschiedenen endlichen Intervallen der Veränderlichen x verschiedene Werthe besitzt, und doch wird in jedem das Differentialverhältniss von $f(x) + C$ dieselbe Function $f'(x)$ sein, vorausgesetzt, dass C seinen Werth nicht stetig mit x verändert, weil dann C nicht mehr eine Constante wäre. Dies leuchtet namentlich geometrisch ein, wenn man $f(x)$ als Ordinate einer

krummen Linie betrachtet; man kann beliebige Stücke dieser Linie parallel der Ordinatenaxe verschieben, ohne dass dadurch $f'(x)$ geändert würde. Mit andern Worten, das erste Differentialverhältniss einer Function giebt nicht den geringsten Aufschluss über die Stetigkeit derselben. Solche Unstetigkeiten lassen sich auch analytisch darstellen, namentlich mit Hülfe der Fourierschen Integrale, noch einfacher aber mit ganz elementaren Hülfsmitteln.

Bei der Zweideutigkeit, welche jeder Quadratwurzel hinsichtlich ihres Zeichens anhaftet, ist es durchaus erforderlich, durch ein bestimmtes Zeichen immer nur die eine Wurzel zu bezeichnen. So ist man auch darin übereingekommen, unter $\sqrt{x}$ stets die positive Quadratwurzel aus x zu verstehen. Die Nothwendigkeit hiervon leuchtet namentlich ein, wenn statt einer Wurzelgrösse ein anderer Ausdruck, z. B. die binomische Reihe gesetzt wird, welche jedenfalls immer nur eine Wurzel ausdrückt. Dies vorausgesetzt, lässt sich leicht ein Ausdruck bilden, welcher zwar mit x sich nicht stetig ändert, also eine Constante ist, aber doch in verschiedenen Intervallen verschiedene Werthe erhält. Ein solcher Ausdruck ist z. B. $C\frac{x-c}{\sqrt{(x-c)^2}}$, welcher gleich $+C$ oder $-C$ ist, je nachdem x grösser oder kleiner als c genommen wird. Durch Differentiation findet man natürlich

$$\frac{\mathrm{d}\left(C\frac{x-c}{\sqrt{(x-c)^2}}\right)}{\mathrm{d}x} = C\frac{\sqrt{(x-c)^2}-(x-c)\frac{x-c}{\sqrt{(x-c)^2}}}{(x-c)^2} = 0$$

und folglich ist auch

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(x)+C\frac{x-c}{\sqrt{(x-c)^2}}\right) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f'(x)$$

Wollte man daher die obige Definition des bestimmten Integrals zur Anwendung bringen, so müsste man aus dem unbestimmten Integrale

$$\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C\frac{x-c}{\sqrt{(x-c)^2}}$$

das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a) + C\frac{b-c}{\sqrt{(b-c)^2}} - C\frac{a-c}{\sqrt{(a-c)^2}}$$

erhalten; nimmt man hierin $a<c<b$, so ist die Summe der beiden letzten Glieder gleich $2C$, so dass das bestimmte Integral noch eine völlig willkürliche Constante enthält.

Hiermit ist wohl das Ungenügende dieser Definition des unbestimmten Integrals dargethan, und wir wenden uns nun zu einer andern, welche direct von den gegebenen Grössen ausgeht; nach ihr ist nämlich das bestimmte Integral als die Summe aller der unendlich kleinen Werthe des gegebenen Differentials aufzufassen, wenn man der Veränderlichen x stetig alle Werthe beilegt, welche zwischen den gegebenen Grenzen des Integrals liegen. Diese Definition lässt wenigstens keine anderen Zweideutigkeiten zu, als solche, welche schon in der Natur der gegebenen Function liegen. Es lässt sich ferner zeigen, dass sie mit der ersteren

stets identisch ist, sobald nur das unbestimmte Integral so gewählt ist, dass es innerhalb des Integrationsintervalls keine Unstetigkeit enthält; denn dann ist die Summe, welche nach der zweiten Definition das Integral bildet, gerade die Summe aller der unendlich kleinen Incremente, welche das unbestimmte Integral $f(x)$ erhält, wenn x das Intervall von a bis b stetig durchläuft. Ist aber $f(x)$ an irgend einer Stelle c zwischen a und b unstetig, so kann man sich eine stetige Function $f_1(x)$ substituirt denken, deren Differential ebenfalls $f'(x)\,\mathrm{d}x$ ist. Dann ist das bestimmte Integral $= f_1(b) - f_1(a)$, und diese Differenz unterscheidet sich von $f(b) - f(a)$ nur um den Betrag des Sprunges, welchen $f(x)$ an der Stelle $x = c$ macht, und es wird daher

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a) + \lim \Big(f(c-\delta) - f(c+\varepsilon)\Big)$$

werden, worin δ und ε unendlich kleine, mit $(b-a)$ gleichstimmige Grössen bedeuten; und statt dieser Gleichung kann man auch die folgende schreiben:

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = \lim \left(\int_a^{c-\delta} f'(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+\varepsilon}^b f'(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

7.

Die eben angestellten Betrachtungen sind vorzüglich wichtig bei solchen bestimmten Integralen, die noch eine andere Veränderliche enthalten, also bei Integralen von der Form

$$\int_a^b f(x, \xi)\,\mathrm{d}x$$

worin ξ eine von x unabhängige Veränderliche bedeutet. Es kann nämlich der Fall eintreten, dass das unbestimmte Integral, wenn es im Allgemeinen auch für alle Werthe von x stetig ist, doch diese Eigenschaft verliert, wenn man der Veränderlichen ξ einen bestimmten Werth beilegt. Dies ist namentlich dann zu berücksichtigen, wenn das bestimmte Integral, als Function von ξ angesehen, einer zweiten Integration in Bezug auf ξ unterworfen wird, und zwar zwischen Grenzen, innerhalb deren auch der specielle Werth von ξ liegt, welcher das in Bezug auf x genommene unbestimmte Integral unstetig macht. Sind α, β diese Grenzen, c und γ die Werthe von x und ξ, für welche das Integral in Bezug auf x unstetig wird, so muss man zufolge des vorigen Artikels

$$\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\xi \int_a^b f(x, \xi)\,\mathrm{d}x = \lim \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\xi \int_a^{c-\varepsilon} f(x, \xi)\,\mathrm{d}x + \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\xi \int_{c+\varepsilon}^b f(x, \xi)\,\mathrm{d}x \quad \ldots \quad (19)$$

setzen; denn man muss erst die Integration in Bezug auf x so ausführen, dass sie für alle Werthe von ξ, welche bei der zweiten Integration in Betracht kommen, gültig bleibt. Ich

habe diese Formel angeführt, um dadurch der unrichtigen Auffassung eines Satzes zu begegnen, der sich auf die Umkehrung der Integrationsordnung bei Doppelintegralen bezieht. In einem solchen Doppelintegrale kann man nämlich die Ordnung vertauschen, also

$$\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\,\xi \int_a^b f(x,\xi)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^b \mathrm{d}\,x \int_\alpha^\beta f(x,\xi)\,\mathrm{d}\,x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

setzen, wenn $f(x, \xi)$ für alle Werthe von x und ξ innerhalb der Integration endlich und stetig bleibt; wird aber $f(x, \xi)$ für $x = c$, $\xi = \gamma$ unstetig, so kann man noch immer

$$\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\,\xi \int_a^{c-\varepsilon} f(x,\xi)\,\mathrm{d}\,x + \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\,\xi \int_{c+\varepsilon}^b f(x,\xi)\,\mathrm{d}\,x$$

$$= \int_a^{c-\varepsilon} \mathrm{d}\,x \int_\alpha^\beta f(x,\xi)\,\mathrm{d}\,\xi + \int_{c+\varepsilon}^b \mathrm{d}\,x \int_\alpha^\beta f(x,\xi)\,\mathrm{d}\,\xi$$

setzen; bezeichnet man die unbestimmten Integrale in Bezug auf x und ξ resp. mit $F(x, \xi)$ und $\varphi(x, \xi)$ und setzt diese als stetig zwischen den Grenzen der einzelnen Integrale voraus, so geht die letzte Gleichung in

$$\int_\alpha^\beta [F(b,\xi) - F(a,\xi)]\,\mathrm{d}\,\xi - \int_\alpha^\beta [F(c+\varepsilon,\xi) - F(c-\varepsilon,\xi)]\,\mathrm{d}\,\xi$$

$$= \int_a^{c-\varepsilon} [\varphi(x,\beta) - \varphi(x,\alpha)]\,\mathrm{d}\,x + \int_{c+\varepsilon}^b [\varphi(x,\beta) - \varphi(x,\alpha)]\,\mathrm{d}\,x$$

über; und wenn man hierin ε Null werden lässt, so erhält man

$$\int_\alpha^\beta [F(b,\xi) - F(a,\xi)]\,\mathrm{d}\,\xi - \lim \int_\alpha^\beta [F(c+\varepsilon,\xi) - F(c-\varepsilon,\xi)]\,\mathrm{d}\,\xi$$

$$= \int_a^b [\varphi(x,\beta) - \varphi(x,\alpha)]\,\mathrm{d}\,x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Diese Formel wird meistens so aufgefasst, als gäbe das zweite Glied auf der linken Seite den Unterschied zwischen den beiden Doppelintegralen in (20) an; aus dem im Anfange dieses Artikels Gesagten erhellt aber, dass dies nicht richtig ist, indem erst beide Glieder der linken zusammengenommen das auf der linken Seite in (20) stehende Doppelintegral darstellen. Doch wird hierdurch die Richtigkeit der Gleichung (21) nicht beeinträchtigt, und diese ist es gerade, auf welche sich der von Cauchy gegebene Beweis stützt. Nimmt man nämlich

$$f(x, \xi) = i\,f'(x + \xi\,i)$$

an, worin $i = \sqrt{-1}$ und $f'(z) = \frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}$ ist, so wird

$$F(x, \xi) = if(x + \xi i) \text{ und } \varphi(x, \xi) = f(x + \xi i)$$

und die Gleichung (21) geht in die folgende über:

$$i\int_{\alpha}^{\beta}[f(b+\xi i) - f(a+\xi i)]\,\mathrm{d}\xi - i\lim\int_{\alpha}^{\beta}[f(c+\varepsilon+\xi i) - f(c-\varepsilon+\xi i)]\,\mathrm{d}\xi$$

$$= \int_{a}^{b}[f(x+\beta i) - f(x+\alpha i)]\,\mathrm{d}x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Führt man in dem zweiten Gliede links eine neue Variabele η durch die Gleichung $\xi = \gamma + \varepsilon\eta$ ein, worin der Annahme nach $\alpha < \gamma < \beta$ ist, und setzt

$$f(z) = \frac{F(z)}{z - c - \gamma i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

so findet man leicht

$$i\lim\int_{\alpha}^{\beta}[f(c+\varepsilon+\xi i) - f(c-\varepsilon+\xi i)]\,\mathrm{d}\xi = 2\pi i\,F(c+\gamma i) \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

8.

Aus den eben entwickelten Formeln hat nun Cauchy den Werth des Integrals B abgeleitet, aber auf eine Weise, welche in einzelnen Punkten einer strengeren Begründung sehr bedürftig erscheint. Sie besteht in Folgendem. Wenn die Function $f(z)$ so beschaffen ist, dass für jeden Werth von ξ $f(\pm\infty + \xi i) = o$, und für jeden Werth von x $f(x + \infty i) = o$ ist, so folgt aus den Gleichungen (22), (23) und (24), wenn man $\alpha = o$, $\beta = \infty$, $a = -\infty$, $b = \infty$ setzt,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i\,F(c+\gamma i) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

worin nun γ zufolge der Bedingung $\alpha < \gamma < \beta$ nothwendig positiv sein muss. Setzt man jetzt $f(z) = \frac{(-zi)^{\mu-1}}{zz+1}$, worin μ eine zwischen o und 2 liegende Zahl ist (unmotivirt), so sind die Bedingungen $f(\pm\infty + \xi i) = o$ und $f(x + \infty i) = o$ erfüllt; die Werthe von x und ξ, welche $f(x + \xi i)$ unendlich machen, sind $c = o$, $\gamma = 1$; es ist daher

$$F(z) = (z - i)\,\frac{(-zi)^{\mu-1}}{zz+1}; \quad F(c+\gamma i) = F(i) = \frac{1}{2i}$$

und folglich

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(-xi)^{\mu-1}}{xx+1}\,\mathrm{d}x = \pi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Zerlegt man dies Integral in zwei andere, deren Grenzen o, ∞ und $-\infty, o$ sind, und setzt in dem zweiten $(-x)$ statt x, so findet man

$$\int_o^\infty \frac{x^{\mu-1}\,dx}{xx+1} = \frac{\pi}{(+i)^{\mu-1}+(-i)^{\mu-1}} = \frac{\pi}{2\cos(\mu-1)\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2\sin\mu\frac{\pi}{2}}$$

und hierin braucht man blos x statt xx, und $\mu = 2b$ (wo b zwischen o und 1 liegt, wenn $o < \mu < 2$ ist) zu setzen, um die Gleichung (17) wieder zu erhalten.

Hierin scheint mir namentlich die Ableitung der Gleichung (25) nicht ganz streng zu sein; denn wenn auch die Bedingungen $f(\pm\infty + \xi i) = o$, $f(x + \infty i) = o$ für jedes zwischen o und 2 liegende μ erfüllt sind (eigentlich ist dazu nur erforderlich, dass $\mu < 3$ ist, so dass μ auch negativ sein kann), so ist doch bekannt, dass das Verschwinden der Function unter dem Integralzeichen das des Integrals nicht immer zur Folge hat, namentlich dann, wenn die eine Grenze unendlich gross ist. Ich will daher versuchen, durch die folgende Darstellung diese Zweifel zu heben und zugleich zu beweisen, dass μ zwischen den Grenzen o und 2 liegen muss.

Setzt man in der Gleichung (22) $\alpha = o$, $b = \beta = -a = k$, so geht sie mit Berücksichtigung der Gleichung (24) in folgende über:

$$i\int_o^k [f(k+\xi i) - f(-k+\xi i)]\,d\xi - 2\pi i\, F(c+\gamma i)$$

$$= \int_{-k}^{+k} f(x+ki)\,dx - \int_{-k}^{+k} f(x)\,dx$$

und wenn man in dem ersten Integrale $\xi = k\eta$, im zweiten $x = ky$ setzt:

$$i\int_o^1 [f(k(1+\eta i)) - f(-k(1-\eta i))]\,k\,d\eta - 2\pi i\, F(c+\gamma i)$$

$$= \int_{-1}^{+1} f(k(y+i))\,k\,dy - \int_{-k}^{+k} f(x)\,dx$$

Wenn nun bei unendlichem Wachsen von k die Functionen unter den Integralzeichen verschwinden, und zwar für jeden Werth der Variabelen, so werden die Integrale selbst gleich Null. Nun ist für unsern Fall

$$k f(k(1+\eta i)) = (-i)^{\mu-1} \frac{k^\mu (1+\eta i)^{\mu-1}}{k k (1+\eta i)^2 + 1}$$

und ähnlich die anderen Functionen; damit diese Ausdrücke bei dem unendlichen Wachsen von k verschwinden, ist erforderlich, dass $\mu < 2$ sei, wodurch aber nicht ausgeschlossen ist, dass μ auch negativ sein kann. Jedenfalls erhält man unter dieser Annahme die Gleichung (25).

Aus dem Gange des Beweises im vorigen Artikel leuchtet aber ein, dass, wenn es mehre Paare von Werthen, wie c und γ giebt, für welche $f(x, \xi)$ unendlich wird, in Gleichung (25) die Summe der ihnen entsprechenden Ausdrücke zu nehmen ist (nur mit der Bemerkung, dass, wenn $\gamma = \alpha$ ist, in Gleichung (24) $\pi i F(c + \gamma i)$ statt $2\pi i F(c + \gamma i)$ gesetzt werden muss). In unserm Falle ist aber $f(x, \xi) = i f'(x + \xi i)$ und nach der obigen Specialisirung von $f(z)$:

$$f'(z) = (-i)^{\mu - 1} \frac{(\mu - 3) z^{\mu} + (\mu - 1) z^{\mu - 2}}{(zz + 1)^2}$$

und hierin sind die complexen Werthe von z aufzusuchen, welche diese Function unendlich machen; die ersten erhält man aus der Gleichung $zz + 1 = o$, woraus die beiden Systeme $(c = o, \gamma = 1)$ und $(c = o, \gamma = -1)$ folgen, deren erstes oben schon behandelt ist; das zweite muss aber ausgeschlossen werden, weil dies γ der Bedingung $\alpha < \gamma < \beta$ nicht entspricht. Wenn aber, wie eben gezeigt ist, $\mu < 2$ sein muss, so ist auch $(c = o, \gamma = o)$ ein solches System, und wir hätten demnach noch die Correction $\pi i F(o)$ anzubringen, worin $F(z) = (z - c - \gamma i) f(z)$, also in diesem Falle

$$F(z) = (-i)^{\mu - 1} \frac{z^{\mu}}{zz + 1}$$

ist; für $z = o$ wird $F(z)$ nun entweder unendlich gross, oder Null, je nachdem μ negativ oder positiv ist. Soll daher der Werth des Integrals in (25) endlich sein, so müssen wir das Letztere annehmen, und dann ist in (26) eine Correction nicht mehr hinzuzufügen, da $F(o) = o$ wird. Durch diese Betrachtung ist daher die Gültigkeit der Gleichung (26), aus welcher unmittelbar der Werth des Integrals B folgt, auf die Bedingung $o < \mu < 2$ oder $o < b < 1$ beschränkt.

9.

Ein von den bisher angeführten wesentlich verschiedener Beweis ist endlich noch in der Abhandlung „Disquisitiones generales circa seriem infinitam etc. Auctore C. F. Gauss“ enthalten. Die ganze Anlage derselben macht es aber unmöglich, diesen Beweis hier darzustellen, indem die Grundlagen, auf welche er sich stützt, mit einem Schlage eine vollständige Theorie der Euler'schen Integrale ergeben, deshalb aber auch zu bedeutend sind, um hier blos zu diesem einzigen Zwecke entwickelt zu werden.

Zu diesen will ich nun noch einen, so viel mir bekannt ist, neuen Beweis hinzufügen, der eben nicht viel Zurüstungen erfordert, und sich stets in dem Gebiete der Integralrechnung hält, wenn auch die Methode nicht eben neu ist, die darauf hinaus läuft, die Aufgabe auf die Integration einer Differentialgleichung zweiter Ordnung zurückzuführen. Setzt man in der Gleichung

$$BB = \int_0^{\infty} \frac{x^{b-1}\,dx}{x+1} \int_0^{\infty} \frac{y^{b-1}\,dy}{y+1} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x+1} \int_0^{\infty} \frac{(xy)^{b-1}}{y+1}\,dy$$

$y = \frac{z}{x}$, $\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}z}{x}$, kehrt dann die Integrationsordnung um, und führt die Integration in Bezug auf x aus, so findet man leicht

$$BB = \int_0^\infty \frac{z^{b-1} l z}{z-1} \mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b} \int_0^\infty \frac{z^{b-1} \mathrm{d}z}{z-1} \qquad (27)$$

Durch unbestimmte Integration in Bezug auf b erhält man daher

$$\int BB \,\mathrm{d}b = \int_0^\infty \frac{z^{b-1} \mathrm{d}z}{z-1}$$

worin das Integral rechts sich blos durch die Form des Nenners von dem Integrale B unterscheidet; und es ist leicht vorauszusehen, dass man das Integral B wiedererhält, wenn man das eben gewonnene derselben Behandlung unterwirft. In der That findet man

$$B \int BB \,\mathrm{d}b = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}z}{z-1} \int_0^\infty \frac{(zy)^{b-1}}{y+1} \mathrm{d}y$$

und wenn man $y = \frac{x}{z}$, $\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{z}$ setzt, dann zufolge Artt. 6. und 7. das in Bezug auf z genommene Integral in zwei Integrale zerlegt, deren Grenzen $o, 1-\delta$ und $1+\varepsilon, \infty$ sind, die Integrationsordnung umkehrt, und die Integration in Bezug auf z ausführt, so erhält man

$$B \int BB \,\mathrm{d}b = \int_0^\infty \frac{x^{b-1} l x}{x+1} \mathrm{d}x + \lim \int_0^\infty \frac{x^{b-1} \mathrm{d}x}{x+1} l\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)$$

Hierin ist nun zwar $\lim l\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)$ unbestimmt, jedenfalls aber unabhängig von x und b, und mag mit k bezeichnet werden. Dann giebt die letzte Gleichung

$$B \int BB \,\mathrm{d}b = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}b} + kB$$

oder wenn man bedenkt, dass in dem Integrale links doch schon eine willkürliche Constante enthalten ist,

$$B \int BB \,\mathrm{d}b = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}b} \qquad (28)$$

woraus man durch Division mit B und Differentiation in Bezug auf b die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$BB = \frac{1}{B} \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}B}{\mathrm{d}b^2} - \frac{1}{BB} \left(\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}b}\right)^2$$

erhält, welche die Eigenthümlichkeit besitzt, dass die unabhängige Variabele b nicht vorkommt, und sich deshalb bekanntlich auf eine Differentialgleichung erster Ordnung zurückführen lässt,

wenn man das erste Differentialverhältniss als neue Variabele einführt. Bezeichnen wir dieses mit B', so ist

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}b} = B', \quad \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}B}{\mathrm{d}b^2} = \frac{\mathrm{d}B'}{\mathrm{d}b} = \frac{B'\,\mathrm{d}B'}{\mathrm{d}B}$$

und führen wir diese Transformationen in die obige Differentialgleichung ein, so geht diese in

$$BB = \frac{B'\,\mathrm{d}B'}{B\,\mathrm{d}B} - \frac{B'B'}{BB}$$

oder in

$$\mathrm{d}(BB) = \frac{BB\,\mathrm{d}(B'B') - B'B'\,\mathrm{d}(BB)}{(BB)^2} = \mathrm{d}\,\frac{B'B'}{BB}$$

über, deren Integral

$$BB = cc + \frac{B'B'}{BB} = cc + \frac{1}{BB}\left(\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}b}\right)^2$$

ist. Zu der Bestimmung der Constanten ist nun die Kenntniss zweier Eigenschaften des Integrals B erforderlich; diese nehmen wir aus Art. 3., wo gezeigt ist, dass B für $b = \frac{1}{2}$ ein Minimum $= \pi$ erreicht; da gleichzeitig $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}b} = o$ wird, so ergiebt sich unmittelbar $cc = \pi\pi$. Man erhält dann weiter

$$\pm\,\mathrm{d}b = \frac{\mathrm{d}B}{B\sqrt{(BB - \pi\pi)}} = \frac{1}{\pi}\,\frac{-\,\mathrm{d}\,\frac{\pi}{B}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\pi\pi}{BB}\right)}}$$

folglich durch Integration

$$\pm\,(b + c) = \frac{1}{\pi}\,\arccos\frac{\pi}{B}; \quad B = \frac{\pi}{\cos\,(b+c)\pi}$$

Da B für $b = \frac{1}{2}$ den Werth π erhält, so muss

$$\cos\,(\tfrac{1}{2} + c)\,\pi = -\sin\,c\,\pi = 1; \quad \cos\,c\,\pi = o$$

sein; folglich ist

$$\cos\,(b+c)\,\pi = \cos\,b\,\pi\,\cos\,c\,\pi - \sin\,b\,\pi\,\sin\,c\,\pi = \sin\,b\,\pi$$

wodurch man wieder $B = \frac{\pi}{\sin\,b\,\pi}$ findet.

10.

Weil der im vorigen Artikel gegebene Beweis den Anforderungen der grössten Strenge doch noch nicht Genüge leistet, namentlich in so fern das Integral $\int_o^\infty \frac{x^{b-1}\,\mathrm{d}x}{x-1}$ darin eine Rolle spielt, so ist es wohl nicht unangemessen, hier eine solche Modification noch folgen zu

lassen, in welcher die unbestimmte Integration in Bezug auf b ganz vermieden wird. Da die Gleichung (28) sich auch so schreiben lässt:

$$\int BB\,\mathrm{d}\,b = \frac{\mathrm{d}\,l\,B}{\mathrm{d}\,b}$$

so lässt sich vermuthen, dass eine Entwickelung des rechts stehenden Ausdrucks ebenfalls zum Ziele führt. Da $B = \Gamma(b)\,\Gamma(1-b)$ ist, so reicht es hin, ein Integral für $\frac{\mathrm{d}\,l\,\Gamma(\mu)}{\mathrm{d}\,\mu}$ zu finden, was sich bekanntlich auf folgendem Wege erreichen lässt. Aus der Definition von $\Gamma(\mu)$ folgt

$$\frac{\mathrm{d}\,\Gamma(\mu)}{\mathrm{d}\,\mu} = \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x}\,\mathrm{d}\,x\;l\,x$$

Setzt man hierin für $l\,x$ das Integral

$$l\,x = \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-z\,x}}{z}\,\mathrm{d}\,x$$

welches sich aus dem Integrale $\int_0^1 y^{x-1}\,\mathrm{d}\,y = \frac{1}{x}$ durch Integration in Bezug auf x zwischen den Grenzen 1 und x, und durch Substitution von e^{-z} für y ergiebt, so findet man durch Umkehrung der Integrationsordnung und mit Hülfe von Gleichung (3) sehr leicht

$$\frac{\mathrm{d}\,l\,\Gamma(\mu)}{\mathrm{d}\,\mu} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\,z}{z}\left(e^{-z} - \frac{1}{(z+1)^\mu}\right)$$

Setzt man hierin b und $(1-b)$ für μ, so ergiebt sich

$$\frac{\mathrm{d}\,l\,B}{\mathrm{d}\,b} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\,z}{z}\left(\frac{1}{(z+1)^{1-b}} - \frac{1}{(z+1)^b}\right)$$

und wenn man hierin $z = x-1$ oder $z = \frac{1}{x} - 1$ setzt:

$$\frac{\mathrm{d}\,l\,B}{\mathrm{d}\,b} = \int_1^\infty \frac{x^b - x^{1-b}}{x-1}\,\frac{\mathrm{d}\,x}{x} = \int_0^1 \frac{x^b - x^{1-b}}{x-1}\,\frac{\mathrm{d}\,x}{x}$$

also auch

$$2\,\frac{\mathrm{d}\,l\,B}{\mathrm{d}\,b} = \int_0^\infty \frac{x^b - x^{1-b}}{x-1}\,\frac{\mathrm{d}\,x}{x}$$

Vergleicht man dies mit Gleichung (27), so ergiebt sich augenblicklich

$$2\,\frac{\mathrm{d}\,lB}{\mathrm{d}\,b} = \int_{1-b}^{b} BB\,\mathrm{d}B = 2\int_{\frac{1}{2}}^{b} BB\,\mathrm{d}\,b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

indem ja zufolge Art. 3. B für $b = \frac{1}{2} + b'$ und $b = \frac{1}{2} - b'$ dieselben Werthe erhält; durch Differentiation dieser Gleichung in Bezug auf b erhält man wieder die im vorigen Artikel behandelte Differentialgleichung.

11.

Nachdem durch die angegebenen Beweise die Richtigkeit der Gleichung

$$B\,(r,\ 1-r) = \int_{0}^{\infty} \frac{x^{r-1}\,\mathrm{d}\,x}{x+1} = \frac{\pi}{\sin r\,\pi}$$

worin r einen positiven echten Bruch bezeichnet, ausser Zweifel gesetzt ist, ergiebt sich unmittelbar aus Art. 2., dass die Euler'schen Integrale der ersten Art, deren beide Argumente eine ganze positive Zahl zur Summe haben, sich wirklich darstellen lassen; man findet

$$B\,(m+r,\ n-r) = \frac{(m+r-1)\ldots(1+r)\,r\,.\,(n-1-r)\ldots(2-r)\,(1-r)}{(m+n-1)\,(m+n-2)\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,2.\,1}\,\frac{\pi}{\sin r\,\pi} \quad (30)$$

Man kann hiervon auch noch einen wichtigen Rückschluss auf die Euler'schen Integrale der ersten Art machen; setzt man nämlich $m = o$, $n = 1$, $r = \frac{1}{2}$, so findet man

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_{o}^{\infty} e^{-x}\,\frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{x}} = 2\int_{o}^{\infty} e^{-xx}\,\mathrm{d}\,x = \sqrt{\pi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

und folglich nach Gleichung (4):

$$\Gamma\left(n+\tfrac{1}{2}\right) = (2n-1)\,(2n-3)\,.\,.\,.\,5\,.\,3\,.\,1\,\frac{\sqrt{\pi}}{2^{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

12.

Nachdem in Artt. 2. und 11. die Fälle zusammengestellt sind, in welchen die Euler'schen Integrale beider Arten ohne Hülfe neuer Functionen dargestellt werden können, will ich zum Schluss noch ein Mal zu dem Integrale B zurückkehren, um noch einige Beziehungen desselben zu andern Integralen zu entwickeln. Unter den verschiedenen Formen, in welchen es auftritt, sind die beiden folgenden

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(2b-1)z} + e^{-(2b-1)z}}{e^{z} + e^{-z}}\,\mathrm{d}\,z \quad \text{und} \quad 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\mathrm{tg}\,\varphi)^{2b-1}\,\mathrm{d}\,\varphi = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\mathrm{tg}\,\varphi)^{1-2b}\,\mathrm{d}\,\varphi$$

ganz interessant; wichtiger sind aber die Verallgemeinerungen desselben durch Einführung neuer Constanten. Dahin gehört das Integral

$$\int_0^\infty \frac{x^{b-1}\,dx}{x+c} = \frac{\pi\, c^{b-1}}{\sin b\pi} \qquad (33)$$

worin c positiv sein muss; doch lässt sich nachträglich beweisen, dass c auch imaginär sein darf; multiplicirt man nämlich Zähler und Nenner der Function $\frac{x^{b-1}}{x+i}$ mit $(x \mp i)$, so zerfällt das entsprechende Integral in zwei andere, welche sich durch die Substitution $xx = y$ auf das Integral B reduciren lassen, und so findet man die Gültigkeit der Gleichung (33) für imaginäre c. Durch Differentiation und Integration in Bezug auf c kann man dann wieder eine Reihe von andern Integralen ableiten.

Sind $c_1, c_2, \ldots c_n$ von einander verschiedene positive oder imaginäre Constanten, ferner $o < b < n$ und

$$f(x) = (x+c_1)(x+c_2)\ldots(x+c_n); \quad f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

so findet man auch

$$\int_0^\infty \frac{x^{b-1}\,dx}{f(x)} = \frac{\pi}{\sin b\pi} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{c_k^{b-1}}{f'(-c_k)} \qquad (34)$$

indem man $\frac{x^\beta}{f(x)}$ in Partialbrüche zerlegt, worin β die grösste in b enthaltene ganze Zahl bedeutet.

Ein Vorzug des in Art. 10. gegebenen Beweises besteht auch noch darin, dass er unmittelbar eine verwandte Classe von Integralen bestimmen lehrt. Aus den Gleichungen (27) und (29) folgt nämlich unmittelbar

$$\int_0^\infty \frac{x^b - x^{\frac{1}{2}}}{1-x} \frac{dx}{x} = \pi \cot b\pi$$

folglich auch

$$\int_0^\infty \frac{x^a - x^b}{1-x} \frac{dx}{x} = \pi(\cot a\pi - \cot b\pi) \qquad (35)$$

und hieraus ergiebt sich auch das in Art. 3. mit $\varphi(b)$ bezeichnete Integral

$$\int_0^\infty \frac{1-x^\mu}{1-x^\nu}\, x^{b-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\nu}\int_0^\infty \frac{x^{\frac{b}{\nu}} - x^{\frac{\mu+b}{\nu}}}{1-x}\,\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$= \frac{\pi}{\nu}\,\frac{\sin\frac{\mu\pi}{\nu}}{\sin\frac{b\pi}{\nu}\,\sin\frac{(\mu+b)\pi}{\nu}} = \frac{2\pi}{\nu}\,\frac{\sin\frac{\mu\pi}{\nu}}{\cos\frac{\mu\pi}{\nu} - \cos\frac{(\mu+2b)\pi}{\nu}}$$

und das Minimum desselben

$$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{\mu}{2}} - x^{-\frac{\mu}{2}}}{x^{\frac{\nu}{2}} - x^{-\frac{\nu}{2}}}\,\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{2\pi}{\nu}\,\mathrm{tg}\,\frac{\mu\pi}{2\nu}$$

Die meisten der hierher gehörigen Integrale finden sich in der im Auftrage des preussischen Ministeriums von Minding herausgegebenen „Sammlung von Integraltafeln“ (Berlin, 1849), im Anfange der vierten Abtheilung. Vielleicht ist hier der Ort, um einige Fehler, welche sich daselbst finden, anzuzeigen und zu verbessern. Durch Zerlegung von $\frac{1}{(x-1)\,(x+c)}$ in Partialbrüche und Anwendung der Formeln dieses Artikels findet man leicht

$$\int_0^\infty \frac{x^a - 1}{(x-1)\,(x+c)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{c+1}\left(\frac{c^a - \cos a\pi}{\sin a\pi} - \frac{lc}{\pi}\right)$$

und diese Gleichung gilt für positive und negative echt gebrochene a, wovon man sich leicht überzeugt, wenn man $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{c}$ statt x und c schreibt. Differentiirt man in Bezug auf a und setzt dann $a = o$, so erhält man eine Reihe von Integralen, welche in jenen Tafeln unrichtig angegeben sind. Um die lästigen Differentiationen möglichst zu erleichtern, kann man folgenden Kunstgriff anwenden. Setzt man

$$\frac{lc}{\pi} + \frac{c+1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^a - 1}{(x-1)\,(x+c)}\,\mathrm{d}x = \frac{c^a - \cos a\pi}{\sin a\pi} = J\,;\quad \frac{\mathrm{d}^n J}{\mathrm{d}a^n} = \overset{n}{J}$$

so erhält man für $a = o$

$$\int_0^\infty \frac{(lx)^n\,\mathrm{d}x}{(x-1)\,(x+c)} = \frac{\pi}{c+1}\,\overset{n}{J}_o$$

Man findet aber leicht

$$J\pi^n \sin\left(a+\tfrac{n}{2}\right)\pi + n\overset{1}{J}\pi^{n-1}\sin\left(a+\tfrac{n-1}{2}\right)\pi + \ldots + n\overset{n-1}{J}\pi\,\sin\left(a+\tfrac{1}{2}\right)\pi + \overset{n}{J}\sin a\pi$$

$$= \frac{\mathrm{d}^n(J\sin a\pi)}{\mathrm{d}a^n} = c^a\,(lc)^n - \pi^n\cos\left(a+\tfrac{n}{2}\right)\pi$$

und für $a = o$ erhält man Recursionsformeln für die J_o mit geraden und die mit ungeraden Indices. So findet man

$$\int_o^\infty \frac{lx\,dx}{(x-1)(x+c)} = \frac{(lc)^2+\pi\pi}{2(c+1)}; \quad \int_o^\infty \frac{(lx)^2\,dx}{(x-1)(x+c)} = \frac{lc\,((lc)^2+\pi\pi)}{3(c+1)};$$

$$\int_o^\infty \frac{(lx)^3\,dx}{(x-1)(x+c)} = \frac{((lc)^2+\pi\pi)^2}{4(c+1)}$$

$$\int_o^\infty \frac{(lx)^4\,dx}{(x-1)(x+c)} = \frac{lc\,[(lc)^2+\pi\pi]\,(3(lc)^2+7\pi\pi)}{5(c+1)\,.\,3};$$

$$\int_o^\infty \frac{(lx)^5\,dx}{(x-1)(x+c)} = \frac{((lc)^2+\pi\pi)^2\,((lc)^2+3\pi\pi)}{6(c+1)}$$

während in jenen Tafeln statt der Divisoren 2, 3, 4, 5, 6 die Divisoren 1.2, 1.2.3, 1.2.3.4, 1.2.3.4.5, 1.2.3.4.5.6 angegeben sind.

Über ein *Eulersches* Integral.

Von Dr. phil. *Dedekind* zu Braunschweig.

(Besonders abgedruckt aus *Crelle's* „Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. XLV.")

Die von *Gauſs* und *Legendre* in die Analysis eingeführten Functionen Π und Γ stehen bekanntlich in dem Zusammenhange, daſs $\Gamma(a)$ mit $\Pi(a-1)$ identisch ist, so lange a einen positiven Werth hat; für negative a ist $\Gamma(a)$ stets unendlich groſs, während $\Pi(a-1)$ eine bestimmte Function bleibt und nur dann unendlich und unstetig wird, wenn a einen der Werthe 0, -1, -2 u. s. w. erhält. Die Function Π wird als unendliches Product, Γ als bestimmtes Integral definirt. Unstreitig ist die erstere Definition umfassender, und gewährt eine tiefere Einsicht in das wahre Wesen dieser Functionen; indessen ist es für die Integralrechnung wichtig, ohne Hülfe jener Entwickelungen in unendliche Producte und Reihen, selbstständig eine Theorie dieser Functionen aufzustellen. Dies ist auch in der That nach und nach vollständig gelungen, seitdem namentlich *Dirichlet* (im 15. Bande des *Crelle*schen Journals) das berühmte Multiplicationstheorem von *Gauſs* so elegant bewiesen hat. In dieser Abhandlung wird auch der Lehrsatz

$$\Pi(a-1).\Pi(-a)=\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{x+1}=\frac{\pi}{\sin a\pi}$$

angewendet, für welchen sehr verschiedene Beweise von verschiedenen Mathematikern gegeben sind, die aber fast alle ihren Weg über Entwickelungen in unendliche Reihen nehmen. In meiner, Ostern 1852 gedruckten Inauguraldissertation (Über die Elemente der Theorie der *Euler*schen Integrale) sind die hauptsächlichsten zusammengestellt; auch habe ich schon dort einen neuen Weg hinzugefügt, welcher sich ganz im Gebiete der bestimmten Integrale hält, indem ich aber eine vollkommene Strenge nur dadurch zu verleihen vermochte, daſs ich die Entstehung dieses Integrals aus der Multiplication von $\Pi(a-1)$ und $\Pi(-a)$, und den Ausdruck für $\frac{d\log\Pi(a)}{da}$ als bekannt voraussetzte. Im Folgenden soll nun ein, zwar auf ganz derselben Idee beruhender, aber von andern Theorieen ganz unabhängiger Beweis gegeben werden, der nur die allgemeinsten Sätze über die bestimmten Integrale zu Hülfe nimmt.

Zuerst mufs an einen Hülfssatz erinnert werden, der nachher einige Male gebraucht wird. Es ist bekanntlich

$$\int \frac{dw}{(\alpha w+\beta)(\alpha' w+\beta')} = \frac{\log\left(\frac{\alpha w+\beta}{\alpha' w+\beta'}\right)}{\alpha\beta'-\alpha'\beta},$$

wo die Logarithmen hyperbolische sind. Sind nun $\frac{\beta}{\alpha}$ und $\frac{\beta'}{\alpha'}$ positive Gröfsen, so folgt hieraus

$$\int_0^\infty \frac{dw}{(\alpha w+\beta)(\alpha' w+\beta')} = \frac{\log\frac{\alpha\beta'}{\alpha'\beta}}{\alpha\beta'-\alpha'\beta},$$

oder, wenn der Logarithme immer nur von dem absoluten Werthe genommen wird:

$$(1.) \quad \int_0^\infty \frac{dw}{(\alpha w+\beta)(\alpha' w+\beta')} = \frac{\log(\alpha\beta')-\log(\alpha'\beta)}{\alpha\beta'-\alpha'\beta};$$

und diese Gleichung gilt selbst für den Fall, in welchem $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'}$ ist, wenn man den unter die Form $\frac{0}{0}$ tretenden Werth nach den Regeln der Differentialrechnung behandelt.

Gehen wir nun zu dem eigentlichen Gegenstande über, so ist erstens leicht zu sehen, dafs das gegebene Integral

$$(2.) \quad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{x+1} = A = \varphi(a)$$

nur dann einen endlichen, und zwar positiven Werth hat, wenn a ein positiver echter Bruch ist. Zerlegt man nämlich das Integral in zwei andere mit den Grenzen 0, 1 und 1, ∞, und schreibt im Letztern $\frac{1}{x}$ statt x, so findet man

$$(3.) \quad A = \int_0^1 \frac{x^{a-1}+x^{-a}}{x+1}\,dx.$$

Da nun im ganzen Intervalle der Integration $\frac{1}{x+1}$ zwischen den Grenzen 1 und $\frac{1}{2}$ liegt, so liegt auch A zwischen den Grenzen

$$\int_0^1 (x^{a-1}+x^{-a})\,dx \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}\int_0^1 (x^{a-1}+x^{-a})\,dx.$$

Dieses Integral hat aber nur dann einen endlichen und positiven Werth, $= \frac{1}{a(1-a)}$, wenn a ein positiver echter Bruch ist. Dieselbe Bedingung ist daher auch für die Endlichkeit des Integrals A nöthig.

Ferner ergiebt sich unmittelbar aus der Gleichung (3.) der Satz

$$(4.) \quad \varphi(a) = \varphi(1-a).$$

ifferentiirt man diese Gleichung in Bezug auf a, und setzt dann $a = \frac{1}{2}$, so ıdet man

$$(5.) \quad \varphi'(\tfrac{1}{2}) = 0.$$

a ferner, wie leicht zu sehen, $\varphi''(\frac{1}{2})$ positiv ist, so erreicht $\varphi(a)$ für $a = \frac{1}{2}$ nen Minimumwerth

$$(6.) \quad \varphi(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty \frac{x^{-\frac{1}{2}}dx}{x+1} = 2\int_0^\infty \frac{d(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2} = \pi.$$

Bezeichnet w eine positive Gröfse, so erhält man, wenn man in der leichung (2.) $\frac{x}{w}$ statt x schreibt:

$$(7.) \quad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{x+w} = Aw^{a-1},$$

ıd wenn man $\frac{1}{w}$ statt w setzt,

$$(8.) \quad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{xw+1} = Aw^{-a}.$$

Multiplicirt man die Gleichung (7.) mit $\frac{dw}{w+1}$, integrirt in Bezug auf zwischen den Grenzen 0 und ∞, und bedenkt, dafs zufolge, des Hülfs-tzes (1.),

$$\int_0^\infty \frac{dw}{(w+1)(w+x)} = \frac{\log x}{x-1}$$

, so erhält man

$$AA = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{x-1}\log x.$$

tegrirt man jetzt in Bezug auf a zwischen den Grenzen $(1-a)$ und a, so hält man

$$\int_{1-a}^{a} AAda = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}-x^{-a}}{x-1}dx = \int_0^\infty \frac{w^{a-1}-w^{-a}}{w-1}dw.$$

btrahirt man die Gleichung (8.) von (7.), so findet man leicht:

$$A\frac{w^{a-1}-w^{-a}}{w-1} = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}(x-1)}{(xw+1)(w+x)}dx,$$

d wenn man zwischen den Grenzen $w = 0$ und $w = \infty$ integrirt und

erwägt, dafs

$$\int_0^\infty \frac{dw}{(xw+1)(w+x)} = \frac{2\log x}{xx-1}$$

ist, so folgt unmittelbar:

$$A\int_{1-a}^{a} AA\,da = A\int_0^\infty \frac{w^{a-1}-w^{-a}}{w-1}\,dw = 2\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{x+1}\log x.$$

Zufolge der Eigenschaft von A, dafs $A = \varphi(a) = \varphi(1-a)$ ist, ergiebt sich aber

$$\int_{a-1}^{a} AA\,da = 2\int_{\frac{1}{2}}^{a} AA\,da.$$

Ferner ist

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{x+1}\log x = \frac{dA}{da},$$

und so erhält man endlich die Gleichung

$$A\int_{\frac{1}{2}}^{a} AA\,da = \frac{dA}{da},$$

aus welcher sich durch Division mit A und Differentiation in Bezug auf die folgende ableiten läfst:

$$AA = \frac{1}{A}\frac{ddA}{da^2} - \frac{1}{AA}\left(\frac{dA}{da}\right)^2.$$

Da in derselben die unabhängige Variable a nicht vorkommt, so führt man $\frac{dA}{da} = A'$ als neue Variabel ein. Dies giebt

$$AA = \frac{A'dA'}{AdA} - \frac{A'A'}{AA}; \qquad AdA = \frac{AA.A'dA' - A'A'.AdA}{A^4}$$

oder

$$d(AA) = \frac{AA.d(A'A') - A'A'.d(AA)}{(AA)^2}$$

und das Integral dieser Gleichung ist offenbar

$$AA = \text{Const.} + \frac{A'A'}{AA} = \text{Const.} + \frac{1}{AA}\left(\frac{dA}{da}\right)^2.$$

Um die Constante zu bestimmen, setze man $a = \frac{1}{2}$, wofür nach Gleichung (5. und 6.) $\frac{dA}{da} = 0$ und $A = \pi$ ist; daraus folgt $\pi\pi$ als Werth der Constante, und

$$da = \pm\frac{dA}{A\sqrt{(AA-\pi\pi)}} = \mp\frac{1}{\pi}\frac{d\left(\frac{\pi}{A}\right)}{\sqrt{\left(1-\frac{\pi\pi}{AA}\right)}}.$$

Bezeichnet man mit c eine Constante, so ergiebt sich

$$a+c=\pm\frac{1}{\pi}\arccos\frac{\pi}{A},\qquad A=\frac{\pi}{\cos(a+c)\pi}.$$

n die Constante c zu finden, setze man wieder $a=\frac{1}{2}$, woraus

$$1=\cos(\tfrac{1}{2}\pi+c\pi)=-\sin c\pi;\qquad \cos c\pi=0$$

d

$$\cos(a+c)\pi=\sin a\pi$$

gt. Man erhält daher

$$A=\frac{\pi}{\sin a\pi};$$

s zu beweisen war. Aufserdem ergeben sich aus diesem Beweise sehr cht noch mehre verwandte Integrale; was ich hier nicht weiter ausführe.

Braunschweig im September 1852.

FÜNFUNDDREISSIGSTER JAHRESBERICHT

DER STEIERMÄRKISCHEN

ANDES-OBERREALSCHULE

IN GRAZ

ÜBER DAS STUDIENJAHR 1885/86.

HERAUSGEGEBEN

VON DEM

DIRECTOR Dr. FRANZ ILWOF.

INHALT:

edenkfeier der Landes-Oberrealschule in Graz zur Erinnerung an ihre Eröffnung vor vierzig Jahren 2. October 1845 — 2. October 1885.
dung der Differentialgleichungen 1. Ordnung und *n*. Grades auf geometrische Beispiele mit besonderer Berücksichtigung der singulären Lösungen. Von Prof. Adalbert Deschmann.
chrichten. Vom Director Dr. Franz Ilwof.

GRAZ, 1886.

IM VERLAGE DER STEIERM. LANDES-OBERREALSCHULE.

Inhalt.

Seite

Gedenkfeier der Landes-Oberrealschule in Graz zur Erinnerung an ihre Eröffnung vor vierzig Jahren 2. October 1845 — 2. October 1885 1

endung der Differentialgleichungen 1. Ordnung und *n*. Grades auf geometrische Beispiele mit besonderer Berücksichtigung der singulären Lösungen. Von Prof. Adalbert Deschmann 17

ulnachrichten. Vom Director Dr. Franz Ilwof.

. Personalstand des Lehrkörpers und Fächervertheilung 35

I. Lehrverfassung 38

II. Lehrbücher 47

V. Themen der deutschen Aufsätze 50

V. Freie Gegenstände 51

VI. Vermehrung der Lehrmittelsammlungen 51

I. Maturitätsprüfungen 56

X. Verfügungen der vorgesetzten Behörden 59

X. Chronik der Lehranstalt 63

. Bericht über die Wirksamkeit und den Cassastand des Vereines zur Unterstützung dürftiger und würdiger Studierender an der k. k. technischen Hochschule und st. Landes-Oberrealschule zu Graz 1884—85 68

. Verzeichnis der Schüler am Schlusse des Schuljahres 1885/86 71

. Statistik der Schüler 74

. Abschluss des Schuljahres 1885/86 78

. Aufnahme der Schüler für das Schuljahr 1886/87 81

zeichnis der in den Jahresberichten der Landes-Oberrealschule in Graz in den Jahren 1852/53 bis 1885/86 erschienenen Abhandlungen 83

DIE

GEDENKFEIER

DER

NDES-OBERREALSCHULE IN GRAZ

ZUR ERINNERUNG

AN IHRE ERÖFFNUNG VOR VIERZIG JAHREN

2. OCTOBER 1845 — 2. OCTOBER 1885.

DRUCKEREI „LEYKAM“, GRAZ.

Am 2. October 1845 war in Graz die steiermärkisch-ständische alschule eröffnet worden, aus der nach mancherlei Wandlungen die ige Landes-Oberrealschule hervorging. Der hohe steiermärkische des-Ausschuss fasste daher in seiner Sitzung am 28. August 1885 den chluss, die vierzigste Wiederkehr dieses Tages durch ein Fest zu begehen. e Gedenkfeier fand am 2. October 1885 im grossen Saale der Landes- nhalle statt, welcher mit den Büsten Ihrer Majestäten des isers und der Kaiserin und Weiland Seiner k. k. Hoheit durchlauchtigsten Herrn Erzherzogs Johann, mit Fahnen, pen und Emblemen glänzend geschmückt war. Besondere Auszeichnung le diesem Gedenkfeste und der dasselbe feiernden Lehranstalt durch die nvolle Anwesenheit zahlreicher erlauchter Festgäste zu Theil; Ihre llenzen die Herren Guido Freiherr v. Kübeck, Statthalter von rmark, FZM. Freiherr v. Kuhn und FML. Freiherr v. Vecsey, Herren Hofrath Dr. Arthur Graf Enzenberg, Dr. Moriz Ritter chreiner, Studien-Referent im Landes-Ausschuss, in Vertretung des senden Landeshauptmannes Herrn Gundaker Grafen v. Wurm- nd-Stuppach, Landes-Schulinspector Dr. Johann Zindler, Dr. dinand Portugall, Bürgermeister, Dr. Franz Bayer, Bürger- ter-Stellvertreter der Landeshauptstadt Graz, Regierungsrath Prof. Ferdinand Bischoff, Rector der k. k. Karl Franzens-Universität, rungsrath Prof. Dr. Franz Mertens, Rector der k. k. technischen schule, Regierungsrath und Polizei-Director Valentin Jenko, Oberst Generalstabschef Emil Probszt Edler v. Ohstorff, Prälat und farrer Dr. Alois Hebenstreit, Canonicus Dr. Johann Worm, ssoren der Hochschulen, Directoren und Professoren der Mittelschulen ten dieses Fest mit ihrer Gegenwart, dem auch zahlreiche andere n und Damen, der Lehrkörper und die studirende Jugend der Landes- realschule anwohnten.

Die Feier wurde durch einen Chor, dirigirt von dem Gesangslehrer nz Blümel, vorgetragen von den Sängern der Anstalt, und durch die Prof. Max Buchner gesprochene Begrüssung der Festgäste eröffnet; folgte ein Chor; hierauf hielt Director Dr. Franz Ilwof die Festrede. s Festgedicht, verfasst von dem kais. Rathe und Professor Dr. Eugen

Netoliczka, wurde von dem Abiturienten Max Peitler gesprochen. N
Vortrag eines Chores betrat der Herr Studien-Referent im Landes-A
schusse Dr. Moriz Ritter v. Schreiner die Rednerbühne und hielt
Schlussrede, welche mit dreimaligem jubelnd aufgenommenen Hoch auf Se
Majestät den Kaiser endete, worauf die von allen Schülern der L
anstalt gesungene Volkshymne die würdige und stimmungsvolle Gedenk
schloss.

Begrüssung der Festgäste.

Gesprochen von Prof. **Max Buchner.**

Hochansehnliche Versammlung!

Heute vor 40 Jahren, am 2. October 1845, wurde eine Unterr
Anstalt eröffnet, aus der nach manchen Veränderungen die gegenw
Landes-Oberrealschule hervorging, welche eben heute die Erinneru
ihre Eröffnung vor 40 Jahren festlich begeht. Ist schon die Gründung
Unterrichts-Anstalt ein Act von bleibender cultureller Bedeutung, so i
Errichtung unserer jetzigen Schule in vormärzlichen Zeiten ein Beweis
man an massgebender Stelle das Bedürfnis nach erhöhter geistiger
wicklung für weitere und besondere Berufskreise anerkannt, ur
Erkenntnis der Ueberlegenheit des Auslandes auf dem Unterrichts
nicht von sich weisen konnte und wollte.

Die Stadt Graz hatte zwar zu jener Zeit eine Mittelschule
Gymnasium; die einseitige Richtung jedoch, welche damals die Gyr
verfolgten, und welche man hauptsächlich als Vorstufe für die Aus
des Beamten-, geistlichen und ärztlichen Standes betrachtete, und we
ihrer Organisation diesem Bedürfnisse vorwaltend Rechnung trugen, a
seits das Verlangen nach einer Schule mit mehr mathematisch-natur
schaftlicher Grundlage mögen mit die Entstehung unserer Anstalt ve
haben. Seit mehr als einem Menschenalter erfreute sich diese Cult
eines zahlreichen Zuspruches seitens der Jugend aus Steiermark u
angrenzenden Kronländern, ja vor mehreren Decennien, wo ähnliche A
nur ganz vereinzelt bestanden, waren Ausländer häufig Frequentante
Anstalt.

Die mehr als tausendjährige Eisen-Industrie Steiermarks, e
durch die Unübertrefflichkeit ihres Productes allein dastehend, sah sic
die Fortschritte namentlich Englands gedrungen, die Vortheile de
dungen sich zu Nutze zu machen, sollte sie nicht vom Weltverke
drängt, auf ein kleines Gebiet hinsichtlich ihres Absatzes beschränkt

aus dem Westen Europas stammende Verkehrsmittel, welches auch in erreich Eingang fand, die Eisenbahnen, nahmen zahlreiche Kräfte in ruch, das zu einer nie geahnten Ausdehnung gelangte Maschinenwesen ngte eine thatkräftige Jugend, ausgestattet mit mathematisch-technischer ildung; mit dieser Entwicklung einhergehend eröffneten sich im Fabriks- Gewerbewesen Aussichten, welche aber mit der Vorbildung an einer sschule oder einer Lateinschule für den technischen Beruf nicht zu ltigen waren.

Das Verdienst, diese Anstalt, welche als eine Vorschule für höhere nische und gewerbliche Fachschulen gelten sollte, in's Leben gerufen zu n, gebührt ausschliesslich den Ständen Steiermarks, die in richtiger digung dieser Bedürfnisse vor den Kosten nicht zurückscheuten, die mit Gründung, Erhaltung und Erweiterung solcher Anstalten verbunden sind.

Die Stände Steiermarks und ihr nunmehriger Nachfolger — die Landes- retung — haben dadurch auch dem Staate gedient, indem sie eine Last ich genommen, die anderen Ortes der Staat zu tragen hat; nicht minder ie Anstalt der Landeshauptstadt zum Vortheile, indem nicht nur deren hner die Wohlthat des Bestehens einer Unterrichtsanstalt geniessen, t auch ein Anziehungspunkt für auswärtige Jünglinge, die in der Landes- stadt sich Wissen und Bildung verschaffen wollen; sie vermehrt und llständigt die Zahl der Unterrichts-Anstalten, deren Graz sich in so ebiger und vielseitiger Weise rühmen kann, und welche ein nicht ges Moment bilden in der Fortentwicklung unserer schönen Stadt.

Die Erwägung der nun berührten Thatsachen hat die Veranlassung en, ein Erinnerungsfest zu feiern, zu einer Zeit, in welcher noch Lehr- thätig sind, die fast ein Menschenalter ihre Dienste dieser Anstalt en; ja, in einer Zeit, in der noch Zeugen der ersten Entwicklung dieser lt sich am Leben befinden und dieser ein reges Interesse bewahren.

Es wurde mir die ehrende Aufgabe, die hochansehnlichen Anwesenden ngsvollst zu begrüssen und den Dank auszusprechen für Ihr zahlreiches einen, worin wir einen Beweis erblicken, dass Sie einstimmen in den für die Gründung und Erhaltung dieser Schule — dass Sie der Jugend rhebendes Beispiel geben wollen, wie Bildungsstätten geehrt werden.

Das Erinnerungsfest gilt nicht minder der studirenden Jugend, welche denk ihrer gegenwärtigen Pflichten und einstmaligen Lebensstellung ein ares Andenken bewahren möge den Wohlthaten, welche sie durch die icenz des Landes Steiermark und das fürsorgliche Wohlwollen der lichen Regierung genossen.

Festrede.

Gesprochen von Director Dr. **Franz Ilwof.**

Hochansehnliche Versammlung!

Unter den höheren Lehranstalten, wie sie heutzutage bestehen, geh die Realschulen zu den jüngeren Institutionen; können die Universitäten Gymnasien ihren Ursprung bis in das 16. Jahrhundert, ja bis in das Mi alter zurückführen, so treten die Keime jener Bildungsstätten, welche heute Realschulen nennen, im 18. und in Oesterreich sogar erst im 19. J hunderte auf.

Die mit dem k. k. polytechnischen Institute vereinigte Realschul Wien entstand 1809, Brünn erhielt 1811, Brody 1815, Lemberg 1817, 1834 eine Realschule; jede dieser Anstalten war aber nach einem vers denen Lehrplane organisirt, was grosse Misstände hervorrief. Der erste dies erkannte und dringend Abhilfe begehrte, war der damalige Hof-Kam Präsident Karl Friedrich Freiherr v. Kübeck. In einer von ihm verfa Staatsschrift vom Jahre 1844 heisst es, „dass es keinem Zweifel unter dass in der Monarchie ein grosses und dringendes Bedürfnis nach U richts-Anstalten bestehe, welche der Aneignung und Verbreitung der fü verschiedenen Stufen und Zweige der Industrie erforderlichen Eleme und höheren Kenntnisse gewidmet sein sollten. Es fehle jedoch den vers denen Anstalten dieser Art an einem inneren Zusammenhange, un rhapsodische Hervorrufung von Unterrichts-Anstalten nach Massgabe Local- und Provinzial-Autoritäten entspreche dem allgemeinen Bedür nicht. Die Aufgabe möge nach ihrem ganzen Umfange aufgefasst und beitet werden.“ Was jener hochverdiente Staatsmann mit diesen W bezweckte, ging erst bei der Organisation der österreichischen Mittelsc in den Fünfzigerjahren in Erfüllung. Aber schon zehn Jahre früher wa steiermärkisch-ständische Realschule in Graz in's Leben getreten.

Die Geschichte der Gründung dieser unserer Lehranstalt führt in den Anfang des Jahrhunderts zurück. Am 16. Juli 1811 unterzeic Seine kais. königl. Hoheit der durchlauchtigste Herr herzog Johann, der unsterbliche Wohlthäter unserer Steiermark Schenkungsurkunde, durch welche er alle seine reichen wissenschaftl insbesondere naturhistorischen Sammlungen den Ständen der Steie übergab, damit dieselben, wie es in jener Urkunde heisst, „schon g wärtig, sowie in der Folgezeit zur Geistesbildung der steiermärk Jugend, zur Erweiterung der Kenntnisse, Belebung des Fleisses un Industrie der Bewohner Steiermarks verwendet werden sollen.“ Urkunde wurde den Ständen in ihrer Versammlung am 26. November

erlich überreicht, welche dem erlauchten Fürsten im Namen aller Steier-
rker den heissesten Dank erstatteten und, des edlen Spenders Intentionen
gend, das Landes-Museum in Graz in's Leben riefen, das seines Gründers
men ehrt und durch ihn geehrt wird. Mit der Gründung dieses Museums
er war der grossherzige Plan des erhabenen Stifters nicht erschöpft; er
llte, dass an dem Joanneum zur Verbreitung nützlicher Kenntnisse in
en Berufsclassen auch Unterricht ertheilt werde. So wurden schon von
12 an über Anregung von Seite des Erzherzogs und auf Kosten des Landes
eiermark Lehrkanzeln naturwissenschaftlicher Fächer gegründet, denen sich
äter solche über Land- und Forstwirthschaft und über technische Fächer
schlossen, und es entwickelte sich Dank der Hochherzigkeit des hohen
fters des Joanneums und der Opferwilligkeit der steiermärkischen Stände,
ch und nach aus bescheidenen Anfängen eine technische Lehranstalt.

Da zeigte es sich aber bald, dass dieser höheren Schule die vorberei-
de fehle, dass eine Brücke geschaffen werden müsse, welche den Uebergang
n den zwei sogenannten vierten Classen der Musterhauptschule, welche
s sein sollten, was jetzt die Unter-Realschule ist, zur Technik zu bilden
be. Immer lebhafter wurde das Bedürfnis nach einer Realschule, welche
läufig die Stelle der heutigen Ober-Realschule einzunehmen hätte. Und
tritt uns die gewiss in jeder Beziehung höchst bemerkenswerthe Thatsache
gegen, dass die erste amtliche Anregung zur Verwirklichung dieses
unsches von Seite des hochw. f. b. Ordinariates der Diöcese Seckau aus-
g. Dieses richtete bereits im Jahre 1832 an die hohe Regierung die
te, in Graz eine, einerseits an die deutsche Hauptschule, andererseits an
s Joanneum sich anschliessende Realschule zu errichten. Die Regierung
tete dieses Ansuchen an die Stände, mehrmals wurde darüber im Landtage
handelt und am 17. April 1838 fasste dieser den Beschluss, die Kosten
r Gründung und Erhaltung einer Realschule auf den steiermärkischen
mesticalfond übernehmen zu wollen.

In den Jahren 1842 bis 1844 wurde der Bau des Hauses ausgeführt —
e östliche Hälfte des jetzigen Landes-Oberrealschulgebäudes — in welchem die
ue Lehranstalt untergebracht werden sollte, durch Allerhöchste Entschlies-
ng vom 30. Jänner 1844 wurde der Organisationsplan derselben genehmigt
d mit Beginn des Schuljahres 1845/46 konnte an ihre Eröffnung geschritten
rden. Der 2. October 1845 war der denkwürdige Tag, an welchem dieselbe
ttfand. Seine kais. Hoheit Erzherzog Johann verherrlichte sie
rch Seine Gegenwart; der damalige Landes-Gouverneur Mathias
onstantin Graf Wickenburg, der Landeshauptmann-Stellvertreter
ncenz Graf Szapary, der Verordnete und ständische Ausschussrath
dwig Crophius Edler v. Kaisersieg, Abt von Reun, der Bürger-
ister von Graz Dr. Andreas Hüttenbrenner, wohnten der Feier-
hkeit bei. — Die Schlussworte der Festrede, welche an jenem 2. October

1845 Graf Szapary hielt, lauten: „Der Segen des Himmels, wir heute in frommer Erhebung erfleht haben, walte nun über dieser n Schöpfung einer regen Zeit. Reichlich ströme bald aus den Räumen d und aller unserer Lehranstalten gründliches Wissen, frische Thatkraft ein edler Sinn auch hinaus in die weiteren Kreise des Lebens; — verb vor Allem wahre Bildung und Sittlichkeit in allen, auch den unteren Schi der Staatsgesellschaft; — vermehre den Nutzerwerb aus unserem hei lichen Boden; — unterweise uns in der besseren Bearbeitung unserer trefflichen Rohstoffe; — lehre uns auch die minder guten veredeln neue auffinden; — lehre uns die zweckmässigere Anwendung beka Maschinen; — befähige uns, die Werkstätten auch mit neuen Kunstgetr zu bereichern, und lehre uns die geheimnisvollen Kräfte der Natur tiefer erforschen und sie noch mehrfältig als starke und rührige Diene unterthan zu machen. Der gehoffte Vortheil kann nicht säumen. S schnaubt der weltverbindende Dampfwagen vor den Thoren dieser H stadt voll Ungeduld, die veredelten Erzeugnisse des heimischen Kunst- Gewerbefleisses von Land zu Land, ja bis an die Süd- und Nordküste deutschen Vaterlandes zu tragen, und selbst die unsern Alpen dadurch näher flutenden Meere bieten ihre Schiffe dar, die Hervorbringungen u stillen Gebirgsthäler über die fernsten Gebiete der Erde zu verbreite dagegen uns die Reichthümer jener im glücklichen Tausche herüberzubr Wohl mögen solche Hoffnungen dem nüchternen Denker fast zu überschwä dünken, aber gründliche Kenntnis, geistige Regsamkeit, unablässiger und unerschütterlicher Lebensmuth sind die wunderkräftigen Mittel, u was jetzt nur ein kühnes Traumbild scheint, bald verwirklicht in die E nung zu führen. — Dann wird einst der spätgeborne Enkel, froh geni das ihm vorbereitende Glück, dankbar gedenken all der gemeinnü Anstalten und Einrichtungen, die wir Jetztlebende in gemeinsamer Vate liebe und in einträchtigem Zusammenwirken in das Leben geführt und wird er auch kaum vergessen können des Tages, den in anspruchlose zu begehen, wir uns hier in dieser Stunde versammelt haben.“ So Graf Szapary.

Klingen sie nicht wie prophetisch diese Worte, die heute vor 40 gesprochen wurden, und ist nicht viel von dem in freudige Erfüllung geg was darin vorausverkündet wurde? Und liegt nicht schon darin die E tigung des Festes, das wir heute feiern und dabei in dankbarer Erin Jener gedenken, die diese Lehranstalt in's Leben riefen?

Mit zwei Jahrgängen war sie ursprünglich geplant, ihre Orga war gleich jener der Realschule am k. k. Polytechnicum in Wie 87 Schülern wurde sie eröffnet. Zehn Jahre bestand sie in dieser nur mit der Modification, dass im Schuljahre 1854/55 ein Vorbere Jahrgang eingeführt wurde; dieser währte aber nur ein Jahr, denn inz

rden bereits die Einleitungen getroffen, um die bisher zweiclassige Anstalt h Massgabe des Organisations-Entwurfes für die österreichischen Mittel- ulen in eine sechsclassige Realschule zu verwandeln.

Der ständische Ausschuss erklärte sich mit patriotischer Opferwilligkeit eit, die für die Herstellung und Erhaltung einer vollständigen Realschule orderlichen Kosten aus dem steiermärkischen Domesticalfonde decken zu llen und Seine Majestät sanctionirte am 8. April 1855 diesen Beschluss. ese nunmehr vollständig gewordene Realschule wurde am 6. October 1855 feierlicher Weise mit fünf Classen eröffnet, denen mit October 1856 die hste Classe folgte. Im alten Hause war aber für diese sechs Classen, mit er grossen Schülerzahl der Raum bald so beengt, dass eine Erweiterung s Schulgebäudes zur dringendsten Nothwendigkeit wurde. Auch hiebei ff der ständische Ausschuss thatkräftig ein, beschloss aus Landesmitteln Vergrösserung des Hauses durchzuführen, und so entstand der stattliche ulpalast an der Ringstrasse, der, in seinem neuen Theile 1861 bezogen, sere Anstalt beherbergt.

In demselben Jahre 1861 vollzog sich ein für das ganze Reich hoch- htiges und auch für unsere Schule bedeutsames Ereignis. Unser Vaterland t mit dem kaiserlichen Patente vom 26. Februar 1861 in die Reihe der nstitutionellen Monarchien, und durch die Landesordnung für das Herzogthum eiermark von demselben Tage ging auch die Verwaltung der vormals ndischen Anstalten an die neue Landesvertretung und ihr Executivorgan, n Landes-Ausschuss über. Dankt unsere Lehranstalt ihre Gründung und e Erhaltung während 16 Jahren den alten Ständen der Steiermark, so reut sie sich nunmehr des Schutzes, des Wohlwollens, der Förderung durch e nach den Grundsätzen des modernen Staatsrechtes gewählte Vertretung s ganzen Landes und ihres ausführenden Organes, des hohen Landes- sschusses; haben jene nach ihren beschränkten Kräften Bedeutendes für n Realunterricht geleistet, so können wir jetzt umsomehr mit Freude und olz auf das hinblicken, was das ganze Land in seiner Vertretung mit weiterter Machtvollkommenheit für seine, für unsere Landes-Oberrealschule than und gewirkt.

So berieth und beschloss der steiermärkische Landtag das Gesetz, treffend die Realschulen, welches unter dem 8. Jänner 1870 die Aller- chste Sanction erhielt, und als Zweck der Realschule hinstellt, eine all- meine Bildung mit besonderer Berücksichtigung der mathematisch-natur- ssenschaftlichen Disciplinen zu gewähren und als Vorbereitung für die heren Fachschulen zu dienen; so wurde nach Massgabe dieses Gesetzes d nach den Bestimmungen des Lehrplanes vom 19. Juli 1870 die Anstalt s einer sechsclassigen in eine siebenclassige umgewandelt; so wurden durch e Munificenz des hohen Landtages Jahr für Jahr die Lehrmittelsammlungen

im reichsten Masse vermehrt, dass unsere Anstalt in dieser Beziehung gev von keiner Schwesteranstalt übertroffen, von wenigen erreicht wird.

So waltete das Land seit vier Decennien zum Nutzen und Fromm unserer Schule.

An dem heutigen, der Erinnerung an die Gründung dieser Ans gewidmeten Feste, obliegt uns nun vor Allem die angenehme Pflicht, treuer Ergebenheit und mit dem heissesten Danke derer zu erwähn welche dieselbe seit den 40 Jahren ihres Bestandes schützten, schirm förderten. Und da geziemt es uns in erster Reihe mit dankerfülltem Her jener Männer zu gedenken, welche des Kaisers Gnade an die Spitze Landes-Regierung gerufen, von dem Gouverneur Graf Wickenburg der an der Wiege dieser Anstalt gestanden, bis zu dem in allen Ga Steiermarks hochverehrten und allgeliebten Manne, der geg wärtig unseres Landes Verwaltung lenkt und dem die Herzen aller Bewoh desselben, von den Kalkschroffen des Nordens bis zu den Rebengeländen Südens mit inniger und tiefer Sympathie entgegenschlagen.

Unsere Schule war von ihrem Beginne an und ist es stets geblie ein Werk des Landes, und jene Männer, welche jeweilig das altehrwür Amt eines Landeshauptmannes der Steiermark bekleideten, waren die unmi baren Vorgesetzten derselben. Ignaz Maria Graf Attems war es, u dessen Auspicien sie in's Leben trat; wir älteren erinnern uns seiner r als des würdigen Greises im Silberhaar, dessen Antlitz von seinem W wollen und Edelsinn, dessen kluges Augenpaar von seinem durchdringe Verstande Zeugnis gab, und der unter schwierigen Verhältnissen das R der Stände und das Wohl des Landes mit den Anforderungen des St stets in Einklang zu bringen wusste. Ihm folgten Karl Graf Gleisp der erste Landeshauptmann der autonomen Provinz, dessen Name in grossherzigen Stiftungen fortleben wird, die er dürftigen und würdigen dierenden widmete; Moriz v. Kaiserfeld, der edelsten Söhne un Landes einer, dessen vor wenigen Monden erfolgter Tod ganz Steierma die tiefste Trauer versetzte, und seit Jahresfrist der edle Sprosse ei erlauchten Geschlechtes, das seit sechs Jahrhunderten in uns Lande blüht. — Sie alle sorgten für unsere Schule wie ein Vater für sein

In gleichem Masse gilt dies von den Studien-Referenten im La Ausschusse, deren Namen nur zu nennen sind, um ihrer Verdienste be zu werden: Moriz v. Kaiserfeld, Karl v. Stremayr, der späte Unterrichts-Minister seine segenbringende Thätigkeit über das ganze entfaltete, Dr. Alois Schloffer, der hochbegabte Redner und chara feste Politiker, Dr. Josef v. Kaiserfeld, das Prototyp eines ehren Rechtsanwaltes, und der gegenwärtige Studien-Referent, dessen weiser und wohlwollender Leitung zu stehen alle Lehranstalte Landes sich beglückt erfreuen.

Nicht minder warmen Dankes mögen versichert sein die staatlichen pectoren unserer Anstalt, die ohne Ausnahme stets mit dem herzlichsten ohlwollen ihres Amtes uns gegenüber walteten und deren Anregungen viss nicht wenig zum Aufschwunge der Landes-Oberrealschule beitrugen; treuer Verehrung sei gedacht des hochverdienten Schulveteranen Ritter Močnik, Dr. Wretschko's, der jetzt in des Reiches Hauptstadt wirkt, l des Mannes, der gegenwärtig diese Stelle bekleidet, und den sere Anstalt und ihr Lehrkörper als wahren Freund und wohlgesinnten nner zu verehren, volle Ursache haben.

Und wenn ich jetzt zu jenen Männern und der Erinnerung an sie ergehe, welche an unserer Realschule selbst unmittelbar gewirkt, so dünkt mich fast, ich wandle auf einem Friedhofe unter Kreuzen und Grabinen, denn so viele von denen, die ihr Wissen und ihre Kraft einst dieser hranstalt widmeten, deckt der kühle Rasen; als ihr erster Director wirkte dwig Crophius, Abt von Reun, ein edler würdiger Priester, der seine ze reiche und mannigfaltige Thätigkeit dem Dienste des Landes widmete; zur Seite stand Dr. Georg Haltmeyer, der Lieblingsschüler des ühmten Mineralogen Mohs, später Director des k. k. Polytechnicums in en; diesem folgte mein unmittelbarer Vorgänger, der jetzt ch im wohlverdienten Ruhestande in unserem Unterstützungs-Vereine sichtig wirkt.

Nicht wenige von den Professoren, welche an unserer Lehranstalt thätig ren, zeichneten sich auf dem Gebiete der Wissenschaft aus und wurden hier an höhere Stellen berufen, so der berühmte Zoologe Carl Ludwig hmarda, der ausgezeichnete Geologe Carl Peters; Johann v. gner und Karl Pelz, jetzt unserer technischen Hochschule, Dr. egor Krek und Dr. Hans v. Zwiedineck, der hiesigen Universität fessoren.

Wo solche Kräfte wirkten, muss auch Gutes und Tüchtiges geleistet, ssen Schüler herangebildet worden sein, welche auf dem Gebiete der ssenschaft oder auf dem Felde der Praxis ihrem Namen Ehre gemacht en, und die, als ihre einstigen Schüler zu nennen, unsere Anstalt mit lz und Freude erfüllt. Mit besonderer Befriedigung möge hervorgehoben den, dass ein Mann, der jetzt im hohen Landes-Ausschusse mit zu Rathe t, seine ersten öffentlichen Studien an unserer Lehranstalt vollendete; t gefeierte Männer, die einst Schüler unserer Schule waren, sind, ein ühmter Architekt Deutschlands, dessen gothischer Prachtbau als Rathhaus Marienplatz Münchens ziert und dessen neuester Kirchenbau sich in den uern unserer Stadt erhebt, ein ausgezeichneter Physiker, Professor an der versität zu Prag, eine der ersten Autoritäten im Tunnelbau, Professor Polytechnicum zu Hannover; von unseren ehemaligen Schülern wirken ferner

als Professoren an technischen Hochschulen drei in Graz, einer in zwei in Prag, einer in Aachen. Und wie liesse sich noch, wenn ich nennen könnte, die Zahl derer vermehren, auf die unsere Landes-Ober schule als ihre einstigen Schüler mit Freude und Stolz zu blicken be tigt ist.

Diese kurze Skizze der Geschichte unserer Anstalt in den vierzig Ja ihres Lebens und Wirkens würde aber unvollständig sein, würde des schö und besten entrathen, wenn ich nicht noch zweier Tage erwähnte, w die herrlichsten sind in jenen vier Decennien, und welche in der Chroni Lehranstalt glänzen und leuchten werden, so lange sie besteht und w wird. Am 1. Juli 1873 beglückte Seine kaiserliche Hoheit durchlauchtigste Herr Kronprinz und Erzherzog Ru unsere Schule mit Hochseinem Besuche; er durchschritt die Reihen Schüler, sprach viele derselben an und nahm die Huldigung von Seit Lehrkörpers und der Schüler in gnädigster Weise entgegen.

Zehn Jahre später und wir zählen 1883; ein bedeutungsvolles in der Geschichte unseres Landes, denn mit ihm waren sechs Jahrhun verflossen, dass sich die Steiermark freiwillig dem Hause Habsburg unte dass sie Rudolf den deutschen König herbeirief und ihn bat, Ordnu machen nach den Wirren des Zwischenreiches und seinen Sohn als H des Landes einzusetzen. — In diesen sechs Jahrhunderten sind die S märker ihrem Herrscherhause in Freud und Leid, in Noth und Glüc Kampf und Sieg stets unentwegt treu geblieben; tausende und aber tau tapfere Steiermärker haben auf nahen und fernen Schlachtfeldern gek und geblutet, und wo Oesterreichs Doppelaar seine Schwingen entfaltet fehlte auch die, wenn auch kleine, aber immer todesmuthige Schaar aus Steirerlande nicht. Unlösbar sind in diesen sechs Jahrhunderten die Gesc des Landes und Volkes mit denen seiner Fürsten verknüpft geblieben. De feierte die Steiermark im Jahre 1883 mit vollem Rechte ein Jubelfes dadurch von neuem wieder die alte Treue des Volkes zu seinem Fürst bekräftigen. Und als die frohe Botschaft in's Land drang, Seine Maje der Kaiser wolle in Allerhöchst eigener Person dieses Fest mitbeg welche Freude, welche Begeisterung ergriff da nicht alle Bewohner u Landes. Es waren aber auch herrliche Tage — der 1. bis 9. Juli 1883 — Kaisertage in unserer Stadt. Wer vermöchte sie ganz zu schildern, die und Freude des Volkes, die Beweise der Treue und Anhänglichkeit an H und Reich, die allüberall, wo des Kaisers Majestät erschien, mit elemen Gewalt hervorbrachen und doch stets in den gebührenden Schranke Hochachtung und Ehrfurcht sich bewegten. — Unter den Sammlunge Anstalten, welche in jenen Tagen mit dem Allerhöchsten Bes ausgezeichnet wurden, befand sich auch unsere Anstalt. Seine Maje geruhten dem Unterrichte in allen sieben Classen beizuwohnen, die M

Laboratorien und die Zeichnungen und Modellirarbeiten der Schüler besichtigen. Es war ein Tag des Glückes und der Ehre für unsere ule. Ein Denkstein im grossen Prüfungssaale ist bestimmt, dieses hoch-euliche Ereignis zu verewigen mit den Worten: Seine kais. königl. ostolische Majestät Kaiser Franz Josef I. beglückte 4. Juli 1883 diese Lehranstalt mit Allerhöchst Seinem suche.

Ein kaiserlicher Prinz, Erzherzog Johann, wirkte wie bei allem Guten Grossen, was zu seiner Zeit in Steiermark entstand, bei der Gründung erer Lehranstalt mit, des Reiches Kronprinz und des Kaisers Majestät ost beglückten sie mit Allerhöchst Ihrer Gegenwart; möge das Andenken diese freudenvollen Ereignisse nie erlöschen, möge unsere Anstalt sich s bewusst bleiben der Huld und des Schutzes, deren sie von allen Seiten ilhaftig wurde, möge sie stets wirken zum Wohle des Landes, möge sie e Schüler heranbilden zu kenntnisreichen und charaktervollen Männern sie befähigen, den Kampf im Leben siegreich zu bestehen, möge sie der Jugend, die ihr anvertraut ist, die Keime der Vaterlandsliebe, der änglichkeit an Kaiser und Reich stets treu hegen und pflegen — dann l man, wenn wieder Decennien verflossen sind, von ihr sagen können, hat nicht umsonst bestanden, nicht umsonst gewirkt. Das walte Gott!

Festgedicht.

Verfasst von Prof. Dr. Eugen Netoliczka,

gesprochen vom Abiturienten **Franz Peitler.**

Wie manche liebe Hand hat in vergang'nen Zeiten
Ein Bäumchen angepflanzt, und zwar mit süssem Hoffen,
Es werde kräft'ge Zweige einst weithin verbreiten,
Wenn längst den Pflanzer schon das Todeslos getroffen.
Denn wenn auch er den Baum im vollen Schmuck nicht schaut,
Die Nachwelt dankt ihm still, für welche er gebaut.

Der Baum gedeiht, wenn treue Gärtner ihn behüten,
Er fasst dann tiefe Wurzel, strebt zur Höh'; es greifen
Die Zweige weit hinaus, er treibt die schönsten Blüten
Und Früchte, die im warmen Sonnenstrahle reifen.
Und immer kräft'ger wird des Stammes Lebensmark,
Der Baum steht endlich da, vollkommen, gross und stark.

Vor solchem Baume steh'n wir heute, Schulgenossen,
Der uns vor vierzig Jahren ward gepflanzt zum Segen.
Ein edler Fürst, dem alten Habsburgsstamm entsprossen,
Für den in Steiermark sich alle Herzen regen,
Hat unserm Land den hoffnungsvollen Keim vertraut,
Er hat für Tausende den edlen Baum gebaut.

Wer zählt die Früchte, welche schon der Baum getragen?
Wer zählt die Blüten, die noch jetzt im Keime liegen?
Wer kann den Segen künden, der in all' den Tagen
Dem Baum des echten Wissens schon bis jetzt entstiegen?
Wir fühlen innig dies und wollen auch erneut
Geloben, das zu nützen, was der Baum uns beut,

Und warme Dankbarkeit soll uns're Brust bewahren
Für jenen Stifter, den nur uns're Väter schauten;
Für alle Männer dann, die in den vierzig Jahren
Als die Vertreter dieses Landes weiter bauten;
Und all' der lieben Gärtner wollen wir gedenken,
Die stets nur edlen Samen in das Erdreich senken.

Wohl Viele sind seitdem aus diesem Kreis geschieden
In jenes Land, von dem sie nimmer wiederkehren,
Wohl Mancher musst' durch langes Tagewerk ermüden,
Weil wir am Lebensabend voller Kraft entbehren.
Auch dieser sei in Lieb' und Dankbarkeit gedacht,
Sie haben unsern Baum zum Segensbaum gemacht.

D'rum, liebe Schulgenossen, bringt in diesen Hallen
Ein „Hoch" dem Pflanzer und den treuen Gärtnern allen!

Rede

es Herrn Studien-Referenten im steierm. Landes-Ausschusse

Dr. Moriz Ritter v. Schreiner.

Mir wurde die ehrenvolle Aufgabe zu Theil, am Schlusse der heutigen ier Namens der Landes-Vertretung das Wort zu ergreifen. Ich fühle ich hiezu auch wohl berufen, einerseits wegen der Abwesenheit unseres errn Landeshauptmannes, andererseits in Folge meiner langjährigen ellung als Studien-Referent im steiermärkischen Landes-Ausschusse. Als lcher erscheine ich an dieser Stelle, um insbesondere das, was von ite des Redners, welcher die geehrte Versammlung begrüsste und was n Seite des Herrn Directors gesprochen wurde, zu ergänzen oder zu voll- den; ich will nämlich einige Worte über die Wirksamkeit, welche der ehrkörper und der Director selbst entfaltet haben, sprechen; ich halte ch für berufen, darüber ein Urtheil abzugeben, weil ich seit einer langen eihe von Jahren meine vollste Aufmerksamkeit darauf verwendet habe.

Der Lehrkörper einer Schule und sein Vorstand haben heutzutage ne schwere Aufgabe. Es handelt sich darum, die Anforderungen des Lebens d der Wissenschaft mit den Kräften der Jugend in Uebereinstimmung bringen. Es handelt sich darum, Charakter und Herz zu bilden und dem len Einfluss zu begegnen, dem bei uns die Jugend leider nicht selten rch manche Erscheinungen des privaten und öffentlichen Lebens unter- rfen ist. Es handelt sich darum, angesichts der inneren Kämpfe, an nen unser Vaterland so reich ist, in die Jugend die edlen Keime des Patrio- mus zu pflanzen und dafür zu sorgen, dass diese Keime feste Wurzeln ssen und sich dann auch an der Hochschule erhalten und entwickeln. efür, sowie für die Ausbildung und Erwerbung von Kenntnissen, hat, das aube ich mit Stolz sagen zu können, unsere Schule, soweit es menschen- öglich ist, das beste geleistet.

Die Anforderungen an die Jugend sind gross aber sie sind nicht über- eben und mir wenigstens sind Klagen wegen Ueberbürdung der Jugend unserer Lehranstalt nicht vorgekommen. Der Lehrkörper und die Direction rstehen es, diesen Anforderungen gerecht zu werden und die Aufgabe der hule zu erfüllen, ohne Geist und Körper der Jugend zu Grunde zu chten; ebenso, und das erkenne ich mit noch grösserer Wärme an, sehen r an unserer Lehranstalt nicht, wie wohl anderwärts, die nachtheilige irkung auf Charakter und Herz an den Schülern, welche die Mittel- hule verlassen und sodann an die Hochschule übertreten. In unserer tech- schen Hochschule sehen wir die Jugend mit dem gleichen Fleisse freiwillig sjenige üben, was sie an der Mittelschule unter dem Zwange der Disciplin

vollführt, und es ist endlich mit Freude zu constatiren, dass die Anhä lichkeit an Kaiser und Reich, die an unserer Lehranstalt so eifrig gepfl wird, auch an unserer technischen Hochschule nicht verläugnet wird. So gerei es mir zur wahren Freude, dem Lehrkörper und insbesondere dem He Director im Namen des Landes den Dank für ihr pflichteifriges und verstä nissvolles Wirken auszusprechen. So ist denn die Lehranstalt heute e weitaus andere, eine weitaus höher stehende als sie es vor 40 Jah war. Das ist eine Folge des Umschwunges der Verhältnisse und der Fo schritte unserer Zeit. Dieser Umschwung, dieser Fortschritt aber ist verdanken, wir können es geradezu sagen, der directen Einwirkung des al gnädigsten Monarchen, den wir an der Spitze unserer Monarchie sehen.

Unter seiner Regierung ist das Unterrichtswesen in Oesterreich geworden, was es heute ist. Es ist das nicht erst der Volksvertretung danken, denn gerade in derjenigen Zeit, in welcher die Herrschaft über Monarchie in die alleinige Hand des Herrschers gelegt war, ist die ga grosse Reform unseres Mittel- und Hochschulwesens in's Leben getre Wie in allem und jeden, so sind wir auch auf diesem Gebiete unse Landesherrn den grössten Dank schuldig, und ich glaube wohl sagen können, wo immer in Oesterreich der Streit der Völker untereinander n so heiss entbrennt, in Einem Gefühl sind alle Völker Oesterreichs gleich dem der Treue, der Anhänglichkeit und der Dankbarkeit für unser erhabenen Monarchen, unseren allergnädigsten Kais Daher bin ich überzeugt, dass der Ruf, zu dem ich sie auffordere, a hier gleichen Wiederhall finden wird: Seine Majestät unser all gnädigster Kaiser Franz Josef I. lebe Hoch! Hoch! Ho

ANWENDUNG

DER

IFFERENTIALGLEICHUNGEN

1. ORDNUNG UND *n*. GRADES

AUF

GEOMETRISCHE BEISPIELE

MIT

BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG DER SINGULÄREN LÖSUNGEN.

VON

PROF. ADALBERT DESCHMANN.

Die allgemeine Form einer Differentialgleichung 1. Ordnung und Grades ist:

$$1)\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^n + Z_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + Z_2\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} + \ldots + Z_{n-1}\frac{dy}{dx} + Z_n = 0,$$

rin Z_1, Z_2, $Z_3 \ldots Z_n$ Functionen von x und y bezeichnen. Das zunächst ı darbietende Verfahren zur Integration einer derartigen Differential- ichung besteht darin, dass man die Gleichung in Beziehung auf $\frac{dy}{dx}$ als bekannte auflöst, wodurch man im Allgemeinen n verschiedene Werte $f_2, f_3 \ldots f_n$, sämmtlich Functionen von x und y, erhält und nachher n Differentialgleichungen

$$\frac{dy}{dx} = f_1, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right) = f_2, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right) = f_3 \quad \ldots\ldots \quad \left(\frac{dy}{dx}\right) = f_n$$

zeln integriert. Angenommen diese Integrale seien gefunden und durch Gleichungen:

$$\varphi_1(x, y, C_1) = 0, \quad \varphi_2(x, y, C_2) = 0 \ldots\ldots \varphi_n(x, y, C_n) = 0$$

gestellt, so muss jedes derselben, welcher Wert auch der in ihm haltenen Constanten beigelegt werden mag, der Gleichung (1) genügen, r keines lässt sich aus dem andern durch blosse Specialisierung der stanten erhalten, und keines ist im eigentlichen Sinne ein particuläres gral. Die Gleichung aber, welche alle n Integrale in sich enthält und das allgemeine Integral betrachtet werden muss, ist die folgende:

$$\varphi_1(x, y, C_1) \cdot \varphi_2(x, y, C_2) \cdot \varphi_3(x, y, C_3) \ldots\ldots \varphi_n(x, y\, C_n) = 0.$$

Darin können jedoch, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, alle Constante durch denselben Buchstaben C bezeichnet werden, so dass s allgemeine Integral durch die Gleichung:

$$\varphi_1(x, y, C) \cdot \varphi_2(x, y, C) \cdot \varphi_3(x, y, C) \ldots \varphi_n(x, y, C) = 0$$

gestellt ist.

Beispielsweise sei die gegebene Differentialgleichung:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - ax = 0.$$

Die beiden einzelnen Differentialgleichungen sind:

$$\frac{dy}{dx} = +\sqrt{ax}, \quad \frac{dy}{dx} = -\sqrt{ax};$$

die Integrale dieser Gleichungen sind:

$$y - \frac{2}{3}\sqrt{ax^3} - C_1 = 0, \quad y + \frac{2}{3}\sqrt{ax^3} - C_2 = 0,$$

folglich ist das allgemeine Integral, wenn man $C_1 = C_2 = C$ setzt,

$$(y - C)^2 - \frac{4}{9}ax^3 = 0.$$

Das vorher entwickelte Verfahren verliert seine Brauchbarkeit, w die Wurzeln der gegebenen Gleichungen sehr verwickelte Ausdrücke gar nicht angebbar sind; es ist dann häufig vortheilhaft, die Gleichung auf y oder x zu reducieren, d. h. ihr eine der folgenden Formen zu verlei

$$y = \Phi\left(x, \frac{dy}{dx}\right) \text{ oder } x = \Psi\left(y, \frac{dy}{dx}\right).$$

Aus $y = \Phi(x, y')$ ergibt sich durch Differentiation

$$y' = \frac{d\,\Phi(x,y')}{dx} + \frac{d\,\Phi(x,y')}{dy'} \cdot \frac{dy'}{dx},$$

d. h. eine Differentialgleichung zwischen den beiden Variabeln x un durch Integration erhält man hieraus eine Gleichung $f(x, y' C) = 0$, w mit $y = \Phi(x, y')$ verbunden durch Elimination von y' zu einer Gleic zwischen x und y führt.

Aehnlich wird das Verfahren, wenn man die gegebene Differe gleichung nach x auflöst.

Lässt sich die gegebene Differentialgleichung auf die homogene F

$$y' + F_1\left(\frac{y}{x}\right)y'^{n-1} + F_2\left(\frac{y}{x}\right)y'^{n-2} + \ldots\ldots + F_{n-1}\left(\frac{y}{x}\right)y' + F_n\left(\frac{y}{x}\right) =$$

bringen, so hat die Integration meistens keine Schwierigkeiten. Setzt nämlich $\frac{y}{x} = t$, so erhält die obige Gleichung die Form:

$$f(y', t) = 0,$$

die man entweder in Beziehung auf y' oder, wenn dies umständlich noch t auflösen kann, wodurch man entweder $y' = \varphi(t)$ oder $t = \psi(y')$ Resultate erhält.

Aus der Gleichung $y = xt$ erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dt}{dx} + t, \; y' - t = x\frac{dt}{dx}, \text{ daraus } \frac{dx}{x} = \frac{dt}{y' - t}.$$

Ist $y' = \varphi(t)$, so erhält man auf der rechten Seite nur t, ist aber $= \psi(y')$, so kommt rechter Hand nur y' vor; in jedem Falle sind die riabeln gesondert und durch Integration erhält man

$$\log x = \int \frac{dt}{y' - t}$$

er auch $$\log x = -\log(y' - t) + \int \frac{dy'}{y' - t}.$$

Im erstern Falle gibt die wirklich ausgeführte Integration $\log x =$ $) + C$, worin man für $t = \frac{y}{x}$ setzt;

im zweiten Falle ist das Ergebnis von der Form $\log x = \chi(y') + C$, che Gleichung man mit der gegebenen verbindet, indem man y' aus den eliminiert.

Anwendung der Differentialgleichungen auf die Geometrie.

Da die trigonometrische Tangente des Winkels λ, welchen die in end einem Punkte der Curve gezogene Tangente mit der Abscissen- se bildet, durch $\frac{dy}{dx} = y'$ dargestellt ist, so lassen sich die Subtangente, normale, Normale etc., als Functionen von y' ausdrücken.

P sei ein beliebiger Punkt der Curve, deren Gleichung $y = f(x)$ ist, $= x$, $MP = y$, Q und R bezeichnen die Punkte, in welchen eine durch enkrecht zu OP gelegte Gerade die Abscissen-, beziehungsweise die inatenachse schneidet, ferner U den Durchschnitt der Normale mit der cissenachse, V den Durchschnitt der Tangente mit der Ordinatenachse, erhalten wir folgende Relationen:

$$OU = x + yy', \quad OV = y - xy', \quad MU = yy',$$

$$QU = \frac{y(xy' - y)}{x}, \quad OR = \frac{x^2 + y^2}{y}, \quad OQ = \frac{x^2 + y^2}{x}.$$

Beispiele:

I) Es wird die Curve gesucht, bei welcher die Relation $OV = a\,Cotg\,\lambda$ tfindet.

$$y - xy' = \frac{a}{y'}, \qquad Cotg\,\lambda = \frac{1}{y'}$$

$$yy' - xy'^2 = a, \qquad y = \frac{a + xy'^2}{y'},$$

differenziert man diese Gleichung nach y', so erhält man

$$0 = \frac{xy'^2 - a}{y'^2} \cdot \frac{dy'}{dx}.$$

Setzt man $\frac{dy'}{dx} = 0$, so ist $y' = C$, welchen Wert man in die gegeb Gleichung substituirt, woraus

$$y = \frac{a + C^2 x}{C} = \frac{a}{C} + Cx$$

$$C = \frac{a}{b}; \quad y = b + \frac{a}{b} \cdot x.$$

Setzt man aber $\frac{xy' - a}{y'^2} = 0$, $y' = \sqrt{\frac{a}{x}}$ in die gegebene Gleic substituiert gibt

$$y^2 = 4ax.$$

Es findet nun in diesem, wie in manchen andern Fällen der m würdige Umstand statt, dass man der gegebenen Differentialgleichung nur durch das allgemeine Integral mit einer willkürlichen Constanten, son auch durch eine Gleichung zwischen x und y genügen kann, in wel keine willkürliche Constante vorkommt und welche auch nicht d Specialisierung der Constanten als solcher aus dem allgemeinen Inte abgeleitet werden kann, somit nicht etwa als ein particuläres Int der gegebenen Differentialgleichung dargestellt werden kann. Man n nun eine solche Lösung eine besondere oder singuläre Lösung der gegeb Differentialgleichung.

Interessant ist nun der Zusammenhang des allgemeinen Integrale der singulären Lösung. Es sei nämlich $F(x, y, C)$ die Gleichung einer C in welcher ein Parameter C vorkommt, welchem beliebige Werte beig werden können. Gibt man C verschiedene Werte δ, 2δ, 3δ, $4\delta \ldots$, so e man eine Reihenfolge von Curven derselben Art. Hiebei kann es geschehen, dass jede nachfolgende die vorhergehende in einem Pu schneidet, und in diesem Falle entsteht die Frage nach dem geometris Orte der aufeinanderfolgenden.

Man muss die gegebene Gleichung $F(x, y, C) = 0$ nach C differenz und die so erhaltene Gleichung $\frac{dF(x, y, C)}{dC} = 0$ mit der ursprünglichen binden, indem man C eliminiert. Die dadurch erhaltene Gleichung, in w C nicht vorkommt, entspricht der Gesammtheit der aufeinanderfolg Durchschnittspunkte, welche eine Curve bilden, welche die „einhü Curve“ (enveloppe) des gedachten Systems von Curven ist.

In unserem Beispiele I) ist das allgemeine Integral:

$$y' - b - \frac{ax}{b} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1$$

$$-1 + \frac{ax}{b^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2,$$

durch Elimination von b erhaltene Gleichung 3

$$y^2 = 4ax \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3$$

Das Beispiel I) lässt sich auf folgende Weise lösen.

$$y - xy' = \frac{a}{y'}$$

$$yy' - xy'^2 = a,$$

pliciert man die Gleichung mit $4x$ und addiert y^2

$$4xy'^2 - 4xyy' + y^2 = y^2 - 4ax$$

$$(2xy' - y)^2 = y^2 - 4ax$$

Setzt man $y = uv, \quad y' = uv' + vu'$

$$(2xuv' + 2xvu' - uv)^2 = u^2v^2 - 4ax$$

$$\left[2xu \cdot \frac{dv}{dx} + v\left(2x\frac{du}{dx} - u\right)\right]^2 = u^2v^2 - 4ax$$

Wählt man u so, dass $2x\frac{du}{dx} - u = 0$, so folgt

$$\frac{du}{u} = \frac{2\,dx}{x}$$

$$u = \sqrt{x};$$

n

$$\left(2x\frac{dv}{dx} \cdot u\right)^2 = xv^2 - 4ax$$

$$2x\frac{dv}{dx} = \sqrt{v^2 - 4a}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\sqrt{v^2 - 4a}}{2x}$$

s

$$\int \frac{dx}{2x} = \int \frac{dv}{\sqrt{v^2 - 4a}}$$

$$log\, Cx^{\frac{1}{2}} = log\,(v + \sqrt{v^2 - 4a})$$

$$Cx^{\frac{1}{2}} - v = \sqrt{v^2 - 4a}$$

$$C^2x - 2Cvx^{\frac{1}{2}} = -4a$$

$$v = \frac{y}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{C^2 x + 4a}{2Cx^{\frac{1}{2}}}, \quad \text{weil } y = uv \text{ und } u = \sqrt{x}$$

$$C = \frac{2a}{b}, \quad y = b + \frac{a}{b} \cdot x$$

II) Es wird die Curve gesucht, für welche

$$OV^2 = a^2 Tang\, \lambda$$

$$(y - xy')^2 = a^2 y'. \quad \text{Setzt man } y' = p,$$

$$y - xp = a\sqrt{p}.$$

Differenziert man die Gleichung nach x,

$$p - p - x\frac{dp}{dx} = \frac{a}{2\sqrt{p}} \cdot \frac{dp}{dx}$$

$$\left(x + \frac{a}{2\sqrt{p}}\right) \cdot \frac{dp}{dx} = 0.$$

Setzt man $\frac{dp}{dx} = 0$, $p = C$ in die obige Gleichung substituiert

$$y - Cx = a\sqrt{C}, \quad a\sqrt{C} = b, \quad C = \frac{b^2}{a^2}$$

$$y = \frac{b^2}{a^2} \cdot x + b \quad \text{das allgemeine Integral.}$$

$$x + \frac{a}{2\sqrt{p}} = 0, \quad \sqrt{p} = -\frac{a}{2x}, \quad p = \frac{a}{4x^2}$$

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{a^2}{4x^2}, \quad y = -\frac{a^2}{4x};$$

$$4xy = -a^2 \quad \text{die singuläre Lö}$$

Construiert man sich z. B. mehrere Grade, deren Gleichungen

$$y = \frac{1}{36} \cdot x + 1$$

$$y = \frac{4}{36} \cdot x + 2$$

$$y = \frac{9}{36} \cdot x + 3$$

$$\vdots$$

$$y = \frac{n^2}{36} \cdot x + n$$

so ist der geometrische Ort der aufeinanderfolgenden Durchschnittsp
eine gleichseitige Hyperbel. deren Gleichung $4xy = -36$.

III) Es wird die Curve gesucht, für welche die Relation besteht

$$OU \,.\, OV = xy$$

$$(x + yy')\ (y - xy') = xy$$

Nach der Multiplication der beiden Binome, Reduction und Division h y' erhält man:

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{xy} = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}.$$

Setzt man in der homogenen Differentialgleichung $y = xt$,

$$x\frac{dt}{dx} + t = t - \frac{1}{t}$$

$$tdt = -\frac{dx}{x}$$

$$\frac{t^2}{2} = log\, ax^{-1} \quad Constante = log\, a$$

$$\frac{y^2}{2x^2} = log\left(\frac{a}{x}\right)$$

$$y^2 = 2x^2 \,.\, log\left(\frac{a}{x}\right) \quad \text{das allgemeine Integral.}$$

IV) Es wird die Curve gesucht, bei welcher das Rechteck aus OU OV gleich der Summe der Dreiecksfläche OMP und der Hälfte der ecksfläche MPQ ist.

$$(x + yy')\ (y - xy') = \frac{xy}{2} + \frac{y^3}{4x}$$

$$xyy'^2 - (y^2 - x^2)\,.\,y' = \frac{2x^2y - y^3}{4x}$$

$$y'^2 - \left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right).y' = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^3$$

$$y = xt, \qquad y' = \frac{t^2 - 1}{2t} \pm \sqrt{\frac{(t^2-1)^2 + t^2(2-t)}{4t^2}}$$

$$1) \quad y' = \frac{t}{2}, \qquad 2) \quad y' = \frac{t^2 - 2}{2t}$$

1) $$y' = \frac{t}{2}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x}$$

$$log\, y = \frac{1}{2}\, log\, x + C \qquad C = log\, c^{\frac{1}{2}}$$

$$y = c^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \quad \text{oder} \quad y^2 = cx$$

2) $$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dt}{\frac{t^2-2}{t} - t}$$

$$\log x = -\int \frac{2\,t\,dt}{t^2+2} = -\log(t^2+2) + C$$

$$\log x = \log\left(\frac{y^2+2x^2}{x^2}\right)^{-1} + \log 4a \qquad C = \log 4a$$

$$x = \frac{4ax^2}{y^2+2x^2}, \qquad y^2+2x^2 = 4ax$$

Der Aufgabe genügen eine Parabel und eine Ellipse, deren Gleichu
sind:

1) $y^2 = cx$ 2) $y^2 + 2x^2 = 4ax$

V) Man verlangt die Curve, für welche

$$OU.OV = 4(\triangle OMP - \triangle MPQ) \text{ ist.}$$

$$(x+yy')(y-xy') = \frac{2x}{y}(x^2-y^2)$$

Nach Division der Gleichung durch x^2 und Substitution von y

$$y'^2 - y'.\frac{t^2-1}{t} = 2t^2-1$$

1) $y' = -t$ 2) $y' = \frac{2t^2-1}{t}$

1) $$y' = -t$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

$$xy = C$$

2) $$y' = \frac{2t^2-1}{t}$$

$$\log x = \int \frac{dt}{\frac{2t^2-1}{t} - t}$$

$$\log x = \log(t^2-1)^{\frac{1}{2}} + C, \qquad C = \log a$$

$$\frac{x}{a} = \left(\frac{y^2-x^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$y^2 = x^2 + \frac{x^4}{a^2}$$

Die beiden Lösungen sind: $xy = c$, $y^2 = x^2 + \frac{x^4}{a^2}$.

VI) In einer Curve sei der Abstand der Tangente vom Coordinaten-
prunge gleich der doppelten Senkrechten, welche vom Endpunkte der
cisse auf den Radiusvector OP gefällt wird; man sucht die zugehörige
ve.

$$\frac{y - xy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$(x^2 + y^2)(y - xy')^2 = 4x^2y^2(1 + y'^2)$$

Dividiert man die Gleichung durch x^4 und setzt $y = xt$,

$$y'^2 - \frac{2t(1 + t^2)}{1 - 3t^2} \cdot y' = \frac{t^2(3 - t^2)}{1 - 3t^2}$$

1. $y' = -t$

$xy = c$ wie in V.

2. $y' = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}$

$$\log x = \frac{1}{2} \int \frac{1 - 3t^2}{t + t^3} \cdot dt$$

Zerlegt man den Bruch $\frac{1 - 3t^2}{t + t^3}$ in Partialbrüche,

$$\frac{1 - 3t^2}{t + t^3} = \frac{A}{t} + \frac{B + Ct}{t + t^2}$$

rhält man $A = 1$, $B = 0$, $C = -4$.

$$\log x = \frac{1}{2}[\log t - 2 \log(1 + t^2)] + \textit{Constante}$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{t}{(1 + t^2)^2} = \log \left[\frac{t}{(1 + t^2)^2} \right]^{\frac{1}{2}} + \textit{Constante}$$

$$x = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot c}{1 + \left(\frac{y^2}{x^2}\right)}, \quad \textit{Constante} = \log c$$

$$(x^2 + y^2)^2 = c^2 \cdot xy$$

Der Aufgabe genügt mithin jede gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten
Coordinatenachsen sind, andrerseits die Fusspunktcurve jeder solchen
rbel, d. h. eine Lemniscate. Die Gleichung der Fusspunktcurve erhält
im Allgemeinen auf folgende Weise. Es seien x und y die Coordinaten
beliebigen Punktes der gegebenen Curve, m und n die Coordinaten
sogenannten Poles, u und v die Coordinaten des Fusspunktes der vom
C auf die im Punkte (x, y) gezogenen Tangente, so erhalten wir aus
Figur leicht folgende Gleichungen:

$$v - y = y'(u - x), \qquad v - n = -\frac{1}{y'}(u - m)$$

daraus

$$u - m = \frac{(x - m)\,y'^2 - (y - n)\,y'}{1 + y'^2}$$

$$v - n = -\frac{(x - m)\,y' - (y - n)}{1 + y'^2}$$

Setzen wir nun, um aus dem allgemeinen Integrale $xy = c$ Beispiel VI die singuläre Lösung zu erhalten,

$$m = 0 \quad n = 0 \quad xy = c^2 \quad y' = -\frac{c^2}{x^2}$$

so ist:

$$u = \frac{c^4 x + c^2 x^2 y}{c^4 + x^4}, \quad v = \frac{c^2 x^3 + x^4 y}{c^4 + x^4}$$

oder:

$$ux^4 + uc^4 = 2c^4 x, \quad vx^4 + vc^4 = 2c^2 x^3$$

Durch Elimination von x aus diesen beiden Gleichungen erhält $(v^2 + u^2)^2 = 4c^2 uv$ die Gleichung der Lemnisate, die singuläre Lösung zu

VII) Die Differentialgleichung: $y - xy' = F(y')$ lässt sich, wie f auflösen.

$$y - px = F(p), \qquad y' = p$$

$$p - p - x\frac{dp}{dx} = F'(p) \cdot \frac{dp}{dx} \quad \text{durch Differentiation} \quad (F'(p) + x)\frac{dp}{dx} = 0$$

1. $\frac{dp}{dx} = 0$, $p = C$ wird substituirt in die gegebene Gleich gibt das allgemeine Integral $y - Cx = F(C)$.

2. $F'(p) + x = 0$, daraus $p = y' = \frac{dy}{dx} = f(x)$, das Integral di Gleichung gibt die singuläre Lösung.

VIII) Auf VII lässt sich folgende Differentialgleichung zurückfüh

$$4ay'^3 = (2xy' - y)^2$$

Nimmt man $y = z^n$, $y' = nz^{n-1} \cdot \frac{dz}{dx}$

$$4an^3 z^{4n-3}\left(\frac{dz}{dx}\right)^3 = \left(2nx\frac{dz}{dx} - z^n\right)^2$$

$$4an^3 z^{4n-3}\left(\frac{dz}{dx}\right)^3 = z^{n-1}\left(2nx\frac{dz}{dx} - z\right)$$

$$4an^3 z^{2n-2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^3 = 2nx\frac{dz}{dx} - z$$

$$\sqrt{4an^3 z^{2n-2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^3} = \sqrt{2nx\frac{dz}{dx} - z}$$

Wählt man nun $n = \frac{1}{2}$, so erhält man

$$z - x\frac{dz}{dx} = -\sqrt{\frac{ap^3}{2}}$$

1. $$\left[\frac{3ap^2}{4}\left(\frac{2}{ap^3}\right)^{\frac{1}{2}} - x\right] \cdot \frac{dp}{dx} = 0$$

$$\frac{dp}{dx} = 0 \qquad p = C$$

$$y^2 - Cx = -\sqrt{\frac{aC^3}{2}}, \quad \text{weil } y = z^n = z^{\frac{1}{2}}$$

$$y^2 = C\left(x - \sqrt{\frac{aC}{2}}\right), \quad C = \frac{2c^2}{a}$$

$$y^2 = \frac{2c^2}{a}(x - c) \quad \text{das allgemeine Integral}$$

2. $$\frac{3ap^2}{4}\left(\frac{2}{ap^3}\right)^{\frac{1}{2}} = x$$

$$\frac{9ap}{8} = x^2, \qquad p = \frac{8x^2}{9a}$$

$$p = \frac{dz}{dx} = \frac{8x^2}{9a}, \quad dz = \frac{8x^2}{9a}dx$$

$$z = \frac{8}{9a}\int x^2 \cdot dx$$

$$y^2 = \frac{8x^3}{27a} \quad \text{die singuläre Lösung.}$$

Will man aus dem allgemeinen Integrale $y^2 - \frac{2c^2}{a}(x - c) = 0$, die
äre Lösung, so differenziere man $y^2 - \frac{2c^2}{a}(x - c) = 0$ nach c

$$0 - \frac{4cx}{a} + \frac{6c^2}{a} = 0$$

$$c = \frac{2x}{3}$$

$$y^2 - \frac{8x^2}{9a}\left(x - \frac{2x}{3}\right) = 0$$

$$y^2 = \frac{8x^3}{27a}$$

IX) $OT \cdot OU = K^2$,

T bedeute den Durchschnittspunkt der Tangente mit der Abscissenac

$$\frac{(xy' - y)(x + yy')}{y'} = K^2$$

$$(xyy' - y^2)(x + yy') = K^2 yy'$$

Setzt man $x^2 + y^2 = z$

dann ist $x + yy' = \frac{1}{2} \cdot \frac{dz}{dx}$

und $xyy' - y^2 = \frac{1}{2}\frac{dz}{dx} - x^2 - y^2 = \frac{1}{2}\frac{dz}{dx} - z$

$$\left(\frac{1}{2}\frac{dz}{dx} - z\right) \cdot \frac{dz}{dx} = 2K^2\left(\frac{1}{2}\frac{dz}{dx} - x\right)$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 - \frac{2z}{x} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{2K^2}{x} \cdot \frac{dz}{dx} - 4K^2$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 - \frac{2(z + K^2)}{x} \cdot \frac{dz}{dx} = -4K^2$$

Addiert man beiderseits $\left(\frac{z + K^2}{x}\right)^2$, so erhält man

$$\left(\frac{dz}{dx} - \frac{z + K^2}{x}\right)^2 = \left(\frac{z + K^2}{x}\right)^2 - 4K^2.$$

$$\frac{z + K^2}{x} = t, \quad z + K^2 = xt, \quad \frac{dz}{dx} = t + x\frac{dt}{dx}$$

$$x^2\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = t^2 - 4K^2$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dt}{t^2 - 4K}$$

$$\log x = \log(t + \sqrt{t^2 - 4K^2}) + \text{Constante}$$

$$x = C(t + \sqrt{t^2 - 4K^2}), \quad \text{Constante} = \log C$$

$$\left(\frac{x}{C} - t\right)^2 = t^2 - 4K^2$$

$$\frac{x^2}{C^2} - \frac{2tx}{C} + 4K^2 = 0, \quad tx = x^2 + y^2 + K^2$$

$$x^2 - 2C(x^2 + y^2 + K^2) = -4C^2K^2$$

$$x^2(1 - 2C) - 2Cy^2 = 2CK^2(1 - 2C)$$

$$\frac{x^2}{2CK^2} - \frac{y^2}{K^2(1 - 2C)} = 1$$

$$2CK^2 = c^2$$

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2 - K^2} = 1$$

Als allgemeine Lösung findet man demnach eine Schaar concentrischer
sen $c^2 > K^2$ oder Hyperbeln $c^2 < K^2$, deren gemeinsame lineare
ıtricität $= K$ ist. Die singuläre Lösung gibt 2 Punkte, nämlich die
Kegelschnitten gemeinschaftlichen Brennpunkte.

X) Man verlangt die Curve, für welche

$$MU \,.\, QU = h^2$$

$$\frac{yy' \,.\, y(y - xy')}{x} = h^2$$

$$y^3y' - xy^2y'^2 = h^2x$$

$$y'^2 - \frac{y}{x}\,y' = -\frac{h^2}{y^2}$$

Die Gleichung ist nicht homogen, wird es aber, wenn man $y = \sqrt{xu}$ setzt.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{x}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{u}} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{x}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{u}} \cdot \frac{du}{dx}\right)^2 - \sqrt{\frac{u}{x}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{x}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{u}} \cdot \frac{du}{dx}\right) + \frac{h^2}{xu} = 0$$

$$\frac{x}{4u}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - \frac{u}{4x} + \frac{h^2}{xu} = 0$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 = \frac{u^2 - 4h^2}{x^2}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 4h^2}}$$

$$\log x = \log\left(u + \sqrt{u^2 - 4h^2}\right) + \log C$$

$$x = C\left(u + \sqrt{u^2 - 4h^2}\right)$$

$$\frac{x^2}{C^2} - \frac{2ux}{C} + 4h^2 = 0$$

$$x^2 - 2Cy^2 + 4C^2h^2 = 0 \qquad u = \frac{y^2}{x}$$

$$2C = c$$

$$x^2 - cy^2 + c^2h^2 = 0$$ das allgemeine Integral.

Differenziert man die Gleichung nach c,

$$-y^2 + 2h^2c = 0, \qquad c = \frac{y^2}{2h^2},$$

so gibt $c = \frac{y^2}{2h^2}$ in die Gleichung für das allgemeine Integral substi

$$y^4 = 4h^2x^2 \text{ als singuläres Integral.}$$

Man erhält die singuläre Lösung auch ohne Kenntnis des allgem Integrales aus der gegebenen Differentialgleichung, indem man die nach y' differenziert und aus dieser neuen und früheren Gleichung y' elimi

$$y'^2 - \frac{y}{x} \cdot y' + \frac{h^2}{y^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1$$

$$2y' - \frac{y}{x} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2$$

$y' = \frac{y}{2x}$ in 1 substituiert,

$$\frac{y^2}{4x^2} - \frac{y^2}{2x^2} + \frac{h^2}{y^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots$$

$$y^4 = 4h^2x^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3$$

CHULNACHRICHTEN

VON

DIRECTOR Dr. FRANZ ILWOF.

Personalstand des Lehrkörpers und Fächervertheilung.

Director.

ranz Ilwof, Doctor der Rechte und der Philosophie, Ritter des k. k. österr. Franz Josefs-Ordens, Docent der Volkswirthschaftslehre und Statistik an der k. k. technischen Hochschule, Prüfungs-Commissär für Statistik bei der k. k. staatswissenschaftlichen Staatsprüfungs-Commission, Verwaltungsrath der k. k. priv. wechselseitigen Brandschaden-Versicherungsanstalt, Vorstand des historischen Vereines für Steiermark, Ehren-Mitglied der historischen Gesellschaft in Berlin, des Lehrer-Vereines und des kaufmännischen Vereines „Mercur" in Graz, correspondirendes Mitglied des historischen Vereines für Krain, Correspondent der k. k. Central-Commission für Erhaltung und Erforschung der historischen und Baudenkmale. Lehrte Geographie und Geschichte in II. Realschulgasse 3.

Lehrpersonal für die obligaten Fächer.

a) Professoren und Lehrer.

r Emil Moser, akademischer Maler, Professor, Correspondent des k. k. Museums für Kunst und Industrie. (War für 1885/6 beurlaubt.) Burgring 14.

Wenzel Podrazil, Professor. Lehrte Freihandzeichnen in III., IV., V., VI. und VII. und ertheilte Unterricht im Modellieren. Glacisstrasse 61.

Max Buchner, Magister der Pharmacie, Professor, Mitglied des k. k. Landesschulrathes, a. o. Professor an der k. k. technischen Hochschule, Landesgerichts-Chemiker, Mitglied der zweiten Staatsprüfungs-Commission für das chemisch-technische Fach an der k. k. technischen Hochschule in Graz, auswärtiges Mitglied der deutschen chemischen Gesellschaft in Berlin, Klassenvorstand in VI. Lehrte Chemie in IV., V. und VI., Naturgeschichte im 1. Semester von II. und ertheilte Unterricht in der analytischen Chemie. Karl Ludwig-Ring 6.

Johann Papež, Professor der Landesmittelschule in Leoben, derzeit hier in Verwendung. Lehrte Freihandzeichnen in I. und II., Geometrie und geometrisches Zeichnen in II. und III. und Kalligraphie in I. und II. Leonhardstrasse 55.

Herr Eduard Hoffer, Doctor der Philosophie, Professor, Mitglied
Prüfungs-Commission für das Volks- und Bürgerschul-Lehramt, Obm
Stellvertreter des Vereines „Innerösterreichische Mittelschule", Mitg
des naturwissenschaftlichen Vereines für Steiermark und Aussch
Mitglied des Unterstützungs-Vereines für dürftige und würdige Stu
rende an der k. k. technischen Hochschule und st. Landes-Oberr
schule, Klassenvorstand in II. Lehrte Naturgeschichte in I.,
(2. Semester), in V., VI. (2. Semester) und VII. und Mathematik i
Rosenberg 70.

„ Anton Kautzner, Professor, Klassenvorstand in VII. Lehrte Ma
matik in I., III., VI. und VII. Radetzkystrasse 9.

„ Adalbert Deschmann, Professor, Kassier des Vereins „Innerö
reichische Mittelschule", Klassenvorstand in V. Lehrte Physik in
IV., VI. und VII. und Mathematik in V. Colisseumgasse 6.

„ Alois Pogatscher, Professor, Mitglied der Prüfungs-Commi
für Volks- und Bürgerschulen. (Beurlaubt für 1885/6.) Bürgergass

„ Anton Turkuš, Professor, Lehrer der französischen und englis
Sprache an der k. k. technischen Hochschule, Klassenvorstand
Lehrte deutsche Sprache in I. und IV. und französische Sprach
I., IV., V. und VI. Rechbauerstrasse 8.

„ Georg Weitzenböck, Professor, k. k. Oberlieutenant in der Res
Bibliothekar dieser Lehranstalt, Lehrer der französischen Sprach
I. Staatsgymnasium, Klassenvorstand in III. Lehrte deutsche Sp
in II. und III., französische Sprache in II., III. VII. Leon
strasse 55T.

„ Anton Stelzl, Weltpriester. Lehrte katholische Religionslehre
II., III. und IV. Mariahilferplatz 3.

„ Paul von Hofmann-Wellenhof, Doctor der Philosophie,
Lieutenant in der Reserve. Lehrte deutsche und englische Spra
V., VI. und VII. Heinrichstrasse 11.

„ Herr Josef Blaschke, Bibliothekar des Unterstützungsvereins. Kl
vorstand in IV. Lehrte darstellende Geometrie in V., VI. und
Geometrie. geometrisches Zeichnen und Mathematik in IV.
strasse 27.

b) Nebenlehrer.

Herr Franz Kreunz, Turnlehrer, Vorstand der Landesturnanstalt. Er
in allen Klassen den Turnunterricht. Heinrichstrasse 40.

c) Supplent.

Herr Franz Thalmayr, Doctor der Philosophie, approbirter Gym
Lehramts-Candidat. Lehrte Geographie und Geschichte in I., II.
V., VI., VII und steiermärkische Geschichte. Reitschulgasse 18

d) Provisorisch bestellt:

rr Robert Leidenfrost, Doctor der Philosophie, Pfarrer der hiesigen evangelischen Gemeinde, Senior im n. ö. Seniorate, Vorsitzender des Seniorats-Ausschusses, Mitglied des k. k. steierm. Landes-Schulrathes. Ertheilte Religions-Unterricht für die evangelischen Schüler augsburgischer und helvetischer Confession. Kaiser Josefsplatz 8.

e) Assistenten.

rr Victor Berka, approbirter Realschul-Lehramts-Candidat, Assistent für geometrisches Zeichnen und Hilfslehrer für Projectionslehre an der gewerblichen Fortbildungsschule. Gartengasse 18.

„ Josef Rammert, Lehramts-Candidat, beeideter Sachverständiger im Schriftenfache, Lehrer der Kalligraphie am II. Staatsgymnasium, Lehrer für Freihandzeichnen und Kalligraphie an der gewerblichen Fortbildungsschule, Assistent für Freihandzeichnen, Schönaugasse 14.

f) Lehramts-Candidat.

rr Georg Firtsch, approbirter Realschul-Lehramts-Candidat, Assistent für Mineralogie und Geologie an der k. k. technischen Hochschule, zur Ablegung des Probejahres (seit 3. Mai 1885) den Herren Prof. Dr. Hoffer und Buchner zugewiesen, beendete dasselbe mit Schluss des I. Semesters, in welchem er Botanik in VI. lehrte.

Lehrpersonal für die freien Fächer.

rr Franz Blümel, städt. Volksschullehrer. Ertheilte den Gesangsunterricht. Sporgasse 36.

„ Max Buchner, Professor, wie oben. Ertheilte den Unterricht aus der analytischen Chemie.

„ Dr. Franz Thalmayr, wie oben. Ertheilte den Unterricht in der steiermärkischen Geschichte.

„ Wenzel Podrazil, Professor, wie oben. Ertheilte den Unterricht im Modellieren.

„ Ignaz Wolf, Professor der Stenographie an der Akademie für Handel und Industrie, Lehrer dieses Gegenstandes am I. Staats-Gymnasium, an der k. k. Universität und am fürstbischöflichen Knabenseminare, Ehrenmitglied des steiermärkischen Stenographen-Vereines in Graz, Mitglied der k. k. Prüfungs-Commission für Lehrer der Stenographie. Ertheilte den Unterricht in der Stenographie. Wielandgasse 22.

Veränderungen im Lehrkörper.

Herr Professor Alois Pogatscher wurde (Erl. des h. st. Lan Ausschusses vom 27. Juli 1885, Z. 9515) für 1885/6 zum Behufe e Studienreise beurlaubt; der von ihm bisher versehene Unterricht in deutschen und englischen Sprache in V., VI. und VII. dem Herrn Dr. von Hofmann-Wellenhof übertragen, und mit der Supplierung Unterrichtes aus Geographie und Geschichte Herr Dr. Franz Thalm betraut. — Ebenso erhielt Herr Professor Emil Moser auch für 18 Urlaub (Erl. des h. Landes-Ausschusses vom 29. Juli 1885, Z. 10.121), Unterricht im Freihandzeichnen von III.—VII. wurde Herrn Profe W. Podrazil übertragen und der Professor an der Landes-Mittelsc in Leoben, Herr Johann Papež, zur Ertheilung des Unterrichtes aus geometrischen und Freihandzeichnen in I.—III. und aus dem Schönschre in I. und II. dieser Landesoberrealschule zur aushilfsweisen Dienstleis zugewiesen. — Der Lehramtscandidat Hr. Victor Berka wurde (Erl. de Landes-Ausschusses vom 24. September 1885, Z. 12.776) zum Assiste für das geometrische Zeichnen pro 1885/6 ernannt. — Der Lehra candidat Herr Georg Firtsch vollendete mit Schluss des I. Semes 1885/6 sein Probejahr an dieser Lehranstalt. — Herr Georg Weitzenb wurde definitiv im Lehramte bestätigt und erhielt den Titel „Profes (Erl. des h. Landesausschusses vom 10. December 1885, Z. 15.643).

Dienerschaft.

Anton Wolf, erster Schuldiener,
Josef Köstinger, zweiter Schuldiener und Hausbesorger,
Karl Fink, Laborant,
} Realschulgebäude.

II. Lehrverfassung.

Erste Klasse.

(Ordinarius Turkuš.)

Religionslehre. Wöchentlich 2 Stunden. I. Semester. Das Sacrament der Busse. Die Quellen und der Begriff des katholischen Glau Die Lehre von Gott, der Schöpfung und der Erlösungsthat Christi. Die L von der Kirche. — II. Semester. Von den letzten Dingen, die Sacramente, die Gebote Gottes und Gebote der Kirche. Stelz

Deutsche Sprache. Wöchentlich 4 Stunden. Gesammte Formenlehre. ıente der Satzlehre an der Hand des Gelesenen. Uebungen im Lesen sachlichen und grammatischen Erklärungen, und im Vortragen kleiner ıischer und poetischer Stücke. Turkuš.

Französische Sprache. Wöchentlich 5 Stunden. Die Regeln der prache und des Lesens mit Inbegriff der Lehre vom Accente; Formen- des Nom und Pronom. Adjectiv und Article, die einfachen Präpositionen. Hilfszeitwörter avoir und être und die erste Conjugation. Aneignung eines prechenden Wörter- und Phrasenvorrathes mittelst Memorierens. Ueber- ıngen aus dem Französischen in's Deutsche und umgekehrt. Turkuš.

Geographie. Wöchentlich 3 Stunden. Fundamentalsätze des geo- hischen Wissens, soweit dieselben zum Verständnisse der Karte unent- lich sind und in sinnlich-anschaulicher Weise erörtert werden können rainlehre.) Beschreibung der Erdoberfläche in ihrer natürlichen Beschaffen- und den allgemeinen Scheidungen nach Völkern und Staaten auf Grund- steter Handhabung der Karte. Kartographische Uebungen, namentlich Oro- und Hydrographie. Elemente der astronomischen Geographie. Thalmayr.

Mathematik. Wöchentlich 3 Stunden. Dekadisches Zahlensystem. Die Grundrechnungsarten mit unbenannten und einnamig benannten Zahlen und mit Decimalbrüchen, Grundzüge der Theilbarkeit, grösstes gemein- ftliches Mass, kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches. Gemeine Brüche. randlung derselben in Decimalbrüche und umgekehrt. Rechnen mit namig benannten Zahlen. Kautzner.

Naturgeschichte. Wöchentlich 3 Stunden. Zoologie. Anschauungs- rricht. Im I. Semester die Säugethiere, Vögel, Reptilien, Amphibien Fische. Im II. Semester die wirbellosen Thiere; Beschreibung des rkörpers im Allgemeinen und des menschlichen Körpers. Hoffer.

Freihandzeichnen. *(Erste Unterrichtsstufe.)* Wöchentlich 6 Stunden. metrische Formenlehre: Im I. Semester die ebene, im II. Semester räumliche Formenlehre. — Zeichnen: Der Unterricht im Zeichnen ging Semester mit dem Unterrichte in der geometrischen Formenlehre thun- t parallel. Das Zeichnen gerader Linien nach verschiedenen Richtungen, lung der Strecken, das Zeichnen gleich grosser Winkel und Theilen lben, das Zeichnen recht- und schiefwinkeliger Linienzüge nach selbst- orfenen Stigmen, der regelmässigen Polygone und aus diesen durch ıentheilung hervorgehenden Figuren; das Zeichnen der Kreislinie, der se, des Ovals und der gemischtlinigen Rosetten. Die gezeichneten ren wurden mit Feder und Tusch ausgezogen und zum Theil schraffiert. Papež.

Schönschreiben. Wöchentlich 2 Stunden. I. Semester. Die deut
Current- und englische Cursiv-Schrift. II. Semester. Fortgesetzte Uebu
in diesen beiden Schriftarten. Pape

Turnen. Wöchentlich 2 Stunden.

Zweite Klasse.

(Ordinarius Hoffer.)

Religionslehre. Wöchentlich 2 Stunden. I. Semester. Nothwendi
und Grundlage der äusseren Gottesverehrung. Die kirchlichen Orte
Geräthe; das heil. Messopfer und der Weihnachtskreis. II. Semester
übrigen kirchlichen Handlungen, wodurch die Gnaden den Gläubigen
mittelt werden, mit steter Bezugnahme auf die den Ceremonien zu G
liegenden Glaubens- und Sittenlehren. Der Oster- und Pfingsfestkreis.
Stel

Deutsche Sprache. Wöchentlich 3 Stunden. Lehre vom einfachen
und von dessen Erweiterungen. Wiederholung und Vervollständigung
Formenlehre. Uebungen im Lesen, sachliche und grammatische Erkl
des Gelesenen. Vortrag prosaischer und poetischer Lesestücke.
Weitzenbö

Französische Sprache. Wöchentlich 4 Stunden. Gründliche Wi
holung des in der I. Klasse vorgenommenen Lehrstoffes. Die Conju
der regelmässigen Verben und die Formenlehre aller übrigen flexiblen
theile. Adverbien und einige Conjunctionen, die wichtigsten syntacti
Regeln über den Gebrauch des Artikels, des Adjectivs und des Prono
Uebersetzungen aus dem Französischen in's Deutsche und umgekehrt.
übungen. Extemporalien. Weitzenbö

Geographie und Geschichte. Wöchentlich 2 Stunden Geographi
2 Stunden Geschichte. Specielle Geographie Asien's und Afrika's. Oro
Hydrographie Europa's, specielle Geographie des südlichen und west
Europa's. Kartographische Uebungen. — Geschichte des Alterthum
zum Jahre 375 nach Christi Geburt. Ilw

Mathematik. Wöchentlich 3 Stunden. I. Semester. Abgek
Rechnen mit Decimalbrüchen. Das Wichtigste aus der Mass- und Gew
kunde, aus dem Geld- und Münzwesen, mit besonderer Berücksichtigun
neuen österreichischen Mass- und Gewichtsordnung. Umrechnung der
Masse auf die neuen und umgekehrt. Schlussrechnung. Lehre von de
hältnissen und Proportionen. — II. Semester. Einfache und zusam
gesetzte Regel-de-tri, Kettensatz, Procent- und einfache Zins-, Discon
Terminrechnung, Theilregel, Durchschnitts- und Alligationsrechnung.
Hoff

Naturgeschichte. Wöchentlich 3 Stunden. Anschauungsunterricht. Im emester Mineralogie, im II. Semester Botanik.

Im I. Semester Buchner, im II. Semester Hoffer.

Geometrie und geometrisches Zeichnen. Wöchentlich 1 Stunde metrie und 2 Stunden Zeichnen. Aus der Planimetrie: Gerade Linien kel, die geradlinigen Gebilde und Congruenz derselben. Die Kreislinie ihre Beziehungen zur Geraden. — Parallel damit und im innigen mmenhange mit den geometrischen Lehren die wichtigsten Constructionsaben. Papež.

Freihandzeichnen. *(Erste Unterrichtsstufe.)* Wöchentlich 4 Stunden. h zwei Monate Uebung im Zeichnen ornamentaler Motive nach Tafelichnungen und Dictaten als Fortsetzung und Erweiterung des Unterses in der ersten Klasse; hierauf das Zeichnen ebener und räumlicher metrischer Gebilde (mit Anwendung von Draht- und Holzmodellen) nach pectivischen Grundsätzen nebst Erklärung und Wiedergabe der Beleuchtserscheinungen. Papež.

Schönschreiben. Wöchentlich 1 Stunde. I. Semester. Uebungen er deutschen Current- und englischen Cursivschrift. II. Semester. französische Rundschrift. Papež.

Turnen. Wöchentlich 2 Stunden. Kreunz.

Dritte Klasse.

(Ordinarius Weitzenböck.)

Religionslehre. Wöchentlich 2 Stunden. I. Semester. Die Geschichte Offenbarung an die Stammeltern. Patriarchen und das auserlesene Volk l unter beständiger Hinweisung auf den kommenden Erlöser, verbunden ausführlicher Erläuterung der Schöpfungsgeschichte und des Prophe-is. — II. Semester. Die Offenbarung des neuen Testamentes. Die menschliche Person Jesu Christi, sowie das Lehr-, Priester- und Hirtendes Gottmenschen, die Uebertragung dieser dreifachen Aufgabe und lt an die katholische Kirche. Stelzl.

Deutsche Sprache. Wöchentlich 4 Stunden. Lehre vom zusammenzten Satze mit gelegentlicher Wiederholung des vorhergehenden Lehres. Rechtschreibungs- und Zeichensetzungslehre. Lesen mit grammatischer sachlicher Erklärung des Gelesenen. Vortrag prosaischer und poetischer ke. Weitzenböck.

Französische Sprache. Wöchentlich 4 Stunden. Wiederholungen. ographische Eigenthümlichkeiten einiger regelmässiger Verben. Unregelige Verben der vier Conjugationen; Anwendung von avoir und être;

reflexive und unpersönliche Zeitwörter. Lectüre. Uebersetzungen aus
Französischen in's Deutsche und umgekehrt. Extemporalien. Uebunge
Nacherzählen kleiner Lesestücke. Weitzenböc

Geographie und Geschichte. Wöchentlich 2 Stunden Geographie
2 Stunden Geschichte. Specielle Geographie von Grossbritannien, Däne
Schweden und Norwegen, Russland, der Schweiz, von Belgien, der Ni
lande und des deutschen Reiches. Geschichte des Mittelalters mit beson
Berücksichtigung der vaterländischen Momente. Thalmay

Mathematik. Wöchentlich 3 Stunden. Wiederholung und Ergän
des früheren mathematischen Lehrstoffes mit Anwendungen auf verschie
im Geschäftsleben vorkommende Aufgaben. Die vier Grundoperationen
allgemeinen Zahlen. Das Wichtigste über das Potenzieren und Radiz
im allgemeinen. Quadrieren und Kubieren von einfachen algebraischen
drücken und besonderen Zahlen. Ausziehen der Quadrat- und Kubikw
aus besonderen Zahlen. Zinseszinsrechnung. Kautzne

Physik. Wöchentlich 3 Stunden. I. Semester. Allgemeine E
schaften der Körper. Aggregationsformen. Cohäsion und Adhäsion. Die Wä
lehre. Magnetismus. II. Semester. Reibungs- und atmospärische
tricität, Galvanismus. Elektro-Magnetismus, Inductions-Elektricität
Thermo-Elektricität. Deschman

Geometrie und geometrisches Zeichnen. Wöchentlich 3 Stu
Aus der Planimetrie: Lehrsätze von der Aehnlichkeit geradliniger Fig
und damit im Zusammenhange stehende Aufgaben. Pythagoräischer
satz, Flächenberechnung, Verwandlung und Theilung der Figuren. Anwen
algebraischer Grundoperationen auf graphische Constructionen. Pape

Freihandzeichnen. *(Zweite Unterrichtsstufe.)* Wöchentlich 4 Stu
Der Unterricht begann mit Vorzeichnung und Erklärung leichter F
ornamente in Conturen auf der Schultafel. Benützung von polychrome
namenten und Gypsmodellen. Podraz

Turnen. Wöchentlich 2 Stunden. Kreun

Vierte Klasse.

(Ordinarius Blaschke.)

Religionslehre. Wöchentlich 2 Stunden. Geschichte der Kirche Ch
Stel

Deutsche Sprache. Wöchentlich 3 Stunden. Zusammenfassender
schluss des gesammten grammatischen Unterrichts. Das Hauptsächlichst
der Mythologie. Das Wichtigste aus der Prosodie und Metrik. Gesch
aufsätze. Turku

Französische Sprache. Wöchentlich 3 Stunden. Wiederholung der elmässigen Zeitwörter aller vier Conjugationen. Die reflexiven und unper- hen Verben, Anwendung von avoir und être. Formenlehre des Sub- vs. Adjectivs und Adverbs. Die Zahlwörter und Präpositionen. Construc- ehre. Anwendung der Zeiten und Modi. Fortgesetztes Vermehren des er- und Phrasenvorrathes. Uebersetzungen aus dem Französischen in's che und umgekehrt auf dem Wege schriftlicher Präparation. Lectüre. hübungen. Turkuš.

Geographie und Geschichte. Wöchentlich 2 Stunden Geographie 2 Stunden Geschichte. Geographie Amerika's und Australien's. Specielle aphie des Vaterlandes, Umrisse der Verfassungskunde. — Geschichte Neuzeit mit umständlicher Behandlung der vaterländischen Geschichte. Thalmayr.

Mathematik. Wöchentlich 4 Stunden. Ergänzende und erweiternde erholung des mathematischen Lehrstoffes der Unterrealschule; wissen- lich durchgeführte Lehre von den vier Grundoperationen mit allgemeinen n. grösstes gemeinsames Mass und kleinstes gemeinschaftliches Viel- . Lehre von den Brüchen. Lehre von den Proportionen; lineare ungen mit einer und mehreren Unbekannten. nebst Anwendung auf sche Aufgaben. Blaschke.

Physik. Wöchentlich 3 Stunden. Im I. Semester: Statik und nik fester Körper. Hydrostatik. — Im II. Semester: Aërostatik. ik, Optik. Deschmann.

Chemie. Wöchentlich 3 Stunden. Physikalisch-chemische Erscheinungen. sche Synthese. chemische Analyse. Charakteristik der nicht metallischen ente, Metalle; Kohlenstoffverbindungen. organische Chemie. Buchner.

Geometrie und geometrisches Zeichnen. Wöchentlich 3 Stunden. schnittslinien, Stereometrie. Darstellung orthogonaler Projectionsbilder örper, Berechnung der Oberfläche und des Rauminhaltes derselben. Blaschke.

Freihandzeichnen. (*Zweite Unterrichtsstufe.*) Wöchentlich 4 Stunden. t es für eine günstige Beleuchtung geeignete Plätze erlaubten, wurde Gypsmodellen, sonst nach flachen Musterblättern gezeichnet, und zwar leistift, Feder und Pinsel. Elemente aus der Farbenlehre. Zeichnen rnamenten der wichtigsten Stylarten nach polychromen Musterblättern. ondere wurde auf die perspectivisch richtige Darstellung die gebüh- Rücksicht genommen. Podŕazil.

Turnen. Wöchentlich 2 Stunden. Kreunz.

Fünfte Klasse.

(Ordinarius Deschmann.)

Deutsche Sprache. Wöchentlich 3 Stunden. Metrik und Grun
der Stilistik und Poëtik; Leseproben und Musterstücke aus der deut
Literatur, sowie aus den besten Uebersetzungen, jener der Griechen und R
Memorieren von Gedichten; Schul- und Privatlectüre ausgewählter ep
Dichtungen (Odyssee. Voss „Luise", Herder „Cid"). Hofma

Französische Sprache. Wöchentlich 3 Stunden. Präpositionen.
structionslehre, Gebrauch der Zeiten und Modi. Lehre von Subjonctif. Inf
Construction. Participe présent. Gérondif. Zusammengezogene Sätze, V
derungen des participe passé. Syntax des Artikels. Uebersetzungen aus
Französischen in's Deutsche und umgekehrt auf dem Wege schrift
Präparation. Lectüre. Turk

Englische Sprache. Wöchentlich 3 Stunden. Die wichtigsten
über Aussprache. Formenlehre; die wichtigsten unregelmässigen Zeitw
die Hauptregeln aus der Syntax. Erwerbung eines entsprechenden
schatzes durch mündliche und schriftliche Uebungen. Leichte Leses
Hofma

Geschichte. Wöchentlich 3 Stunden. Geschichte des Alterthu
zur Völkerwanderung mit besonderer Berücksichtigung der Geographi
Vorderasien, Griechenland, Italien, Spanien und Frankreich. Thalma

Mathematik. Wöchentlich 5 Stunden. Algebra. Zusammenfas
Wiederholung der grundlegenden Lehren der Vorklasse. Kettenb
Diophantische Gleichungen des ersten Grades. Lehre von den Pot
Wurzeln und Logarithmen. Gleichungen des zweiten Grades mit
Unbekannten. — Geometrie: Grundzüge der Planimetrie. Lösun
geometrischen Aufgaben mittelst der geometrischen und algebra
Analysis. Deschma

Naturgeschichte. Wöchentlich 3 Stunden. Zoologie. — I. Seme
Anatomisch-physiologische Grundbegriffe des Thierreiches mit beso
Rücksicht auf die höheren Thiere, Systematik der Säugethiere und Vög
II. Semester. Systematik der übrigen Thiere mit genauerem Ein
in die niederen Thiere. Grundzüge der Zoogeographie. Hoff

Chemie. Wöchentlich 3 Stunden. Allgemeine Chemie. Metalloid
Metalle. Buchn

Darstellende Geometrie. Wöchentlich 3 Stunden. Der Punk
Gerade und die Ebene, sowie ihre wichtigsten Beziehungen zu ein
Schattenconstructionen. Blasch

Freihandzeichnen. (*Dritte Unterrichtsstufe.*) Wöchentlich 4 Stunden. Elemente des Kopfzeichnens. Die Proportionen des Gesichtes und seiner e wurden besprochen und im vergrösserten Masstabe in den verschie- Lagen an der Tafel vorgezeigt. Vorherrschend wurde in Umrissen, r in leichter Schraffirung und nach dem Gypsmodell gezeichnet.

Podrazil.

Turnen. Wöchentlich 2 Stunden. Kreunz.

Sechste Klasse.

(*Ordinarius Buchner.*)

Deutsche Sprache. Wöchentlich 3 Stunden. Lectüre der Nibelungen us Walther von der Vogelweide. Grundzüge der ahd. und mhd. Lite- geschichte. Entstehung der nhd. Literatursprache. Literaturgeschicht- Ueberblick bis Lessing. Lectüre aus dem vorgeschriebenen Lesebuche: e's Iphigenie und Schillers Jungfrau von Orleans. Biographische Skizzen.

Hofmann.

Französische Sprache. Wöchentlich 3 Stunden. Wiederholung der enlehre. Grössere grammatische Uebungen. Syntax. — Vortrag pro- er Stücke. Lectüre. Turkuš.

Englische Sprache. Wöchentlich 3 Stunden. Systematische Zusammen- ng der wichtigsten Regeln der Formenlehre und der Syntax, nebst gen. Lectüre leichter Lesestücke aus Seeligers Englischem Lesebuch.

Hofmann.

Geschichte. Wöchentlich 3 Stunden. Geschichte des Mittelalters und Neuzeit bis zum Schlusse des dreissigjährigen Krieges mit besonderer rhebung der culturhistorischen Momente, mit fortwährender Berück- gung der Geographie und mit specieller Rücksicht auf die österreichisch- ische Monarchie. Thalmayr.

Mathematik. Wöchentlich 5 Stunden. Algebra, Logarithmen; Glei- en höheren Grades, welche auf quadratische zurückgeführt werden n und Exponential-Gleichungen: einfachste Formen von diophantischen ungen zweiten Grades; arithmetische und geometrische Progressionen nwendung auf Zinseszins- und Rentenrechnungen. Combinationslehre: ischer Lehrsatz. — Geometrie: Goniometrie und ebene Trigono- e nebst zahlreichen Uebungsaufgaben. Stereometrie mit Uebungen im hnen des Inhaltes und der Oberfläche von Körpern. Kautzner.

Naturgeschichte. Wöchentlich 2 Stunden. Botanik. — I. Semester. misch-physiologische Grundbegriffe des Pflanzenreiches; Systematik der phyten. — II. Semester. Systematik der Spermatophyten. Grundzüge hytogeographie. Firtsch im I. Semester, Hoffer im II. Semester.

Physik. Wöchentlich 4 Stunden. I. Semester. Allgemeine Eig
schaften der Körper. Mechanik fester und tropfbarflüssiger Körper.
II. Semester. Mechanik luftförmiger Körper. Wellenlehre. Akustik.
Deschman

Chemie. Wöchentlich 3 Stunden. Organische Chemie. Buchne

Darstellende Geometrie. Wöchentlich 3 Stunden. Das Dreikant.
Beziehungen der Polyeder zu Geraden, zu Ebenen und unter sich. Die
jectionen der Curven, die Beziehungen derselben zu Geraden und Ebe
Erzeugung und Darstellung der wichtigsten krummen Flächen; die Be
hungen derselben zu Geraden, Ebenen und unter sich. Schattenlehre.
Blaschk

Freihandzeichnen. *(Dritte Unterrichtstufe.)* Wöchentlich 2 Stun
Kopfzeichnen nach schwierigen Vorlagen und nach der Antike wurde in
endeter Durchführung vorgenommen. Sowohl auf die perspectivischen
scheinungen als auch auf die Charakteristik der verschiedenen Styla
wurde besonders aufmerksam gemacht. Podrazi

Turnen. Wöchentlich 2 Stunden. Kreun

Siebente Klasse.

(Ordinarius Kautzner.)

Deutsche Sprache. Wöchentlich 3 Stunden. Lebensbilder bedeute
deutscher Dichter von Lessing an. Lectüre: Goethe's „Hermann und D
thea"; Lessing's Laokoon; Schiller's „Wilhelm Tell"; Referate über he
ragende Werke der deutschen Literatur und eingehende Besprechung
selben. Hofman

Französische Sprache. Wöchentlich 3 Stunden. Wiederholung
Grammatik. Dazu fortwährende mündliche und schriftliche Uebungen. Lec
Michaud, Histoire de la 3e Croisade. Corneille, Horace. Weitzenböc

Englische Sprache. Wöchentlich 3 Stunden. Lectüre ausgewä
Prosastücke und kurze Wiederholung der Hauptregeln der Gramm
Mündliche Uebungen. Hofman

Geschichte und Statistik. Wöchentlich 3 Stunden. Geschichte
Neuzeit, und zwar des 17., 18. und 19. Jahrhunderts. Statistik der ö
reichisch-ungarischen Monarchie, mit besonderer Berücksichtigung der
hydrographischen und Verfassungs-Verhältnisse. Thalmay

Mathematik. Wöchentlich 5 Stunden. Algebra. Die Elemente
Wahrscheinlichkeits-Rechnung. Durchführung einiger Aufgaben aus dem Ge
der Lebensversicherungs-Rechnung. Kettenbrüche. Theorie der comp
Zahlen. — Geometrie. Die sphärische Trigonometrie mit Anwendu

Stereometrie. Geodäsie und mathematische Geographie. Die Anwendung Algebra auf Geometrie. Einleitung in die analytische Geometrie. Punkt. de. Kreis. Die drei Kegelschnittlinien. Discussion der allgemeinen Gleichung ter Ordnung. Analytische und graphische Uebungen. Kautzner.

Naturgeschichte. Wöchentlich 3 Stunden. Im I. Semester. Minera- . Kenntnis der wichtigsten Mineralien nach krystallographischen, physi- chen und chemischen Grundsätzen. — Im II. Semester. Grundzüge Geognosie und Geologie. Hoffer.

Physik. Wöchentlich 4 Stunden. I. Semester. Magnetismus. Reibungs- tricität, atmosphärische Elektricität, Galvanismus. — II. Semester. tromagnetismus. Inductions- und Thermo-Elektricität. Optik. Wärme. Die igsten Sätze der Astronomie. Deschmann.

Darstellende Geometrie. Wöchentlich 3 Stunden. Schnitte der men Flächen unter einander. Tangentialebenen an krumme Flächen setzung der Schattenlehre. Die Elemente der Linear-Perspective. - lerholung des gesammten Lehrstoffes. Blaschke.

Freihandzeichnen. *(Dritte Unterrichtsstufe.)* Wöchentlich 4 Stunden. gesetzte Uebungen im Kopf- und Ornamentzeichnen wie in der Klasse. Podrazil.

Turnen. Wöchentlich 2 Stunden. Kreunz.

N.B. *In denjenigen Gegenständen, in welchen schriftliche Aufgaben vor- rieben sind, wurden dieselben in Bezug auf Zahl und Termin nach Massgabe Normal-Lehrplanes und der Instructionen gegeben.*

III. Lehrbücher.

I. Religionslehre.

Klasse: Leinkauf, kurzgefasste katholische Glaubens- und Sittenlehre.
Klasse: Hafenrichter, Liturgik.
Klasse: Wappler, Geschichte der göttlichen Offenbarung.
Klasse: Mach, Grundriss der Kirchengeschichte.

2. Deutsche Sprache.

Klasse: Willomitzer, Deutsche Grammatik. — Neumann und Gehlen, Deutsches Lesebuch.
Klasse: Willomitzer, wie in I. — Neumann und Gehlen, Deutsches Lesebuch.
Klasse: Bauer, Grammatik. — Neumann und Gehlen, Deutsches Lesebuch.
Klasse: Bauer, Grammatik, wie in II. — Neumann und Gehlen, Deutsches Lesebuch.

V. Klasse: Egger, Deutsches Lehr- und Lesebuch für höhere Lehranstalten. I. T
Ausgabe für Realschulen.
VI. Klasse: Egger, Deutsches Lehr- und Lesebuch. II. Theil, 1. Band.
VII. Klasse: Egger, Deutsches Lehr- und Lesebuch. II. Theil, 1. und 2. Band.

3. Französische Sprache.

I. Klasse: Plötz, Elementar-Grammatik der französischen Sprache.
II. Klasse: Plötz, Elementar-Grammatik, wie in I.
III. Klasse: Plötz, Schulgrammatik der französischen Sprache. — Bechtel, Fr
sisches Lesebuch.
IV. Klasse: Plötz und Bechtel, wie in III.
V. Klasse: Plötz, wie in III. — Bechtel, französische Chrestomatie.
VI. Klasse: Plötz und Bechtel, wie in V.
VII. Klasse: Plötz und Bechtel, wie in V.

4. Englische Sprache.

V. Klasse: Degenhardt, Lehrgang zur schnellen und gründlichen Erlernun
englischen Sprache. Elementarcursus.
VI. Klasse: Degenhardt, wie in V. — Seeliger, Englisches Lesebuch.
VII. Klasse: Degenhardt und Seeliger, wie in VI.

5. Geographie und Geschichte.

I. Klasse: Supan, Lehrbuch der Geographie. — Kozenn, Geographischer Schul
II. Klasse: Supan, Lehrbuch, und Kozenn, Schulatlas, wie in I. — Gindely,
buch der allgemeinen Geschichte für die unteren Klassen. I. The
Putzger, Historischer Schulatlas.
III. Klasse: Supan, Kozenn und Putzger, wie in II. — Gindely, wie in II; II
IV. Klasse: Supan, Kozenn und Putzger, wie in II. — Gindely, wie
III. Theil. — Hannak, Oesterreichische Vaterlandskunde. Unterstuf
V. Klasse: Gindely, Lehrbuch der allgemeinen Geschichte für die oberen K
der Real- und Handelsschulen. I. Band. — Rhode, Historischer Schu
VI. Klasse: Gindely, wie in V. II. und III. Band. — Rhode, wie in V.
VII. Klasse: Gindely, wie in V. III. Band. — Rhode, wie in V. — Ha
Oesterreichische Vaterlandskunde für die höheren Klassen der
schulen. — Kozenn, Schulatlas, wie in I.

6. Mathematik.

I. Klasse: Močnik, Lehr- und Uebungsbuch der Arithmetik für Unterrealschulen.
II. Klasse: Močnik, wie in I. 2. Heft.
III. Klasse: Močnik, wie in I. 3. Heft.
IV. Klasse: Frischauf, Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik. — Heis, San
von Beispielen und Aufgaben.
V. Klasse: Frischauf und Heis, wie in IV. — Wittstein, Lehrbuch der Elem
Mathematik. I. Band. 2. Abth. Planimetrie. — Bremiker, Logarith
trigonometrische Tafeln.
VI. Klasse: Frischauf, wie in V. — Wittstein, II. 1. Ebene Trigonomet
2. Stereometrie. — Rogner, Sammlung von Aufgaben.
VII. Klasse: Frischauf, Wittstein, Rogner und Bremiker, wie in
Frischauf, Einleitung in die analytische Geometrie.

7. Naturgeschichte.

Klasse: Pokorny, Illustrierte Naturgeschichte der drei Reiche. I. Thierreich.
Klasse: Pokorny, II. Pflanzenreich. — Pokorny, III. Mineralogie.
Klasse: Woldrich, Leitfaden der Zoologie.
Klasse: Wretschko, Vorschule der Botanik.
Klasse: Hochstätter und Bisching, Leitfaden der Mineralogie und Geologie.

8. Physik.

nd IV. Klasse: Krist, Anfangsgründe der Naturlehre für Realschulen.
nd VII. Klasse: Handl, Lehrbuch der Physik. Ausgabe für Realschulen.

9. Chemie.

Klasse: Kauer, Elemente der Chemie.
Klasse: Mitteregger, Lehrbuch der Chemie. I. Theil.
Klasse: Mitteregger, wie in V. II. Theil.

10. Geometrie.

Klasse: Močnik, Anfangsgründe der Formenlehre.
II. und IV. Klasse: Močnik, Anfangsgründe der Geometrie in Verbindung mit dem Zeichnen für Unterrealschulen.

11. Darstellende Geometrie.

I. und VII. Klasse: Güntner, Lehrbuch der darstellenden Geometrie.

12. Schönschreiben.

Klasse: Schrotter, Deutsche und englische Schriftvorlagen. 1. Heft.
Klasse: Schrotter, Deutsche und englische Schriftvorlagen. 2. Heft. — Schrotter, Die französische Rundschrift.

13. Stenographie.

d II. Curs: Scheller, Lehr- und Lesebuch der deutschen Stenographie.

14. Steiermärkische Geschichte.

Reichel Rudolf, Abriss der steirischen Landesgeschichte.

16. Gesang.

theilung: Franz Mayr's Gesanghefte. II. Abtheilung: Regensburger Liederkranz, vierstimmige Chöre und Lieder.

IV. Themen der deutschen Aufätze.

V. Klasse.

Eine Stunde am Fenster. — Inhaltsangabe des II. Gesanges der Odyssee Ernste Gedanken beim Beginne des neuen Studienjahres. — Der Mensch im Kampfe der Natur. — Des Odysseus Schiffbruch und Rettung auf die Insel der Phaeaken Zur Auswahl: *a)* Schutzrede für den Winter; *b)* Geschichte eines Christbaums. — W Bildung macht bescheiden. — Frühlingsboten. — Unser Maiausflug. — Inhaltsang des I. Gesanges von Voss' „Luise". — Entwurf eines Gemäldes aus der Odyssee Ein Referat aus der häuslichen Lectüre.

VI. Klasse.

„Kleider machen Leute". Erklärung und Berichtigung des Sprichwortes. — welchen Bedeutungen wird das Wort „Welt" gebraucht? Durch Beispiele zu erläuter Zur Auswahl: *a)* Weihnachten auf dem Lande. *b)* Weihnachten in der Stadt. — We Bürgertugenden und Staatsgrundsätze verschafften Rom die Weltherrschaft? — We Momente mögen zur längeren Dauer des fränkischen Reiches im Vergleiche zu and germanischen Reichen des Mittelalters beigetragen haben? — Selbstgespräch Rüdig in welchem er zu dem Entschlusse kömmt, die Burgunden zu bekämpfen. — Das schichtliche im Nibelungenliede. — Auch kleine Länder und Völker können bert sein. — Die Entstehung der neuhochdeutschen Schriftsprache und deren Bedeutung Der Charakter des Thoas in Goethe's „Iphigenie auf Tauris". — Die Jeanne Darc Geschichte und Schiller's „Jungfrau von Orleans". — Ein Referat aus der häusli Lectüre.

VII. Klasse.

Ein Morgenspaziergang im Herbste. — Welchen Bestrebungen und Thätigk der Menschen ist die Erweiterung der geographischen Kenntnisse zuzuschreiben? — Frieden und im Streit Ein Lied ist gut Geleit." — Gedankengang der Vorred Lessing's „Laokoon." — Das Verhältnis der einzelnen Personen in Goethe's „Hern und Dorothea" zu den Ereignissen der französischen Revolution. — Welcher Dichte mein Lieblingsdichter und warum? — In welcher Absicht und mit welchen Result hat Lessing im „Laokoon" die Werke von Spence und Caylus seiner Kritik unterzogen Enthält das Sprichwort „Eile mit Weile" einen Widerspruch? — Das papierene Zeita — „Wallenstein's Lager." Bedeutung des Vorspiels für das Drama. — „Bill'ge Fu erwecket sich ein Volk, Das mit dem Schwerte in der Faust sich mässigt." (Schil Tell. II., 2.). — Maturitätsarbeit.

Referate, erstattet von den Schülern der VII. Klasse.

Lessing, Minna von Barnhelm. — Lessing, Emilia Galotti. — Lessing, Na der Weise. — Wieland, Oberon. — Shakespere, Julius Caesar. — Shakespere, Richar — Goethe, Götz von Berlichingen. — Schiller, Die Räuber. — Schiller, Don Carlos Goethe, Torquato Tasso. Schiller, Wallenstein. — Schiller, Die Jungfrau von Orle — Schiller, Die Braut von Messina. — Körner, Leier und Schwert. — H. v. K Die Hermannsschlacht. — Grillparzer, Des Meeres und der Liebe Wellen. — Grillpa König Ottokar's Glück und Ende. — Chamisso, Peter Schlemihl. — Goethe, Faust.

V. Freie Gegentände.

Steiermärkische Geschichte. Wöchentlich 2 Stunden. Die Geschichte des Herzog-
s Steiermark von den ältesten Zeiten bis in die Gegenwart wurde in diesem Schul-
in der Zeit von Anfang October bis Mitte Juni gelehrt. In diesen Unterricht liessen
8 Schüler einschreiben. Thalmayr.

Analytische Chemie. Wöchentlich 4 Stunden. An diesem Unterrichte betheiligten
11 Schüler. Es wurden zunächst Analysen einfacherer, dann zusammengesetzterer
hungen, später von Mineralien ausgeführt, auch massanalythische und gewichtsana-
sche Bestimmungen vorgenommen. Buchner.

Modellieren. Wöchentlich 4 Stunden. Es wurden in Thon einfache Blattformen,
mentale Objecte verschiedener Stylarten und figurale Objecte modelliert. An diesem
rrichte betheiligten sich im ersten Semester 12 und im zweiten 9 Schüler.
Podrazil.

Stenographie. Wöchentlich 4 Stunden in 2 Jahrgängen. I. Jahrgang. Lehre
Wortbildung und Wortkürzung nebst Theorie und Satzkürzung. In diesen Jahrgang
en 37 Schüler eingeschrieben.

II. Jahrgang. Fremdwörter, fremde Vor- und Nachsilben. Vollständige Satz-
ungslehre, Lesen stenographischer Zeitschriften, Dictandoschreiben. In diesen Jahr-
wurden 13 Schüler eingeschrieben. Wolf.

Gesang. Wöchentlich 4 Stunden in 2 Abtheilungen. I. Abtheilung. Intervallen-
. Uebungen. Zweistimmige Lieder. 26 Schüler.

II. Abtheilung. Fortsetzung der Intervallenlehre. Uebungen über Rhythmik und
mik. Vierstimmige Lieder (Chöre und Quartette). 28 Schüler. Blümel.

VI. Vermehrung der Lehrmittelsammlungen.

A. Bibliothek.

Bibliothekar: Prof. G. Weitzenböck.

Andersen, Märchen. 2. Theil*)
Behm, Geographisches Jahrbuch.
Beilstein, Organische Chemie.
Bericht der k. k. Gewerbe-Inspectoren. (Geschenk des Herrn Statthaltherei-Rathes Zeidler.)
Bericht der Handelskammer Laibach. 1880.
Bericht der Handelskammer Wien für 1884.
Bericht der Wetterauischen Gesellschaft für die gesammte Naturkunde. 1883/85.
Biographie, Allgemeine deutsche.
9. Block, Petit Manuel d'Economie politique.*)
10. Bolley, Technologie.
11. Breymann, Lautphysiologie.
12. Breymann, Wünsche und Hoffnungen betreffend das Studium der neueren Sprachen.
13. Breymann, Französische Elementargrammatik.
14. Breymann und Möller, Französisches Elementar-Uebungsbuch.
15. Burkhardt, Briefe von Goethe's Mutter an die Herzogin Anna Amalia.
16. Carus, Prodomus faunae mediterraneae.

*) Geschenke des Herrn Ingenieurs Heinrich Spernbauer, ehemaligen Schülers dieser Anstalt.

17. Commercio di Trieste nel 1884. (Geschenk des hohen Unt.-Ministeriums.)
18. Cooper, Der Spion*).
19. Czarkowski, Drei statistische Tabellen, die Lehrpläne von Realschulen und Gymnasien enthaltend.
20. Dante, Göttliche Comödie*).
21. Dickens, A. Christmas Carol in Prose*).
22. Durège, Elliptische Functionen.
23. Duruy, Geschichte des römischen Kaiserreiches.
24. Euler, Einleitung in die Analysis des Unendlichen.
25. Fossel, Volksmedicin u. medicinischer Aberglaube in Steiermark. (Geschenk des Verlegers.)
26. Fournier, Napoleon I.
27. Goldsmith, Der Landprediger*).
28. Goldsmith, Select Works*).
29. Grieben, Salzkammergut und Tirol*).
30. Grimm, Deutsches Wörterbuch.
31. Gruber, Buchhaltung. (Geschenk des Verlegers Gräser, Wien.)
32. Henne-am Rhin, Culturgeschichte des deutschen Volkes.
33. Hornemann, Zur Reform des neusprachlichen Unterrichtes.
34. Huber, Geschichte Oesterreichs.
35. Jahresbericht des Vereines für Naturkunde in Oesterreich o./E.
36. Jahresbericht ungarischer und siebenbürgischer Lehranstalten: 11 Stücke.
37. Jahresberichte österr. Lehranstalten: 242 Stücke.
38. Janssen, Geschichte d. deutschen Volkes.
39. Jastrow, Geschichte des deutschen Einheitstraumes und seiner Erfüllung.
40. Kern, Deutsche Satzlehre.
41. Kern, Methodik des deutschen Unterrichts.
42. Khull, Geschichte der altdeutschen Dichtung.
43. Könnecke, Bilderatlas der deutschen Nationalliteratur.
44. Kohn, Meisterwerke der deutschen Literatur in Inhaltsangaben.
45. Körting, Encyklopädie u. Methodologie der romanischen Philologie. 2 Bände.
46. Kozenn-Jarz, Leitfaden der Geograp (Geschenk des Verlegers Hölzl, Wi
47. Lacroix, XVIIème Siècle.
48. Lejeune-Dirichlet, Zahlentheorie.
49. Leunis, Synopsis.
50. Literatur-Kalender 1886.
51. Lüben und Nacke, Einführung in deutsche Literatur. 3 Theile.
52. Mangold und Coste, Lese- und L buch der französischen Sprache.
53. Marktanner, Zur Kenntniss des tomischen Baues unserer Loranthac (Gesch. d. Hrn. Verf., ehem. Schü dieser Anstalt.)
54. Marryat, Die drei Kutter.*)
55. Mätzner, Altenglische Sprachpro
56. Möbius, Gesammelte Werke. I.
57. Montaiglon und Raynaud, Recueil fabliaux. 5 Bände.
58. Münch, Zur Förderung des fran schen Unterrichts.
59. Murray, New English Dictionary.
60. Musäus, Roland's Knappen. Chro der drei Schwestern.*)
61. Mussafia, Italienische Sprachlehre schenk).
62. Oesterreichisch-ungarische Mona in Wort und Bild.
63. Oncken, Allgemeine Geschichte in zeldarstellungen.
64. Osthoff, Schriftsprache und V mundart.
65. Osthoff, Das physiologische und chologische Moment in der sp lichen Formenbildung.
66. Ovid's Metamorphosen. (Gesch. d. Teubner.)
67. Paris, Poésie du moyen âge.
68. Plate, Englische Sprache (1872)
69. Plate, Englische Sprache (1876)
70. Plötz, Chrestomathie.
71. Programme höherer Lehran Deutschlands. 246 Stücke.
72. Prosch und Wiedenhofer, Les (Gesch. d. Verl. Gräser, Wien.)
73. Qousque Tandem, Der Sprachunt muss umkehren.
74. Rabenhorst, Kryptogamen-Flor

*) Geschenke des Herrn Ingenieurs Heinrich Spernbauer, ehemaligen Schülers dieser Anstalt.

Real- und Mittelschulen, Die schweizerischen.
Report of the Commissioner of agriculture. 1884. (Von der Smithsonian Institution in Washington.)
Rivnač, Führer durch Prag.*)
Roscoe und Schorlemer, Lehrbuch der Chemie.
Rudolf, Kronprinz, Eine Orientreise.
Rühlmann, Mechanische Wärmetheorie.
Salmon, Algebra.
Sanders, Wörterbuch der Hauptschwierigkeiten in der deutschen Sprache.
Schiller, Wilhelm Tell.*)
Schmeding, Die classische Bildung in der Gegenwart.
Schmeckebier, Deutsche Verslehre.
Schmidt Julian, Geschichte der französischen Literatur.
Schmidt Erich, Lessing.
Schober, Quellenbuch zur Geschichte der österr.-ungar. Monarchie.
Schuster, Nhd. Elementar-Grammatik. (Gesch. d. Verl. Grosse in Halle.)
Seeger, Fundamentaltheorien d. neueren Geometrie.
Statistik der Seeschifffahrt in den österreichischen Häfen. 1884. (Gesch. d. h. Unterrichts-Ministeriums.)
Stark, Sociale und staatliche Stellung des Technikers.*)
Stolz, Allgemeine Arithmetik.
Taine, Entstehung des modernen Frankreich.
Treitschke, Deutsche Geschichte.
Verne Julius, Schriften.
Wegele, Geschichte der deutschen Historiographie.
Weigand, Deutsches Wörterbuch.
Weitzel, Wie wird man Maschinentechniker? (Gesch. des Verfassers.)
Wiener, Darstellende Geometrie.
Wihlidal, Englisches Lesebuch. (Gesch. d. Verl. Tempsky.)
102. Wittenbauer, Die Ebene als bewegtes Element. (Gesch. d. Verfassers, ehem. Schülers der Anstalt.)
103. Wurzbach, Biographisches Lexikon des österreichischen Kaiserstaates.

Zeitschriften.

104. Allgemeine Bibliographie für Deutschland.
105. Anzeiger der kaiserl. Akademie der Wissenschaften.
106. Archiv für Literaturgeschichte.
107. Archiv für das Studium der neueren Sprachen und Literaturen.
108. Entomologische Zeitung. (Wien.)
109. Historisches Jahrbuch der Görres-Gesellschaft.
110. Jahrbuch der Erfindungen.
111. Jahrbuch der k. k. geologischen Reichsanstalt.
112. Mittheilungen des historischen Vereins für Steiermark.
113. Mittheilungen, Landwirthschaftliche, für Steiermark. 1885. (Gesch. d. Hrn. Dir. Aichhorn.)
114. Mittheilungen der geographischen Gesellschaft in Wien.
115. Mittheilungen des Instituts für österreichische Geschichtsforschung.
116. Naturhistoriker.
117. Mittheilungen des naturwissenschaftlichen Vereines f. Steiermark.
118. Petermann, Mittheilungen und Ergänzungshefte.
119. Sybel, historische Zeitschrift.
120. Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt.
121. Zahn, Steiermärk. Geschichtsblätter.
122. Zeitschrift für die österreichischen Gymnasien.
123. Zeitschrift für die gesammten Naturwissenschaften.
124. Zeitschrift und Wochenschrift d. österreichischen Ingenieurvereins.
125. Zeitschrift für Realschulwesen.

*) Geschenke des Herrn Ingenieurs Heinrich Spernbauer, ehemaligen Schülers dieser Anstalt.

B. Historisch-geographische Lehrmittel.

Kustos: Dr. Franz Thalmayr.

1. Hannak-Umlauft, Historischer Schulatlas. (Alterthum.)
2. H. Kiepert, Wandkarte d. alten Welt.
3. V. Haardt, Wandkarte von Amerika.
4. H. Kiepert, Wandkarte von Asien (politisch).
5. R. Kiepert, Wandkarte der Balkanhalbinsel (physikalisch).
6. R. Kiepert, Wandkarte von Deutschland (politisch).
7. R. Kiepert, Wandkarte von Oesterreich-Ungarn.
8. E. Wetzel, Wandkarte zur mathematischen Geographie.
9. Prohaska, Eisenbahnkarte von Oe reich-Ungarn (1886).
10. Generalstabskarte Zone 17, Col. (Graz).*)
11. Lössl, Umgebungskarte von Au (Geschenk).*)
12. Plan von Graz.*)
13. Geyer, Loserpanorama.*)
14. Hölzl's Geographische Charakterb 7 Blätter.
15. 31 Bilder für das geographische historische Album.

C. Naturhistorische Lehrmittel.

Kustos: Prof. Dr. Eduard Hoffer.

I. Zoologie.

1. Cynocephalus mormon L.. Schädelpräp.
2. Macacus cynomolgus, „
3. Cercopithecus mona, „
4. Mehrere Präparate von Flughäuten, Schädeln etc. unserer Fledermäuse, ausgeführt von Prof. Dr. Hoffer.
5. Canis familiaris molossus gladiator,
6. „ familiaris avicularius,
7. „ „ terrae novae,
8. „ „ Gryphus hirsutus,

Racceschädel

9. Herpestes Ichneumon L., Schädelpräp.
10. Sus scrofa fera, „
11. Dasyprocta Aguti L., „
12. Arctomis Marmota L., „
13. Antilope dorcas Pall.
    7 und 13 Geschenke des hochwohlgebornen Herrn F. Reichsritters von Leuzendorf.
14. Casuarius indicus, Brustbein.
15. Pelecanus onocrotalus, Brustbein und Schultergürtel.
16. Ibis religiosa, Schädelpräparat.
17. Fulica atra L., ausgestopft, Balg ⊙ Geschenk des hochwohlgebornen Herrn Stadtrathes R v. Wiser, ausge auf Kosten der Anstalt.
18. Falco peregrinus? ausgestopft, des Herrn Julius Rasch.
19. Verschiedene Schädel-, Brustbein Fusspräparate heimischer Vögel, geführt von Prof. Dr. Hoffer.
20. Testudo elephantina, ausgestopft
21. Coluber Aesculapi, vollständ.
22. Rana pipiens, Gypspräparat.
23. Salamandra maculosa, Gypsprä
24. Dentex vulgaris, ziemlich grosses plar, ausgestopft.
25. Myliobatis aquila, ausgestopft.
26. Raja clavata L., ausgestopft.
27. Heledone moschata, ausgestopft.
28. Verschiedene Schneckengehäuse scher und fremder Arten, Ges des Prof. Dr. Hoffer und vieler S
29. Galathea strigosa, ausgestopft i rahmen.
30. Dromia vulgaris, ausgestopft i rahmen.
31. Nephrops norvegicus, frische Exe von Pauer (V) dem Museum ges von Prof. Dr. Hoffer für die San präpariert.

*) Geschenke des Herrn Ingenieurs H. Spernbauer.

Astacus fluviatilis L., zerlegt, in Glasrahmen.

Echinus esculentus, zerlegt in Glasrahmen.

Mehrere Arten von Korallen.

Herr Marktanner Gottlieb, Volontär am k. k. Hofnaturaliencabinet in Wien, gewesener Schüler und später Probecandidat unserer Anstalt, schenkte dem Museum mehrere Naturalien, darunter schöne Seesterne, Napfschnecken, Holothurien, Ascidien und andere Seethiere, ferner ein Eprouvettengestell und zwei Spannbretter für Insecten.

Prof. Dr. E. Hoffer und mehrere Schüler bereicherten die Insectensammlung der Anstalt durch auserlesene Stücke. Auch die Zahl der in den Klassenzimmern aufzuhängenden Insectenkästchen wurde vermehrt.

II. Botanik.

Herbar, die Sammlung getrockneter Früchte und Samen und andere Trockenpräparate wurden vervollständigt. Besonders erwähnenswerth ist ein Schaukästchen mit Schmarotzerpilzen, welches vom Herrn Lehramtscandidaten G. Firtsch für Unterrichtszwecke eigens hergerichtet und der Anstalt geschenkt wurde.

III. Mineralogie, Geologie und Geognosie.

1. Antimonit aus Japan.
2. Granat vom Hochobir, 1 und 2 und einige andere minder schöne Mineralien sind Geschenke des Münzl (IV); ebenso brachten andere Schüler Mineralien, die hauptsächlich beim Unterricht verbraucht wurden; Karner (V), Polt (VI), Pogatschnigg (VII).
3. Herr Prof. Dr. Hoffer schenkte der Anstalt eine sehr instructive Collection von Versteinerungen aus der Umgebung von Gamlitz (Tertiär-Formation).
4. Herr Kurschel, gewesener Schüler dieser Anstalt, brachte vom Mondsee eine Platte mit versteinerten Algen.
5. Lubiensky (VI) brachte aus Finnland schöne Granite und andere Mineralien.

IV. Bücher und Bilderwerke.

1. Schmiedeknecht Otto, Dr., Apidae europaeae. Fasc. 11.
2. Leukart und Nitsche, Zoologische Wandtafeln; XI, XXV, XXVII.

Herr Tax Franz, gewesener Schüler unserer Anstalt, schenkte dem Museum ein es, schönes Aquarium sammt Marmortischplatte und Gestell und mehrere lebende e.

D. Physikalische Lehrmittel.

Kustos: Prof. A. Deschmann.

Neu angeschafft wurden:

Plateau's Drahtnetze.

Glasgefäss mit zwei gebogenen Heberröhren zur Erklärung von intermittierenden Quellen.

Modell des Babinet'schen Hahnes.

Apparat für Quecksilberregen.

Tantalusbecher.

Sieb der Vestalin.

Apparat zur Erklärung des aërostatischen Paradoxons.

8. Chinesischer Treppenläufer.

Herr Maximilian Tengg, Official der st. Landesbuchhaltung, schenkte dem Cabinete einen sehr schönen galvanoplastischen Medaillenabdruck und einen kleinen elektromagnetischen Motor.

Der Schüler der VII. Klasse, Karl Pichelmayer, verfertigte für das Cabinet einen Apparat für Stromverzweigung und ein Galvanometer.

E. Chemische Lehrmittel.

Kustos: Prof. Max Buchner.

1. Eine Platinmuffel.
2. Ein Platinschälchen.
3. Platinblech.
4. Ein Indigoprisma.
5. Ein Soxhlet-Apparat.
6. Ein Nitrometer von Lunge.
7. Eine Gasburette nach Bünte.
8. Zwei Buretten mit Glashahn.
9. 10 Mess- und Vollpipeten.
10. 6 Eisenstative f. d. Schülerlaborato
11. Dingler's polytechnisches Journal
12. Arendt's chemisches Centralblatt

Die Präparatensammlung wurde theils Ankauf von Chemikalien, theils Arbeiten im chemischen Laborat vermehrt, sowie die Vorräthe von und Porzellanwaaren entsprechen gänzt.

F. Lehrmittel für das Freihandzeichnen.

Kustos: Prof. W. Podrazil und Prof. J. Papež.

1—12. Elementare Holzmodelle: 1 voller Würfel, 1 hohler Würfel, 1 volles Parallelepiped, 1 voller Cylinder, 1 hohler Halbcylinder, 1 volle vierseitige Pyramide, 1 hohler Pyramidenstutz, 1 voller Kegel, 1 volle Kugel, 1 hohle Halbkugel, 1 quadratische Platte, 1 cylindrischer Ring.

13. Griechische Götter und Heldenges von Langl, 8 Lieferungen (III—X
14. Ortwein, Deutsche Renaissanc Oesterreich. Lief. 14 und 15.
15. Zwei Prämienblätter des steierm. K vereins. (Gesch. d. h. st. Landes schusses.)

Für alle in diesem Verzeichnisse angeführten, der Anstalt geschenkten B Lehrmittel etc. etc. sprechen die Direction und der Lehrkörper den P. T. Spende verbindlichsten Dank aus.

VII. Maturitätsprüfungen.

Am Schlusse des Schuljahres 1884/85 und zu Beginn Schuljahres 1885/86.

Schriftliche Aufgaben (Juli-Termin).

Aus der deutschen Sprache.

Welchen Antheil hatten und haben die Hausthiere an der Cultur des Menschen?

Aus der französischen Sprache.

Ein Bruchstück aus „Phédre“ von Racine, Act V, Scene VI, aus Französischen in das Deutsche zu übertragen.

„Der Krämer und die Maus“ von Grimm, aus dem Deutschen i Französische zu übertragen.

Aus der englischen Sprache.

The Wreck of Birkenhead aus Smiles „Self-Help“ aus dem Englischen
s Deutsche zu übertragen.

Aus Mathematik.

Für die Gruppe *A*.

1. $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{b}}{\sqrt{x}-\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}}{\sqrt{a-x}-\sqrt{b-x}}$; $x=?$

2. Die Summe der Entfernungen eines Punktes innerhalb eines gleich-
en Dreieckes von den drei Seiten ist der Höhe des Dreieckes gleich.
hetisch und analytisch-geometrisch zu erweisen.)

3. Von einem Dreiecke sind gegeben zwei Winkel und die Differenz d
er Summe zweier Seiten und der dritten Seite. Wie gross sind die
n und der Inhalt des Dreieckes?

$=a+b-c=260^m$; $\sphericalangle A=65^0\,28'\,13{\cdot}6''$; $\sphericalangle B=42^0\,30'\,3{\cdot}6''$

(?) a, b, c, f.

4. Die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse ist: $16x^2+25y^2=400$
lie Gleichung einer Tangente derselben: $y=-\frac{3}{5}x+5$. Man berechne
Winkel, welchen die zum Berührungspunkt P' gezogene Leitstrahlen
n und die Coordinaten von P'?

Für die Gruppe *B*.

1. $\dfrac{2x\,.\,(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=x+2a$; $x=?$

2. Die Gleichung eines Kreises ist: $x^2+y^2=6x+8y+24$. Man
mme die Oberfläche und den Cubikinhalt eines regulären Tetraeders,
n Seitenfläche dem Kreise eingeschrieben ist?

3. Von einem Dreiecke kennt man die Länge der den $\sphericalangle A$ halbirenden
versale $t=72{\cdot}5^{dm}$, die Winkel $B=36^0\,41'$; $C=105^0\,9'\,30''$. Das
ck ist vollständig aufzulösen?

4. Die Summe s aus einer Seite und der Höhe eines gleichseitigen
ckes ist gegeben. Man soll die Seite, die Höhe und den Inhalt des-
n berechnen und das Dreieck construiren?

Aus der darstellenden Geometrie.

1. Es ist durch den Punkt $a=(9, 7, 9)$ eine Gerade zu zeichnen,
e von dem Punkte $b=(4, 5, 4)$ den Abstand 4 hat und mit H_1 einen
el von 60^0 einschliesst.

2. Der durch die Punkte $a = (4, 7, 2)$, $b = (2, 2, 8)$, $c = (7$ bestimmte Kreis ist die Leitcurve einer Kegelfläche, der Punkt $s = (12,$ der Scheitel derselben; man construire auf der Fläche eine Parabel, v durch die Punkte a und b geht.

3. Man zeichne das perspectivische Bild eines gleichseitigen h Cylinders mit Selbst- und Schlagschatten für den Fall, das der Cylind Grundebene berührt und seine Erzeugenden mit der Bildebene Winke 60^0 einschliessen.

Schriftliche Aufgaben (October-Termin).

Aus der englischen Sprache.

Ein Bruchstück aus Russell „Character of Lewis XIV." aus Englischen in das Deutsche zu übertragen.

Aus der Mathematik.

1. Die Seiten eines sphärischen Dreieckes sind $a = 50^0$; $b = 40$ $c = 30^0$ und der zugehörige Kugelradius ist $r = 1^m$; wie gross is Fläche f des Dreieckes?

2. In welchen Punkten schneidet die Gerade $3y = -2x + 6$ den $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ und wie weit steht diese Gerade vom Centru

3. Das Volumen der einem Würfel umschriebenen Kugel b 864 Volumeinheiten. Wie gross ist 1. die Kante des Würfels? 2 Radius der dem Würfel eingeschriebenen Kugel? 3. In welchem Verhäl stehen die beiden Kugelvolumina?

Zur Maturitätsprüfung für den Juli- und October-Termin 1885 mel sich von den 29 Schülern der VII. Klasse 27, und ein Abiturient des S jahres 1883/84; von diesen traten 2 vor der mündlichen Prüfung zu von den übrigen 26 wurden 6 mit Auszeichnung approbirt, 20 für reif er darunter 6 nach Ablegung je einer Wiederholungsprüfung im Octobert Reprobation fand keine statt. — Von den 26 approbirten Abituri bezeichneten 18 die technische Hochschule, 3 das Militär, 1 die Unive 1 die Landwirthschaft, 2 den Beamtenstand, 1 den Handel als kün Beruf. — Zwei Abiturienten waren 22, drei 21, acht 20, sieben 19, vie zwei 17 Jahre alt. — Die Dauer der Studien betrug bei zwei Abiturien bei zehn 8 und bei vierzehn 7 Jahre.

eichnis der im Juli und October 1885 für reif erklärten Abiturienten.

amen derjenigen Abiturienten, welche mit Auszeichnung approbirt wurden, sind mit fetten Lettern gedruckt.

Name	Geburtsort	Geburtstag	Gewählter Beruf
Bartak Hans	Stockerau, N.-Oesterr.	24. Juni 1866	techn. Hochschule
Crollolanza Gustav Ritter v.	Graz, Steiermark	15. Octob. 1865	„
Daut Oskar	Hermannstadt,Siebenb.	22. Sept. 1865	„
Dertina Josef	Al-Debrö, Ungarn	26. Octob. 1867	„
Erbes Johann	Wien, N.-Oesterr.	20. März 1866	Militär
Frölich Eugen, Rit. v. Frölichsthal	Amstetten, N.-Oesterr.	10. April 1867	techn. Hochschule
Fragger Josef	Neumarkt, Steiermark	4. März 1866	Universität
Hadrava Paul	Herzeg-Szöllös, Ungarn	14. März 1866	Landwirtschaft
Hauer Wilhelm v.	Czakova, Ungarn	12. Nov. 1865	techn. Hochschule
Kranz Ludwig	Andritz bei Graz, Steierm.	27. Juni 1868	„
Kurschel Georg	Pilsen, Böhmen	9. April 1865	„
Landesmann Emil	Triest, Küstenland	16. Sept. 1868	„
Lesky Albin	Cilli, Steiermark	20. Dec. 1864	„
Maluschka Rudolf	Krems, N.-Oesterr.	14. August 1864	Militär
Marbler Johann	St. Nicolai ob Drasling, Steierm.	11. Juli 1865	techn. Hochschule
Martinek Eugen	Belovar, Croatien	17. Nov. 1865	Beamtenstand
Messner Hubert	Rottenmann, Steierm.	17. April 1865	techn. Hochschule
Novak Karl	Cilli, Steiermark	24. Sept. 1863	„
Novotny Franz	Kaschau, Ungarn	25. Dec. 1866	„
Pengg Josef	Oberlorenzen im Mürzthal, Steierm.	22. Sept. 1865	„
Rabensteiner Peter	Graz, Steiermark	17. Febr. 1867	Handel
Schiffer Franz	Gross-Stübing,Steierm.	30. Juli 1864	techn. Hochschule
Schober Anton	Graz, Steiermark	28. März 1867	Beamtenstand
Spreng Fridolin	„ „	8. April 1866	Militär
Walther Max	Grossdorf, Krain	7. Febr. 1866	techn. Hochschule
Walz Johann	Eggenberg, Steiermark	31. Mai 1863	„

VIII. Verfügungen der vorgesetzten Behörden.

ndgemacht im Verordnungsblatte für den Dienstbereich des hohen k. k. Ministeriums für Cultus und Unterricht.

1. Verordnung des Ministers für Cultus und Unterricht vom 23. Juli 1885, 853, und vom 7. September 1885, Z. 26.337, womit der Gebrauch erter (quadrierter) Schreibmaterialien in den Schulen vom Beginne des ahres 1886/87 an verboten wird.

2. Verordnung des Ministers für Cultus und Unterricht vom 6. August Z. 4796, betreffend das Verbot, den Schulbüchern Annoncen beizugeben.

3. Verordnung des Ministers für Cultus und Unterricht vom 28 vember 1885, Z. 22.131, in Betreff der Einreihung des 19. November des Allerhöchsten Namensfestes Ihrer Majestät der Kaiserin) unte Ferialtage der Volks- und Mittelschulen.

4. Verordnung des Ministers für Cultus und Unterricht vom 1 cember 1885, Z. 22.906, durch welche hinsichtlich der Maturitätsprüf an den Gymnasien und Realschulen die Bestimmungen über Prüfungste und Reprobationsfristen theilweise abgeändert werden.

5. Verordnung des Ministers für Cultus und Unterricht vom 19 cember 1885, Z. 23.017, mit welcher der Gebrauch liniierter, s Richtungslinien enthaltender Schreibmaterialien in den Schulen verboten

6. Erlass des Ministers für Cultus und Unterricht vom 16. Dec 1885, Z. 23.323, betreffend den Gebrauch der Lehrbücher an Volks Mittelschulen.

7. Erlass des Ministers für Cultus und Unterricht vom 16. Dec 1885, Z. 23.324, betreffend eine Revision der Schülerbibliotheken an und Mittelschulen.

8. Erlass des Ministers für Cultus und Unterricht vom 25. Dec 1885, Z. 23.377, betreffend die Erklärung der Zulässigkeit von Lehrbü für Mittelschulen.

9. Erlass des Ministers für Cultus und Unterricht vom 26. Jänner Z. 1512, betreffend die Abstellung der Location an den Mittelschulen

10. Erlass des Ministers für Cultus und Unterricht vom 1. F 1886, Z. 507, betreffend die Bemessung des Stempels (1 fl.) für die Du von Semestralzeugnissen an Mittelschulen.

11. Erlass des Ministers für Cultus und Unterricht vom 9. März Z. 4452, betreffend eine Abänderung der allgemeinen Norm über d fassung der Schulzeugnisse für die Gymnasien und Realschulen: A Sittennotenscala hat „musterhaft“ zu entfallen, und „lobenswert“ die und „befriedigend“ die zweite Stufe zu bezeichnen; aus der Scala der gangsnoten hat „ausgezeichnet“ zu entfallen.

12. Erlass des Ministers für Cultus und Unterrricht vom 6. Mai Z. 7322, betreffend die Einführung einheitlicher Abkürzungszeichen f Myriameter (μm) und das Quadratmyriameter (μm^2).

B. Erlassen von dem h. k. k. Landesschulrathe und von dem h. stei Landes-Ausschusse.

1. Landesschulrath, 16. Juni 1885, Z. 2988: Direction und Leh werden auf die im Verordnungsblatte (1885, Nr. 24) erschienenen „Wei zur Führung des Schulamtes an den Gymnasien in Oesterreich“ aufm und die Befolgung derselben wird, soweit sie auch auf die Reals Anwendung finden, zur Pflicht gemacht.

2. Landes-Ausschuss, 23. Juli 1885, Z. 9416: Herr Josef Rammert zum Assistenten des Freihandzeichnens pro 1885/86 wieder bestellt.

3. Landes-Ausschuss, 24. September 1885, Z. 12793: Herrn Prof. wird vom 1. August 1885 an die dritte Quinquennalzulage zuerkannt.

4. Landes-Ausschuss, 27. Juli 1886, Z. 9515: Herr Dr. Franz Thal- wird zum Supplenten für Geographie und Geschichte pro 1885/6 bestellt.

5. Landes-Ausschuss, 29. Juli 1885, Z. 10.121: Herr Professor Emil wird auch für das Schuljahr 1885/6 beurlaubt und Herr Professor n Papež bleibt dieser Landes-Oberrealschule zur weiteren Dienstleistung esen.

6. Landes-Ausschuss, 6. September 1885, Z. 12.017: Jede Ausseracht- g des Verbotes, den Umschlag von Schulbüchern zur Ankündigung scher Erzeugnisse zu benützen, ist sogleich zur Anzeige zu bringen.

7. Landes-Ausschuss, 9. September 1885, Z. 12.030: Herrn Professor luard Hoffer wird die dritte Quinquennalzulage vom 1. October 1885 rkannt.

8. Landes-Ausschuss, 24. September 1885, Z. 12.776. Herr Victor wird zum Assistenten des geometrischen Zeichnens für 1885/6 bestellt.

9. Landes-Ausschuss, 8. October 1885, Z. 13.306: Herrn Professor Kautzner wird die dritte Quinquennalzulage zuerkannt.

10. Landes-Ausschuss, 20. October 1885, Z. 13.305: Die Kaiser Josef-Stipendien, welche der in Graz bestandenen Staatsoberrealschule iet wurden, dürfen den damit betheilten Schülern der Staats-Unter- ule belassen werden, wenn dieselben ihre Studien an der Landes- alschule fortsetzen.

11. Landes-Schulrath, 24. October 1885, Z. 5917: Die von dem Herrn rial-Commissär Professor Josef Langl gegebenen fachmännischen haben bei dem Unterrichte im Freihandzeichnen die genaueste ung zu finden.

12. Landes-Ausschuss, 8. November 1885, Z. 14.463: Herrn Professor 'ogatscher wird vom 1. September 1885 an die zweite Quinquennal- zuerkannt.

13. Landes-Ausschuss, 10. December 1885, Z. 15.643: Herr Georg nböck wird definitiv im Lehramte bestätigt und erhält den Titel sor".

14. Landes-Schulrath, 5. Jänner 1886, Z. 61: Aenderungen in Betreff turitäts- und der Aufnahmsprüfungen (Erlass des Ministeriums für und Unterricht vom 2. Jänner 1886, Z. 85).

15. Landes-Ausschuss, 11. März 1886, Z. 567: Der hohe steiermärkische hat den hohen steiermärkischen Landes-Ausschuss aufgefordert, e zu treffen, dass an dieser Landes-Oberrealschule bei Meldung einer

entsprechenden Schülerzahl der Unterricht in der italienischen Sprach nichtobligater Gegenstand) ertheilt werden könne, daher die Direction derlichen Falles die geeigneten Anträge zu stellen habe.

16. Landes-Schulrath, 4. März 1886, Z. 7170: „Wie seit Reihe von Jahren sind die an der Landesrealschul Schuljahre 1884/5 erzielten Unterrichts-Erfolge befriedigend.“ „Recht erfreulich gestalteten sich die hältnisse in der I. Klasse, was vorzugsweise den rast Bemühungen des Klassenvorstandes Professor Dr. H zu danken ist. Die disciplinare Haltung der Jugend w Ganzen eine correcte und verdient Anerkennung.“

17. Landes-Ausschuss, 3. April 1886, Z. 4.433: In Erledi des Jahresberichtes über das Schuljahr 1884/5 „sieht der Landesauschuss in der angenehmen Lage, dem Director Dr. Ilwof, sowie dem gesammten Lehrkörpe sein eifriges erfolgreiches Wirken seine Anerken auszusprechen“.

18. Landes-Schulrath, 22. April 1886, Z. 1752: Die bisher best Ferialordnung (16. Juli bis 15. September) bleibt auch für fernerhi in Giltigkeit.

19. Landes-Schulrath, 23. April 1886, Z. 1768: Die für die M der Schüler beim Uebertritt von der Volks- in die Mittelschule schriebenen Frequentationszeugnisse können durch die „Schulnachr ersetzt werden, wenn alle Zweige des Sprachunterrichtes und das R in Verbindung mit der geometrischen Formenlehre unter je eine gebracht und diese beiden Lehrgegenstände mit je einer einzige classificirt sind.

20. Landes-Schulrath, 9. Mai 1886, Z. 954, eröffnet in Erl des Protokolles über den Schluss des I. Semesters, „dass sic Fortgangsclassification pro I. Semester des laufe Schuljahres durchschnittlich recht günstig gestalte Schwächer ist der durchschnittliche Calcul betreffend das sittliche Ve der Schüler, doch immerhin auch noch befriedigend“.

IX. Chronik der Lehranstalt.

Am 2. October 1885 waren vierzig Jahre seit der Eröffnung dieser -Oberrealschule verflossen: über die Gedenkfeier, welche in Folge Anlasses abgehalten wurde, wird auf den ersten Seiten dieses Jahres- es Kunde gegeben.

Ein zweites Ereignis in der diesjährigen Geschichte unserer Lehranstalt, eignis von besonderer Bedeutung und Auszeichnung für dieselbe fand December 1885 statt.

An diesem Tage wurde unsere Lehranstalt mit dem Besuche Seiner nz des Herrn Ministers für Cultus und Unterricht Dr. Paul Gautsch ankenthurn beehrt, welcher in Begleitung des Herrn Statthaltherei- Oscar Schiessler, des Herrn Landes-Schulinspectors Dr. Johann Zindler s Herrn Präsidial-Secretärs L. Grafen von Auersperg erschien, von udienreferenten im Landesausschusse, Herrn Dr. Moriz Ritter von er und von dem Director Dr. Franz Ilwof empfangen und durch alle geleitet wurde. Seine Excellenz besuchte sämmtliche Hör- und säle, in welchem sich die Schüler befanden, wohnte in mehreren en dem Unterrichte bei, besichtigte das physikalische Cabinet, das torische Museum, das chemische Laboratorium, die Bibliothek und tsaal, in welchem Zeichnungen und Lehrmittel aufgelegt waren und ie Vorstellung aller Mitglieder des Lehrkörpers entgegen. Beim sprach Seine Excellenz zu dem Director folgende Worte: „Ich Ihnen meine vollste Zufriedenheit und Anerkennung aus für die afte Ordnung, welche ich hier gefunden", und dem Herrn Studien- en Dr. M. R. v. Schreiner gegenüber äusserte er sich, dass er dem zu dieser Anstalt gratulire. — Für unsere Landes-Oberrealschule eser 15. December stets ein Tag freudiger Erhebung und dankbarer ung bleiben.

Nachhange zu dem Jahresberichte für 1884/5 ist noch Folgendes eilen: Die Direction der k. k. Militär-Oberrealschule zu Mährisch- chen eröffnete anher, dass das hohe k. k. Reichs-Kriegs-Ministerium rrn Oberlieutenant im Geniecorps Joachim Steiner die Bewilligung Studienreise zu dem Zwecke ertheilt habe, um sich über die in schiedenen Civilschulen befolgte Methodik des Unterrichts in der nden Geometrie zu informiren und die vorhandenen Hilfsmittel für Unterricht durch persönliche Anschauung kennen zu lernen, und dass dem genannten Herrn Oberlieutenant der Zutritt zum Unter-

richte und die Besichtigung der Lehrmittelsammlungen gestattet und ihm die zur Erreichung des anzustrebenden Zieles nothwendige Unterstü gewährt werde. Herr Oberlieutenant J. Steiner traf Ende Juni 188 ein, wohnte an dieser Lehranstalt mehreren Unterrichtstunden aus darstellenden Geometrie bei und besichtigte sämmtliche hier vorhan Lehrmittel dieses Faches.

Wie fast kein Jahr ohne Todesfälle verläuft, welche auch Anstalt schmerzlich berühren, so ist es auch dieses Mal. Am 8. Jänner starb Herr Johann von Rogner, o. ö. Professor der Mathematik a k. k. technischen Hochschule in Graz, welcher durch eine lange Reih Jahren — von 1847 bis 1866 — an dieser Landesoberrealschule in h ragender Weise gewirkt hatte. Director und Professoren der L Oberrealschule wohnten dem Leichenbegängnisse bei und das Andenk diese vorzügliche Lehrkraft wird auch hier stets in treuem und Andenken erhalten werden.

Auch einen der besten Schüler unserer Anstalt raffte in diesem jahre der Tod hinweg. Am 8. November 1885, an seinem 17. Gebur verschied Franz Frölich (VI. Klasse), einer der bravsten Schüler der A der sich ebensosehr durch sein musterhaftes Benehmen, wie durch rastlosen Eifer und Ehrgeiz hervorgethan; an seinem Grabe sta trauernd seine Mutter, die in ihm ihr einziges Kind verloren und sc lich ergriffen hatten der Lehrkörper und die Schüler den Hingeschi zur Ruhestätte geleitet. R. I. P.

Das Schuljahr 1885/6 wurde am 16. September 1885 durch da Geistamt eröffnet, welches in der k. k. Hof- und Domkirche von dem würdigen Herrn Dompfarrer und Canonicus Prälat Dr. Alois Hebe celebrirt wurde; der Director, die Professoren und die Schüler v demselben bei. Nach demselben wurden den Schülern von den Herren K vorständen in den Hörsälen die Disciplinar-Ordnung, die Stunden-Eint und das Verzeichnis der Lehr- und Hilfsbücher vorgelesen. Die Au der Schüler, die Aufnahms-, Wiederholungs- und nachträglichen Pr hatten bereits in den Tagen vom 14. September an stattgefunden. Unterricht nahm in allen Klassen am 17. September seinen Anfa wurde allenthalben nach den vorgeschriebenen Lehrplänen und de gehörigen Instructionen ertheilt.

Die religiösen Uebungen der Schüler bestanden aus dem Gotte an Sonn- und Feiertagen und aus dem Empfange der heil. Sacrame Busse und des Altars zu Beginn und zu Ende des Schuljahres der Osterzeit. —

Auch in diesem Schuljahre meldete sich, sowie seit 1878/9 kein Schüler as facultativ-obligatorische Fach „Slovenische Sprache".

Ueber die Veränderungen im Personalstande des Lehrkörpers wird im Abschnitte I, und über die Erwerbungen für die Lehrmittel-lungen im Abschnitte VI Bericht erstattet.

Wie alljährlich so fand auch am 26. November 1885 das Schulfest zur erung an die an diesem Tage des Jahres 1811 erfolgte Gründung des eums durch Seine k. k. Hoheit den durchlauchtigsten Herrn Erzherzog nn statt; die Feier begann um 11 Uhr; der Studienreferent im Landes-husse, Herr Dr. M. R. v. Schreiner, und der Secretär des Unter-ngsvereines, Herr Director Dr. Aichhorn, wurden von dem Director ehranstalt in den festlich geschmückten Prüfungssaal geleitet, in welchem rofessoren und Schüler versammelt waren. Das Fest wurde durch einen eröffnet, welcher von den Sängern der Anstalt unter Leitung des n Gesangslehrers Franz Blümel vorgetragen wurde. Nach demselben f Herr Dr. v. Schreiner das Wort und legte der studierenden Jugend Bedeutung der heutigen Feier dar.

Hierauf wurde die Vertheilung der von der allgemeinen Versammlung Unterstützungsvereines sehr fleissigen und dürftigen Oberrealschülern annten Beträge durch den Vereinssecretär vorgenommen. Es erhielten: rsten systemisirten Stiftungsbetrag des genannten Vereines mit 50 fl. Pichelmayer, den zweiten mit 50 fl. Franz Peitler, beide r der VII. Klasse, den dritten mit 25 fl. Franz Heindl, Schüler I. Klasse, den Reininghaus'schen Stiftungsbetrag mit 25 fl. Wilhelm vič, Schüler der VI. Klasse, eine von Director Dr. Franz Ilwof ndete Subvention mit 25 fl. Alois Neubauer, Schüler der VII. , endlich eine ausserordentliche Subvention aus der Vereinscasse mit Alois Scherhäufl, Schüler der V. Klasse.

Sodann sprach der Abiturient Karl Pichelmayer im Namen seiner en folgende Worte des Dankes:

Seit einer Reihe von Jahren ist es an dieser Lehranstalt Sitte, dass am Tage der ngsfeier des Joanneums, am 26. November, aus der Mitte der Schüler eine Stimme ebt, um jene Gefühle zum Ausdruck zu bringen, welche diese Feier in ihnen nd heute will ich es versuchen, dieser ehrenvollen Aufgabe gerecht zu werden. Wieder ist ein Jahr in den Strom der Zeit geronnen seit jenem denkwürdigen u dessen Feier wir uns heute versammeln; es ist dies der 26. November des 1811, der Gründungstag des Joanneums, aus dem am 2. October 1845 diese Ober-le hervorgegangen ist. Vor wenigen Wochen haben wir diesen Gedenktag festlich n und in uns die Erinnerung wachgerufen an jene Männer, deren Namen sich it der Geschichte unserer Schule verwebten. Es mögen zwar die Jahre sich häufen, schen der Gegenwart und ihnen liegen, nie werden die Gefühle der Dankbarkeit Herzen der Nachwelt für Diejenigen erkalten, die den Grundstein legten zu einem , das durch die Jahrzehnte wachsend und blühend zur heutigen Landes-Oberreal-geworden ist.

Und unter diesen Männern ist es wieder Einer, ebensosehr durch Geist Charakter, als durch Geburt geadelt, den jedes Kind der Steiermark kennt und dem jedes Herz entgegenschlägt, der unermüdliche Wohlthäter des Landes, der väte Freund des Volkes — unser Erzherzog Johann, dem wir den grössten Dank schu Zwar hat das allgemeine Menschenlos auch ihn schon längst ereilt, doch hoch in H geschossen ist über seinem Grabe die Saat, die er einst mit sorglicher Hand ausge und im Strahle der Sonne wiegt sich ein goldenes Aehrenfeld. — Und die Anstalte aus dem Samenkorn vom 26. November 1811 heranblühten, sind dieselben, deren V thaten ihr Alle, meine lieben Collegen, geniesst, es sind dieselben, deren Ruf bis die Grenzen der Monarchie hinausreicht.

Jedoch die dankbare Erinnerung an das Wirken jenes Mannes ist nicht der e Zweck unseres Festes; es gilt uns heute einer jener Einrichtungen zu gedenken unsere Schule vor so vielen anderen auszeichnet, ich meine den löblichen Unterstüt verein für würdige und dürftige Studierende.

Wie mancher aus unserer Mitte, den das rauhe Leben schon frühzeitig a Kampf um's Dasein gewöhnte, dessen froher Sinn und die Aussicht auf eine l Zukunft jedoch alle Widerwärtigkeiten überwanden und ihm neue Spannkraft ver wäre trotzdem von der Stufe, die er in seinem ernsten Streben erklommen, wieder geschleudert worden, wäre nicht jener grossmüthige Verein ihm hilfreich beigest Auch den heutigen Tag verschönert derselbe durch sein edles Wirken und im aller Jener, die heute durch Stiftungsbeträge beglückt wurden, drücke ich dem lö Vereine den tiefgefühltesten Dank aus.

Uns Schülern der Abiturientenklasse, die wir heuer zum letzten Male in G schaft mit unseren hochverehrten Lehrern den 26. November festlich begehen, sei noch gestattet zurückzublicken auf jene Reihe von Jahren, die uns bis hieher hat, auf jene frohen Jugendtage, die dem Manne die theuerste Erinnerung sind. — geöffnet standen auch uns einst die gastlichen Thore dieser Anstalt und von allen des Landes, des Reiches, strömten die wissbegierigen Scharen in diese Räume, je Knaben mit demselben Gefühle von der Unendlichkeit der sieben Jahre im Herze frisch begann die Wanderung. Und wer den geraden Weg geht und auf die achtet, der kommt rasch vorwärts. Doch der Weg durch die sieben Jahre hind nicht eben, und die Abwege, die Manchem verführerischer winkten, forderten a unserem Kreise ihre Opfer. Von der beträchtlichen Zahl der Genossen ist ein Häuflein zurückgeblieben, das jedoch der Entscheidung mit Zuversicht entgegensi

Doch nicht durch eigene Kraft allein haben wir diese Erfolge errunge dadurch, dass wir von jenen Männern, deren Wirken manche von uns Vieles u Alles verdanken, sorglich an der Hand geleitet wurden, haben wir jene Ausbild Geistes und Gemüthes erlangt, die wir nun bald mit auf die Lebensreise nehmen Darum also diesen Männern, welche die Begeisterung für alles Gute, Wahre, S unseren Herzen entzündet, die uns als echte Vorbilder vorangeleuchtet haben, aus Studentenherzen den innigsten Dank! Dank ihnen Allen, denn sie haben uns die geschmiedet, mit denen wir den harten Lebenskampf ehrlich und wacker durchz gedenken, gefeit gegen alle Angriffe des Niedrigen und Gemeinen. Sie haben unse gehegt, sie waren unsere besten Freunde.

Und haben wir unser Ziel einst glücklich erkämpft, dann werden wir durch jene Dankbarkeit und Anhänglichkeit bekunden, die wir jetzt nur in schlich beweisen können, dann werden wir mit Stolz bekennen, Kinder jener Schule zu wir leider so bald verlassen werden.

Unabsehbar rollt unsere Zeit vorwärts, jedes Decennium bringt ungeheure F schaften auf den technischen Gebieten, und wir werden unsere ganze Kraft dara

ı, mit dem grossen Ganzen gleichen Schritt zu halten, denn das eiserne Jahrhundert
gt eiserne Männer. Doch wir werden es frisch wagen, denn auf unserer Realschul-
ıaben wir uns gerüstet für die Lebensfahrt.

Mit warmem Dankgefühle werden wir am Ende dieses Jahres der liebgewonnenen
Lebewohl sagen und unser sehnlichster Wunsch wird sein: Die Wiege unseres
ıs und Könnens, die steiermärkische Landes-Oberrealschule zu Graz möge noch
ıin dem theuren Vaterlande blühen und gedeihen, als eine Pflegestätte wahrer
ıschaft und echter Herzensbildung.

Dieser Ansprache folgte wieder ein Chor; den Schluss bildete
kurze Rede des Directors, welcher darauf hinwies, dass
Anstalt vom Lande gegründet wurde und erhalten wird, daher alle
igen, welche an derselben ihre Studien zurücklegen, dem Lande Steier-
und seiner Vertretung zum wärmsten Danke verpflichtet sind und
zahlreiche Lehranstalten unter der Herrschaft des jetztregierenden
rs gegründet und alle reorganisirt wurden. Der Redner forderte die
d zu einem Hoch auf den Kaiser auf, das aus 300 jugendlichen Kehlen
ll, worauf die Feier mit dem Vortrage der Volkshymne ihren
luss fand. —

Der Maiausflug der sieben Klassen dieser Anstalt fand am 11. Mai
vom Wetter, des Vormittags wenigstens, begünstigt, waren St. Oswald,
ch bei Stübing, Peggau, Eggersdorf, Frohnleiten, Wildon und Leibnitz
elpunkte desselben. Obgleich Nachmittag Jupiter pluvius einigermassen
d eingriff, so verlief doch Alles in bester Ordnung und am folgenden
fanden sich Lehrer und Schüler wieder bei der gemeinsamen Geistes-
in den Lehrzimmern vollzählig ein.

Am 9. Juni wurde die Prüfung aus der steiermärkischen Geschichte
dem Vorsitze des Studienreferenten im Landes-Ausschusse, Herrn
oriz Ritter von Schreiner, von dem Supplenten Herrn Dr. Franz Thal-
abgehalten. Durch die vom hohen Landes-Ausschusse gespendete
lle wurde der Schüler der VI. Klasse Franz Heindl ausgezeichnet
ie vorzüglichen Leistungen der Schüler Franz Hemmelmayer v.
ıstenfeld und Wilhelm Popović fanden lobende Erwähnung
eite des Herrn Studienreferenten und wurden dieselben durch Bücher-
en gebührend anerkannt.

Einen Beweis des Wohlthätigkeitssinnes gaben die Schüler dieser
t durch die unter ihnen veranstaltete Sammlung für den Unter-
ıgsverein, welche die ansehnliche Summe von 197 fl. 85 kr. ergab.

An literarischen Arbeiten von Mitgliedern des Lehrkörpers dieser
t im Schuljahre 1885/6 sind folgende zu verzeichnen:

Von Director Dr. Franz Ilwof:

Die Anfänge des deutschen Theaters in Graz. (In den „Mittheilungen
les historischen Vereines für Steiermark", Graz 1885, XXXIII. Heft,
S. 124—149.)

2. Erzherzog Johann und die Anfänge des Eisenbahnwesens in Oesterr (In „Allgemeine österreichische Literaturzeitung", 1885, Nr. 10–
3. Recensionen, Anzeigen und Besprechungen in den „Mittheilunger der historischen Literatur" (Berlin), in den „Steiermärkischen Geschi blättern", im „Wegweiser durch die pädagogische Literatur" (V und in der Grazer „Tagespost".

Von Professor Adalbert Deschmann:

1. Anwendung der Differentialgleichungen 1. Ordnung und *n*. G auf geometrische Beispiele mit besonderer Berücksichtigung der s lären Lösungen. (In diesem Jahresberichte.)

Von Professor Dr. Eduard Hoffer.

1. Wunderbares Erinnerungsvermögen der Hummeln. („Kosmos" 2. Heft.)
2. Zur Biologie von Antilla europaea L. (Zoologische Nachrichten, 3. I
3. Mehrere Recensionen und Anzeigen in Fachzeitschriften.

Von Dr. Paul Hofmann von Wellenhof:

1. „Arminius und die Varusschlacht bei Hutten". (Zeischrift für die ö Gymnasien, 1885. X.)
2. „Zur Geschichte des Deutschthums in Oesterreich". (Mittheilunge Deutschen Schulvereines, 1885, Nr. 15 und Nr. 17.)
3. „Schule und Leben". (Pernerstorfer's Deutsche Worte, 1886, 5.)

Von Dr. Franz Thalmayr:

1. Das Kartenzeichnen als Behelf beim geographischen Unterrichte (S. 1 191 der Verhandlungen des Vereines „Innerösterreichische Mittels in Graz über den Gymnasiallehrplan und die Instructionen fü Unterricht an den österreichischen Gymnasien. Wien 1886).

X. Bericht

über die

Wirksamkeit und den Cassastand des Vereines zur Unterstü dürftiger und würdiger Studierender

an der

k. k. technischen Hochschule und steierm. Landes-Oberrealschule zu Graz

im Jahre 1884—85.

Am 28. October hat der obgenannte Verein seine erste allg Versammlung für das Studienjahr 1885/86 unter dem Vorsitze des Präsidenten-Stellvertreters Dr. Moriz Ritter v. Schreiner abgehalter dem vom Herrn Vereins-Secretär Dr. Sigmund Aichhorn vorgetr Rechenschaftsberichte über die Ergebnisse im abgelaufenen Schuljahre 1

t die Vereins-Direction Nachstehendes zur Kenntnis der P. T. Herren der und Mitglieder bringen zu sollen.

Die Rechnung über Empfänge und Ausgaben im Jahre 1883/84 wurde den Herren Dr. Moriz Ritter v. Schreiner und Peter v. Reininghaus geprüft und der vom Herrn Rechnungsleger Dr. Sigmund Aichhorn ausgewiesene Cassastand mit 13.782 fl. 44 kr. richtig befunden. Die Einnahmen im Jahre 1884/85 haben 2813 fl. 46 kr., die Ausgaben 1466 fl. 21 kr. betragen; erstere waren also um 1347 fl. 25 kr. grösser, und beziffert sich demgemäss der gegenwärtige Vermögensstand mit 15.129 fl. 69 kr. Hievon kommen 1780 fl. 15 kr. auf Sparcassen-Einlagen, 13.562 fl. 50 kr. (nominell) auf Staatspapiere, und 212 fl. 4 kr. auf die vorhandene Barschaft.

Die Zahl der Gründer und Mitglieder hat sich um 4 vermehrt, da 7 neu beigetreten, hingegen 3 gestorben sind. Der Verein zählt daher gegenwärtig 121 Gründer und Mitglieder, von welchen im Laufe des Jahres 1885/86 die subscribirten Jahresbeiträgen 251 fl. 80 kr. eingehen sollten.

An ordentlichen Einnahmen sind in die Vereinscasse 1415 fl. 42 kr. geflossen, wovon auf die Jahresbeiträge der Gründer und Mitglieder 352 fl. 70 kr., auf die Subvention aus dem Landesfonde 500 fl. und auf Interessen und Zinseszinsen 651 fl. 72 kr. entfallen.

Sehr bedeutend waren die ausserordentlichen Einnahmen, welche die Höhe von 1398 fl. 4 kr. erreichten. Der Herr Landeshauptmann Graf Gundaker Wurmbrand-Stuppach spendete 600 fl. in Silber- und Herr Fabriksbesitzer Peter v. Reininghaus 500 fl. bar zur Gründung von Stiftungen. Die Herren Regierungsrath Professor Jakob Wahl und Director Dr. Franz Ilwof übergaben jeder 25 fl., um anlässlich der Gründungsfeier des Joanneums als Subventionen verwendet zu werden. Ferner liefen ein vom Herrn Grafen Octavian Collalto 30 fl., vom Herrn Hof- und Gerichts-Advocaten Dr. Moriz Ritter von Schreiner 5 fl. vom Herrn Stadtbaumeister Josef Flohr 2 fl. Die Direction der k. k. Landes-Oberrealschule führte als Ergebnis einer unter den Schülern dieser Lehranstalt eingeleiteten Sammlung 175 fl. 28 kr. an die Vereinscasse ab. Durch den Verkauf einiger Bücher und Zeichenvorlagen, welche der gewesene Assistent an der k. k. technischen Hochschule, Herr Heinrich Wallbauer, dem Verein schenkte, sind 28 fl. eingenommen worden. Mehrere andere Bücher desselben Geschenkgebers der Vereins-Bibliothek einverleibt wurden. Weitere Bücherspenden liefen ein von Frau Anna Reininghaus und einigen Realschülern. Endlich sind 6 fl. 76 kr. durch Convertirungen und 1 fl. durch den Verkauf von Maculatur-Papieren zugewachsen.

Die Lehrmittelsammlung des Vereines zählte mit Schluss des Jahres 1885 1338 Bücher, 48 Reisszeuge, 55 Reissbretter, 43 Reissschienen und 2 Dreiecke.

Unterstützt wurden 61 Unterrealschüler, 32 Oberrealschüler, 40 Hörer der Technik, somit im Ganzen 133 dürftige Studierende. Unterstützungen mit Geldbeträgen haben 830 fl. 50 kr. in Ans genommen, wovon 580 fl. auf Hörer der Technik und 250 fl. auf Realsc entfallen. Zum Ankauf von Lehrmitteln wurden 579 fl. 69 kr. verwe und die Regiekosten haben 56 fl. 2 kr. betragen.

Welchen Erfolg die Unterstützungen hatten, lässt sich aus der folge Zusammenstellung entnehmen:

An der Unterrealschule erhielten 11 Schüler die Vorzugsklasse, 3 Zeugnis mit erster Hauptklasse, 10 ein Interims-Zeugnis, 2 ein Zeugni zweiter Hauptklasse und 5 sind ausgetreten.

An der Oberrealschule erhielten von den Schülern der V. und VI. K 6 die Vorzugsklasse, 9 ein Zeugnis mit erster Hauptklasse, 2 Inte Zeugnisse, 2 ein Zeugnis mit zweiter Hauptklasse und 1 ist ausgetreten den Schülern der VII. Klasse aber legten 4 die Maturitäts-Prüfung mit zeichnung ab, 5 erhielten das Zeugnis der Reife, 2 dürfen diese Pr nach den Ferien wiederholen, und 1 hat sich derselben nicht unterz

Diese Ergebnisse berechtigen zu der Erwartung, dass die P. T. gee Herren Gründer und Mitglieder des Vereines ihr Wohlwollen der dür und fleissigen, an den genannten Lehranstalten studierenden Jugend ferner schenken werden, sie lassen aber auch hoffen, dass sich noch a Gönner finden werden, welche geneigt sind, die Zwecke des Verein fördern. Sowohl Beitritts-Erklärungen als auch einmalige Spenden w stets dankbarst entgegengenommen in der Rectoratskanzlei der k. k. nischen Hochschule (Raubergasse Nr. 10), in der Directionskanzlei der st Landes-Oberrealschule (Realschulgasse Nr. 3), in der Universitäts- handlung der Herren Leuschner und Lubensky (Sporgasse Nr. 1 der Buchhandlung des Herrn August Hesse (Hauptplatz Nr. 16) u Herrn Andreas Rospini (Hauptplatz Nr. 3).

Am 23. November ist die zweite diesjährige allgemeine Versam unter dem Vorsitze des Herrn Vereins-Präsidenten Landeshauptmann Gundaker Wurmbrand-Stuppach abgehalten worden, und zwar Zuerkennung von Stiftungsbeträgen und Subventionen.

II. Verzeichnis der Schüler am Schlusse des Schuljahres 1885/86.

I. Klasse.

Karl.
sheimb v. Hermann.
er Julius.
an Florian.
ne Eugen.
ck Emanuel.
rich Wilhelm.
n Heinrich.
n Rudolf.
Max.
ler Franz.
ner August.
Gustav.
ann Theodor.
ann Karl.
ch Karl.
ck Titus.
Hermann.
er Michael.
negger Josef.
Georg.
Moriz.
Franz.
r Isidor.
erger Karl.
l Karl.
h v. Kulmthal Norbert.
vski Ernest.
rt Josef.
ihler Ludwig.

Menacher Oskar.
Moses Bernhard.
Neumann August.
Nürnberger Jakob.
Pampichler Paul.
Pöltl Josef.
Riboli Alfons.
Riedler Moriz.
Rosenberg Eugen.
Rossmann Albert.
Röthl Franz.
Schafler Otto.
Scholze Hermann.
Schreiber Hermann.
Schwaiger Josef.
Schwára Max.
Schwenner Franz.
Seltmann Edl. v. Lothar.
Steiner Max.
Strauss Johann.
Tubič Stefan.
Uray Rudolf.
Veličan Karl.
Waldherr Oskar.
Watzeck Ludwig.
Weiglein Ernst.
Wilhelmi v. Max.
Wirth Alois.
Wolfbauer Georg.

II. Klasse.

Hermann.
Ernst, Graf.
Clemens.
its Viktor.
r Otto.
Karl.
Rudolf.
-Raitz Karl, Freiherr.
v. Alfred.
ich Edmund.
ich Oskar.
Karl.
r Viktor.

Geussenhainer Ernst.
Greiner Ferdinand.
Hansen Ferdinand.
Hein Rudolf.
Helmich Alfred.
Herzner Konrad.
Hofer Victor.
Hofmann Karl.
Jaritz Josef.
Juvan Ignaz.
Karl Moriz.
Karnel Johann.
Kelbetz Mathias.

Kellersperg Oswald, Freiherr.
Kleinhans Georg.
Kloss Wilhelm.
König Hugo.
Kuder Alfred.
Leuzendorf Egon v., Privatist.
Lierk Friedrich.
Löschnigg Egon.
Mance Friedrich.
Mark v. Traisenthal Adolf.
Masjon Roland.
Pampichler Michael.
Pečenka Franz.
Peinthor Heinrich.
Pelzel Karl Rit. v.
Pittoni Heinrich Rit. v.
Ranz August.
Rasch Friedrich.
Rosenzweig Edl. v. Powacht F
Scheibein Felix.
Schraml Ernst.
Schuster Ludwig.
Socher Karl.
Stangl Johann.
Stradner Josef.
Topitsch Josef.
Umlauft Ambros.
Weiss Moriz.
Wiser Leopold Rit. v.
Wiskočil Gustav.
Wolfzettel Friedrich.
Wotypka Josef.
Zirl August.

III. Klasse.

Althaller Josef.
Banze Angelo.
Banze Domeniko.
Beck Alois.
Beer Rudolf.
Berghofer Johann.
Brotschneider Franz.
Duschek Aladar v.
Ehrlinger Eduard v.
Fink Friedrich.
Fischer Franz.
Geller Otto.
Gerdes Rudolf.
Golubovitz Isidor.
Hahne Emil.
Haim Max.
Hofbauer Richard.
Hoffmann Max.
Höller Alois.
Jaksch Robert.
Klerr Kudwig.
Kloss Richard.
Kolář Rudolf.
Lair Heinrich.
Lechner Karl.
Lill v. Lilienbach Karl.
Masjon Karl.
Moser Josef.
Müllner Emil.
Neubauer Johann.
Pollak Karl.
Reisner Josef.
Schantl Karl.
Schnürdreher Siegfried.
Seltmann Richard Edl. v.
Singer Sigmund.
Spanner Wilhelm.
Sterniša Julius.
Stoinschegg August.
Trummer Franz.
Wachauer Anton.
Weiss Bernhard.
Wulle Julius.
Zimmermann Karl.

IV. Klasse.

Baron Max.
Beyerl Karl.
Beyerl Othmar.
Borbely Franz.
Cossmann Richard.
Drasenovich v. Posertve Hugo.
Eichhofer Josef.
Engelsmann Rudolf.
Ertl Ernst.
Fischer Paul Rit. v. Ledenice.
Fontane Richard.
Franz Alfons.

rich Anton.
henschlager Albin.
henschlager Max Franz.
henschlager Max Josef.
es Victor.
Rudolf.
lt Albert.
Ferdinand.
e Richard.
August.
er Karl.
Rupert.
hbaum Adolf.
Rudolf.
wein Alfred.
Franz.
ndorf Adalbert v., Privatist.
r Karl.
l Johann.
Georg.
x Anton.

Muchmeyer Robert v.
Münzl v. Münzthal Michael.
Plitzner Guntram.
Pollak Josef.
Preschern Paul.
Prettenhofer Heinrich.
Reinhard Albert.
Riedl Heinrich.
Scherber Josef.
Schliephake Fritz.
Schmidl Franz.
Schnürdreher Judor.
Schwarz Ludwig.
Stachel Anton.
Starkel Franz.
Stecher v. Sebenitz Heinrich.
Trousil Alfred.
Weber Anton.
Wehner Josef.
Wolfbauer Wilhelm.
Wulle Richard.

V. Klasse.

a Eugen, Graf, Privatist.
wik de Korompa Ottokar.
oloušek Emil.
to Manfred, Graf, Privatist.
hel Othmar.
-Eckhofen Edgar, Freih.
dler Gustav.
ann Peter.
ng Anton.
n Franz.
Arnold.
Rupert.
Alfred.
lder Horace.
Rudolf.
Engelbert.
nüller Ernst.
nüller Karl.
Emanuel.
nn August.
Anton.
r Josef.
itt Hugo.
yr Johann.
iegger Ernest.
r. Traisenthal Franz Josef.

Neumann Alfred.
Pauer Alois.
Postuvanschitz Fritz.
Preissecker Max.
Preissler Percy.
Prigl Ferdinand.
Rauchenberger Karl.
Reisner Sigmund.
Remschmidt Karl.
Ribitsch August.
Ritz Ferdinand.
Rüdt Friedrich Freih.
Scherhäufl Alois.
Schlauf Anton.
Seiche v. Nordland Karl.
Sorger Robert.
Spannocchi Anton Graf.
Steinhauser Franz.
Steinlechner Gustav.
Suppantschitsch Josef.
Svastics Paul.
Wagner Gustav.
Wagner Karl.
Wieden Gustav v.
Wissiak Ludwig.
Wittemberski Alfred v.

VI. Klasse.

Auer Franz.
Bullmann Max.
Forcher Hugo.
Geyer Josef.
Hassmann Karl.
Heindl Franz.
Hellin Franz v., Privatist.
Hemmelmayr Edl. v. Augustenfeld Franz.
Hensel Rudolf.
Lanser Paul v.
Lubienski Kasimir, Graf.
Naumann Franz v.
Polt Rudolf.
Popovič Wilhelm.
Raschka Albin.
Schlegel August.
Schwarz Bernhard.
Siess Johann.
Weiss Moriz.
Zauschner Richard.
Zeilinger Julius.
Zinsmeister Josef.

VII. Klasse.

Becker Michael.
Duch Johann.
Grossi Franz.
Kohn Adolf.
Lenhart Oskar.
Meran Franz, Graf.
Müller Cäsar.
Neubauer Alois.
Peitler Franz.
Pichelmayer Karl.
Pogatschnigg Fritz.
Puschnigg Peter.
Schneefuss Ernst.
Steif Friedrich.
Stolz Heinrich.
Straub Eugen.
Thonner Karl.
Zwanziger Ludwig.

XII. Statistik der Schüler.

1. Zahl.	Klasse I	II	III	IV	V	VI	VII
Zu Ende 1884/85	58	53	53	58	28	27	29
Zu Anfang 1885/86	60	63	46	52	52	25	21
Während des Schuljahres eingetreten	1	—	2	2	1	—	—
Im Ganzen also aufgenommen	61	63	48	54	53	25	21
Darunter:							
Neu aufgenommen, und zwar:							
Aufgestiegen	58	4	7	7	12	1	—
Repetenten	1	1	1	1	—	—	—
Wieder aufgenommen, und zwar:							
Aufgestiegen	—	53	40	46	27	21	20
Repetenten	2	5	—	—	4	3	1
Während des Schuljahres ausgetreten	2	4	4	—	1	3	3
Schülerzahl zu Ende 1885/6	59	59	44	54	52	22	18
Darunter:							
Oeffentliche Schüler	59	58	44	53	50	21	18
Privatisten	—	1	—	1	2	1	—

2. Geburtsort (Vaterland).	Klasse I	II	III	IV	V	VI	VII	Zusammen
az	30	17	15	16	10	7	4	99
eiermark ausser Graz	9	16	15	20	18	6[1]	6	90[1]
eder-Oesterreich	6	4	5	1[1]	8	2	4	30[1]
er-Oesterreich	—	2	—	—	—	—	—	2
lzburg	—	—	—	—	—	1	—	1
rnten	—	1	—	1	1	—	—	3
ain	—	3	3	—	—	—	—	6
stenland	2	—	—	—	2	—	—	4
lmatien	1	—	—	—	—	—	—	1
rol	—	2	—	—	—	1	—	3
hmen	3	1[1]	—	3	1	—	1	9[1]
hren	—	2	—	3	1[1]	—	—	6[1]
lesien	—	2	—	1	—	—	2	5
lizien	—	—	1	—	2	—	—	3
garn	3	4	4	4	3	3	—	21
benbürgen	—	—	1	—	—	—	—	1
atien und Slavonien	4	4	—	2	1	—	1	12
utsches Reich	—	—	—	1	2	—	—	3
lien	—	—	—	—	0[1]	—	—	0[1]
mänien	—	—	—	—	1	—	—	1
ssland	—	—	—	1	—	1	—	2
gland	1	—	—	—	—	—	—	1
Summe	59	58[1]	44	53[1]	50[2]	21[1]	18	303[5]

3. Muttersprache.								
utsch	52	55[1]	41	50[1]	47[1]	19[1]	17	281[5]
choslavisch	—	1	—	—	—	—	—	1
nisch	—	—	—	—	1	1	—	2
venisch	—	1	1	1	—	—	1	4
bo-Croatisch	3	1	—	—	—	—	—	4
garisch	2	—	2	2	2	1	—	9
ienisch	1	—	—	—	—	—	—	1
glisch	1	—	—	—	—	—	—	1
Summe	59	58[1]	44	53[1]	50[2]	21[1]	18	303[5]

	Klasse							Zu sam
	I	II	III	IV	V	VI	VII	
4. Religionsbekenntnis.								
Katholisch des lateinischen Ritus	52	55[1]	36	40[1]	43[2]	19[1]	16	2
Griechisch-orientalisch	1	—	—	—	—	—	—	
Evangelisch Augsburg. Confession	—	2	2	6	5	—	1	
Evangelisch Helvet. Confession	2	—	—	2	—	—	—	
Anglikanisch	1	—	—	—	—	—	—	
Israelitisch	3	1	6	5	2	2	1	
Summe	59	58[1]	44	53[1]	50[2]	21[1]	18	3
5. Lebensalter.								
11 Jahre	12	—	—	—	—	—	—	
12 „	25	7	—	—	—	—	—	
13 „	15	17	8	—	—	—	—	
14 „	6	25[1]	15	10	—	—	—	
15 „	—	6	11	18[1]	4	—	—	
16 „	1	3	5	13	16[1]	—	—	
17 „	—	—	3	8	18[1]	9	3	
18 „	—	—	1	1	8	8	4	
19 „	—	—	1	3	3	2[1]	7	
20 „	—	—	—	—	1	1	1	
21 „	—	—	—	—	—	1	3	
Summe	59	58[1]	44	53[1]	50[2]	21[1]	18	3
6. Nach dem Wohnorte der Eltern.								
Ortsangehörige	47	40	34	37	26[2]	15[1]	13	2
Auswärtige	12	18[1]	10	16[1]	24	6	5	
Summe	59	58[1]	44	53[1]	50[2]	21[1]	18	3
7. Classification.								
a) **Zu Ende des Schuljahres 1885/6**								
I. Fortgangsclasse mit Vorzug	5	8	10	10	5	5	4	
I. „	43	43[1]	27	37[1]	39	13[1]	14	
Zu einer Wiederhol.-Prüfg. zugelass.	6	4	5	5	6	3	—	
II. Fortgangsclasse	5	2	1	1	—	—	—	
III. „	—	—	—	—	—	—	—	
Zu einer Nachtragsprüfung krankheitshalber zugelassen	—	1	1	—	0[2]	—	—	
Summe	59	58[1]	44	53[1]	50[2]	21[1]	18	

b) **Nachtrag zum Schuljahre 1884/5**

	Klasse							Zu-sammen
	I	II	III	IV	V	VI	VII	
iederhol.-Prüfung. waren bewilligt	4	6	5	10	4	3	3	35
Entsprochen haben	4	6	4	7	4	1	1	27
Nicht entsprochen haben (oder nicht erschienen sind)	—	—	1	3	—	2	2	8
achtrags-Prüfung. waren bewilligt	—	—	2	1	—	—	—	3
Entsprochen haben . . .	—	—	2	1	—	—	—	3
Nicht entsprochen haben .	—	—	—	—	—	—	—	—
Nicht erschienen sind . .	—	—	—	—	—	—	—	—
arnach ist das Endergebnis für 1884/5								
I. Fortgangsclasse mit Vorzug	7	8	9	9	7	5	6	51
I. „	47	36	41	43	14[1]	15	17[1]	213[2]
II. „	3	8	3	6	6	6	5	37
III. „	1	1	—	—	—	1	—	3
ngeprüft blieben	—	—	—	—	—	—	—	—
Summe . .	58	53	53	58	27[1]	27	28[1]	304[2]

8. Geldleistungen der Schüler.

s Schulgeld zu zahlen waren verpflichtet:								
im 1. Semester	60	53[1]	30	36[1]	40[2]	14[1]	11[1]	244[6]
im 2. Semester	45	49[1]	27	36[1]	42[2]	15[1]	12	226[5]
nz befreit waren:								
im 1. Semester	—	9	17	16	11	8	9	70
im 2. Semester	14	9	18	17	8	6	8	80

s Schulgeld betrug im ganzen:
im 1. Semester . . 2638 fl.
im 2. Semester . . 2454 fl.
Zusammen . 5092 fl.

Aufnahmstaxen betrugen: 531 fl. 40 kr.

ten für Zeugnis-duplicate . 16 fl. — kr.

Summe . 547 fl. 40 kr.

9. Besuch des Unterrichts in den nichtobligaten Gegenständen.	Klasse I	II	III	IV	V	VI	VII	sam
Gesang: . . . . . 1. Abtheilung	15	7	2	—	—	—	—	
„ . . . . . 2. „	—	—	1	6	16	5	—	
Stenographie . . . . . 1. Curs	—	—	—	24	7	—	—	
„ . . . . . 2. „	—	—	—	—	8	2	—	
Modellieren	—	—	—	4	5	—	—	
Analytische Chemie	—	—	—	—	6	5	—	
Steiermärkische Geschichte	—	—	—	—	—	3	—	
10. Stipendien.								
Anzahl der Stipendisten	—	1	5	5	7	2	5	
Gesammtbetrag der Stipendien 3918 fl. 06 kr.								

XIII. Abschluss des Schuljahres 1885/86.

Samstag den 10. Juli 1886:

Um 8 Uhr. Dankamt in der k. k. Hof- und Domkirche.

Um 9 Uhr. Schlussfeier im grossen Saale der Landes-Oberrealschule

1. Chor, gesungen von Schülern der Lehranstalt.
2. Schlussrede, gesprochen von dem Abiturienten Karl Pichelma
3. Chor.
4. Vorlesung der Namen derjenigen Schüler, welche mit Vorzugs- erster Fortgangsklasse entsprochen haben.
5. Chor.
6. Schlussworte, gesprochen vom Director.
7. Volkshymne.

Am 12., 13. und 14. Juli 1886:

Maturitätsprüfung.

Durch ein Zeugnis der ersten Klasse mit Vorzug wurden ausgezeichnet:

In der I. Klasse.

ik Karl, aus Budapest in Ungarn.
es Bernhard, aus Agram in Croatien.
olze Hermann, aus Zara in Dalmatien.
wara Max, aus Schwechat in Nieder-Oesterreich.
ič Stefan, aus Sid in Slavonien.

In der II. Klasse.

y Alfred von, aus Russkberg in Ungarn.
edrich Oscar, aus Wien in Nieder-Oesterreich.
ch Karl, aus Graz in Steiermark.
chnigg Egon, aus Wolfsberg in Kärnten.
k von Traisenthal Adolf, aus Rudolfswerth in Krain.
enka Franz, aus Pošna in Böhmen.
ister Ludwig, aus Graz in Steiermark.
ypka Josef, aus Pettau in Steiermark.

In der III. Klasse.

ze Angelo, aus Graz in Steiermark.
: Alois, aus Bistritz in Siebenbürgen.
Rudolf, aus Graz in Steiermark.
r Ludwig, aus Marburg in Steiermark.
s Richard, aus Gleichenberg in Steiermark.
r Rudolf, aus Graz in Steiermark.
ner Karl, aus Maria-Grün bei Graz in Steiermark.
niša Julius, aus Ratschach in Krain.
hauer Anton, aus Graz in Steiermark.
iermann Karl, aus Graz in Steiermark.

In der IV. Klasse.

lsmann Rudolf, aus Budapest in Ungarn.
z Alfons, aus Marburg in Steiermark.
lrich Anton, aus Ilz in Steiermark.
r Rudolf, aus Graz in Steiermark.
dt Albert, aus Wien in Nieder-Oesterreich.

Hanke Richard, aus Judenburg in Steiermark.
Prettenhofer Heinrich, aus Graz in Steiermark.
Riedl Heinrich, aus Rumburg in Böhmen.
Schwarz Ludwig, aus Körmend in Ungarn.
Weber Anton, aus Fürstenfeld in Steiermark.

In der V. Klasse.

Ecker-Eckhofen Edgar, Freiherr, aus St. Gotthard bei Graz Steiermark.
Graf Arnold, aus Graz in Steiermark.
Jansky Emanuel, aus Wien in Nieder-Oesterreich.
Postuvanschitz Fritz, aus Graz in Steiermark.
Spannocchi Anton, Graf, aus Prag in Böhmen.

In der VI. Klasse.

Forcher Hugo, aus Karlovitz in Ungarn.
Heindl Franz, aus Graz in Steiermark.
Hemmelmayr Edler v. Augustenfeld Franz, aus Graz in Steierm
Popovič Wilhelm, aus Graz in Steiermark.
Siess Johann, aus Schwechat in Nieder-Oesterreich.

In der VII. Klasse.

Neubauer Alois, aus Waidhofen an der Ybbs in Nieder-Oesterreich.
Peitler Franz, aus Oberzeiring in Steiermark.
Pichelmayer Karl, aus Bärndorf bei Bruck a. d. Mur in Steiermar
Pogatschnigg Fritz, aus Ludwigsthal in Oesterreichisch-Schlesien.

V. Aufnahme der Schüler für das Schuljahr 1886/87.

Die Aufnahmsprüfungen zum Eintritt in die I. Klasse finden am 15., nd 17. Juli d. J. und für den Fall, als die gesetzlich zulässige Zahl ufzunehmenden Schülern bei diesen Prüfungen noch nicht erreicht sein , in einem zweiten Termine, und zwar am 16., 17. und 18. September statt. — In jedem dieser Termine wird über die Aufnahme definitiv hieden; eine Wiederholung der Aufnahmsprüfung, sei es an ein- und lben oder an einer anderen Lehranstalt, ist unzulässig.

Die Anmeldungen für den Julitermin werden bei der unterzeichneten tion (Realschulgasse Nr. 3) am 9. und 10. Juli Nachmittags von 3 bis r und für den Septembertermin am 15. September Vormittag von 12 Uhr entgegengenommen; die Aufnahmswerber haben ihren Geburts- , sowie, wenn sie früher eine Volksschule besuchten, das Frequen- szeugnis oder die in entsprechender Form ausgestellten „Schulnach- en" derselben vorzulegen. Nur solche Schulnachrichten werden als in rechender Form ausgestellt betrachtet, in welchen sämmtliche Zweige prachunterrichtes und das Rechnen in Verbindung mit der geometrischen enlehre unter je eine Rubrik gebracht und diese beiden Lehrgegen- e mit je einer einzigen Note classificiert erscheinen. Bei der Aufnahms- ng werden folgende Anforderungen gestellt:

Jenes Mass von Wissen in der Religion, welches in den ersten vier scursen der Volksschulen erworben werden kann, Fertigkeit im Lesen Schreiben der deutschen Sprache in deutscher und lateinischer Schrift, nis der Elemente aus der Formenlehre der deutschen Sprache, Fertig- m Analysiren einfacher bekleideter Sätze, Bekanntschaft mit den Regeln rthographie und richtige Anwendung derselben bei Dictandoschreiben, ig in den Grundrechnungsarten in ganzen Zahlen.

Die Aufnahme in die 2. bis 7. Klasse findet am 17. September Vor- gs zwischen 9 und 12 Uhr für diejenigen Schüler statt, welche im ahre (1885/86) bereits diese Schule besuchten; Schüler fremder Lehr- ten haben sich zur Aufnahme in die 2. bis 7. Klasse dieser Landes- alschule am 17. September 1886 Nachmittag zwischen 3 und 5 Uhr nzumelden.

Schüler, die von anderen Lehranstalten in die 2. oder eine höhere der steierm. Landes-Oberrealschule übertreten wollen, müssen ihren tsschein und ihr letztes Studien-Zeugnis mit der Abmeldungsklausel eite der zuletzt besuchten Lehranstalt versehen, beibringen, und haben wenn dieses über ihre Befähigung für eine bestimmte Klasse nicht nde Beruhigung gewährt, einer Aufnahmsprüfung zu unterziehen. Für ollständige Aufnahmsprüfung sind 12 fl. zu bezahlen, für Prüfungen nzelnen Fächern ist keine Taxe zu entrichten.

Für Privatisten gelten bezüglich der Aufnahme dieselben Bestimmun wie für die öffentlichen Schüler.

Alle neu eintretenden Schüler sind von ihren Eltern oder deren S vertretern vorzustellen.

Die Aufnahmsprüfungen in die 2. oder eine höhere Klasse finden 18. und 19. September statt.

Am 18. und 19. September werden auch die nachträglichen und derholungs-Prüfungen abgehalten.

Bei der Anmeldung zur Aufnahme hat jeder Schüler die Einsch gebühr mit 2 fl. 10 kr. und das Tintengeld mit 40 kr. ö. W. zu entrich welche beide denjenigen Schülern, welche die Aufnahmsprüfung nicht besta haben, zurückgestellt werden.

Das Unterrichtsgeld beträgt an den vier unteren Klassen jährlich 2 an den drei oberen Klassen jährlich 24 fl., und ist für das erste Sem in der ersten Woche des Monates November, für das zweite Semester in ersten Woche des Monates April bei der Direction zu erlegen. (In Falle, als der h. steierm. Landes-Ausschuss die Erhöhung des Schulg in ähnlicher Weise, wie es bereits bei den Staatsanstalten erfolgt beschliessen sollte, so würde dasselbe ohne Unterschied für jeden vor Entrichtung desselben nicht befreiten Schüler 20 fl. pro Semester betra Privatisten haben überdies für jede Semestral-Prüfung ein Honorar von zu entrichten.

Arme Schüler, welche sich über ihre Mittellosigkeit durch ein le Dürftigkeits-Zeugnis ausweisen können, im letzten Semester ein Stu zeugnis mit Vorzugs- oder mit „erster“ Fortgangsklasse, in den Sitte Note „lobenswerth“ oder „befriedigend“ und im Fleisse die Note dauernd“ oder „befriedigend“ erhielten, können von der Entrichtung Unterrichtsgeldes befreit werden. Die Befreiung vom Unterrichts schliesst auch jene von der Aufnahmstaxe in sich; jedoch können die S der I. Klasse im ersten Semester von der Entrichtung des Unterrichts und der Aufnahmstaxe nicht befreit werden. Ebenso haben alle S ohne Ausnahme als Tintengeld jährlich 40 kr. ö. W. zu bezahlen.

Das Schuljahr wird am 18. September um 8 Uhr mit dem heil. amte eröffnet, dem alle katholischen Schüler beizuwohnen haben; nach selben haben sich sämmtliche Schüler in ihren Lehrzimmern einzufinde ihnen durch die Herren Klassenvorstände die Disciplinargesetze, das bücherverzeichnis, die Stundeneintheilung u. s. w. bekannt gegeben w

Graz, am 8. Juli 1886.

Direction der Landes-Oberrealsc

Dr. Franz Ilwof,
Director.

Verzeichnis

in den Jahresberichten der Landes-Oberrealschule*) in Graz von 1852/53 bis 1885/6 erschienenen Abhandlungen.

52. Erschien ohne Abhandlung.

53. Zur Lehre vom Dreiecke mit dem umschriebenen Kreise und den berührenden Kreisen. Von Johann Rogner (1886 gest. als o. ö. Professor an der k. k. technischen Hochschule in Graz).

54. Der Nibelungen Klage, zum Gebrauche in der Schule übertragen von Franz Ostfeller (Professor dieser Lehranstalt bis 1869, dann i. R., gest. 1882).

Uebungsaufgaben über die Anwendung der Lehre vom Maximum und Minimum auf die Kegelschnittslinie und die Theorie der ebenen Curven überhaupt. Von Johann Rogner.

55. Einfache Anmerkungen zur Zahlenlehre. Einige allgemeine Eigenschaften der Theilbarkeit der Zahlen in Bezug auf was immer für ein Zahlensystem entwickelt von Johann Rogner.

Uebersicht der Mineralwässer und einfachen Mineralien Steiermarks. Von Dr. Benedict Kopetzky (gest. als Director des Mariahilfer C. Real- und Obergymnasiums in Wien).

56. Beiträge zur Geschichte der Alpen- und Donauländer. I. Ueber die ältesten Bewohner Noricums. Von Dr. Franz Ilwof (jetzt Director dieser Lehranstalt).

57. Mathematisches: A) Uebungen in der Analysis, für Schüler am Schlusse des Studienjahres. B) Beweise zu vier, von Dr. Lilienthal, Director des Realgymnasiums zu Rössel, bekanntgegebenen Sätzen über das rechtwinkelige Dreieck. C) Historische Skizze vom Kreise als Curve von der Eigenschaft, dass der Quotient der Entfernungen eines jeden ihrer Puncte von zwei gegebenen Puncten eine constante gegebene Grösse sei. Von Johann Rogner.

Beiträge zur Geschichte der Donau- und Alpenländer. II. Rätien und Vindelicien vor ihrer Eroberung durch die Römer. Von Dr. Franz Ilwof.

58 Physikalische Abhandlungen. I. Ueber die Bildungsmomente des physikalischen Studiums. II. Zur Geschichte der Physik. Die Kindheit der Optik. Von Dr. Eugen Netoliczka (Professor dieser Lehranstalt bis 1883, jetzt i. R.).

59. Ueber künstliche Brennstoffe. Von Max Buchner (Professor dieser Lehranstalt und a. o. Profesor an der k. k. technischen Hochschule in Graz).

Thierwanderungen. Von Josef Gobanz (jetzt k. k. Landesschulinspector in Klagenfurt.)

60. Ueber den Zeichnungsunterricht im allgemeinen und an Realschulen insbesondere. Von Vincenz Chocholoušek (gest. 1871 als Professor dieser Lehranstalt).

61. Die landwirtschaftlichen Gebäude in Steiermark. Von Josef Hanke (gest. 1879 als Director der Landesbürgerschule in Graz).

62. Die Stenographie als Schriftsprache. Von Dr. Heinrich Posener (jetzt k. k. Hof- und Gerichtsadvocat in Graz).

63. Ueber Kometenerscheinungen. Von Dr. Eugen Netoliczka

64. Bemerkungen über den Unterricht im Freihandzeichnen an Real- und Gewerbeschulen. Von Wenzel Podrazil (Professor dieser Lehranstalt).

65. Zur Geschichte der Physik. Ueber die ältesten Bestrebungen in der Akustik. Von Dr. Eugen Netoliczka.

66. Die nominale Flexion des Adjectivs im Alt- und Neuslovenischen. Von Dr. Gregor Krek (jetzt o. ö. Professor an der k. k. Karl Franzens-Universität in Graz).

67. Ueber Torquato Tasso. Ein populärer Vortrag. Von Jakob Botteri (Professor dieser Lehranstalt bis 1885, jetzt i. R).

Ueber unterseeische Telegraphenkabel. Von Professor Dr. Eugen Netoliczka.

68. Geschichte der Elektricität bis zur Entdeckung des Galvanismus. Von Professor Dr. Eugen Netoliczka.

69. Ueber die Wichtigkeit der slavischen traditionellen Literatur als Quelle der Mythologie. Von Dr. Gregor Krek.

---

*) 1845—1861 Steiermärkisch-ständische Oberrealschule.

1869/70. Die Neugestaltung des deutschen Nationalepos. Von Dr. Hans v. Zwiedine Südenhorst (jetzt Vorstand der Landes-Bibliothek am steierm. Joanneum a. o. Universitäts-Professor in Graz.)

1870/71. Der gegenwärtige Standpunkt der Infusorienkunde mit Berücksichtigung jüngsten Forschungsresultate (I. Theil), dargestellt von Dr. Eduard Hoffer (P dieser Lehranstalt).

1871/72. Der gegenwärtige Standpunkt der Infusorienkunde mit Berücksichtigung jüngsten Forschungsresultate (II. Theil), dargestellt von Dr. Eduard Hoffer.

1872/73. Zeitungen und Flugschriften aus der ersten Hälfte des 17. Jahrhunde I. Sammlung aus den Bibliotheken der Karl Franzens-Universität, des st. land Joanneums und aus dem steierm. Landesarchive von Dr. Hans von Zwiedine Südenhorst.

1873/1874. Beitrag zur geometrischen Symmetrie-Lehre und zur constructiven Theorie Ecke. Von Professor Karl Moshammer (jetzt Professor an der k. k. Sta Gewerbeschule zu Reichenberg).

1874/75. Ueber den Ursprung, das Alter und den Gang der Entwicklungsgeschichte Menschengeschlechtes. Eine anthropologische Skizze von Prof. Dr. Eduard Hof

Nordamerikanische Steinwerkzeuge. Von Charles Rau. Aus dem „Annual Re of the Smithsonian Institution for the year 1872", in das Deutsche übertragen Professor Josef Philibert Baron v. Lazarini (Professor dieser Anstalt bis 1 jetzt i. R.)

1875/76. Ueber einige Arbeiten auf dem Gebiete der Elektricitätstheorie. Von Fr Hauptmann (jetzt Professor an der k. k. Lehrerbildungsanstalt in Graz).

1876/77. Emploi de l'Infinitif dans la Syntaxe française. Par J. O. Fetter (Director der k. k. Staatsunterrealschule im II. Bezirke in Wien).

1877/78. Beiträge zur Bestimmung der Selbst- und Schlagschattengrenzen von Flä zweiten Grades bei Centralbeleuchtung. Von Carl Pelz (jetzt o. ö. Professo der k. k. technischen Hochschule in Graz).

1878/79. Festreden und Festgedicht, gesprochen bei der aus Anlass der silbernen Hoc Ihrer k. und k. Majestäten am 24. April 1879 von den Landes-Lehranst (L.-Zeichen-Akademie, L.-Ober-Realschule, L.-Bürgerschule), im Landtagssale anstalteten Feier. Von Director Dr. Franz Ilwof, Prof. Dr. Hans v. Zwiedin Südenhorst und Prof. Dr. Eugen Netoliczka.

Untersuchungen über Farbenblindheit und Kurzsichtigkeit. Von Prof. Dr. Eu Netoliczka.

1879/80. Untersuchungen über Farbenblindheit und Kurzsichtigkeit. Zweiter Theil. Prof. Dr. Eugen Netoliczka.

1880/81. Untersuchungen über Farbenblindheit und Kurzsichtigkeit an den Grazer M schulen. Dritter Theil. Von Prof. Dr. Eugen Netoliczka.

Skizzen aus dem naturhistorischen Museum. Von Prof. Dr. Eduard Ho

1881/82. Die Hummeln Steiermarks. Lebensgeschichte und Beschreibung derselben. Hälfte. Von Prof. Dr. Eduard Hoffer.

1882/83. Die Jubelfeier der sechshundertjährigen Herrschaft des Hauses Habsbu Steiermark und Seiner k. k. Apostolischen Majestät Kaiser Franz Josef I. Besuch in der Landes-Oberrealschule zu Graz am 4. Juli 1883. Von Directo Franz Ilwof.

Die Hummeln Steiermarks. Lebensgeschichte und Beschreibung derselben. Z Hälfte. Von Prof. Dr. Eduard Hoffer.

1883/84. Zur Volksetymologie. Nachträge und Bemerkungen zu Andresen's und Pal volksetymologischen Schriften. Von Professor Alois Pogatscher (Professor Lehranstalt).

1884/85. Shakspere's „Pericles" und George Lilo's „Marina". Von Dr. Paul v. mann-Wellenhof (Professor dieser Lehranstalt).

1885/86. Die Gedenkfeier der Landes-Oberrealschule in Graz zur Erinnerung an Eröffnung vor vierzig Jahren (2. October 1845 bis 2. October 1885).

Anwendung der Differentialgleichungen 1. Ordnung und *n*. Grades auf metrische Beispiele mit besonderer Berücksichtigung der singulären Lösungen Prof. Adalbert Deschmann.

Überreicht
vom
Verleger

Repetitorium

der

Differential-

und

ntegralrechnung.

Von

Chr. G. Joh. Deter,
Dr. phil.

Zweite Auflage.

Berlin, 1892.
Verlag von Max Rockenstein.
SW., Hallesche Straße 4.

Erster Abschnitt.

Ableitung der Differentialformeln.

§ 1. Die höhere Analysis betrachtet solche Funktionen, denen veränderliche Größen mit konstanten so verbunden sind, in Folge der Veränderung der einen Veränderlichen auch die ere Veränderliche sich ändert. Eine Veränderliche kann sich diskret oder stetig ändern. Die durch diskrete Aenderung r Veränderlichen hervorgerufene Aenderung der von dieser änderlichen abhängigen Veränderlichen behandelt die Differenzenrechnung; die Gesetze, denen stetig sich ändernde ßen unterworfen sind, behandelt die Differentialrechnung.

Die Differentialrechnung wurde gleichzeitig von Leibnitz und Newton erfunden, und von Euler, Kästner, Lagrange, Cauchy ꝛc. weiter ausgebildet.

§ 2. Wenn in den „einfachen Funktionen"

$= x^n$	die Größe x um das unendlich kleine dx
$= a^x$	vermehrt wird, so läßt sich leicht bestim-
$= \lg x$	men, wie vielmal so groß die Aenderung
$= \sin x$	dy der Funktion ist.
$= \cos x$	

1. Ist $y = x^n$, so ist $y + dy = x^n + n\,x^{n-1}\,dx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\,x^{n-2}dx^2 \ldots$.

Da nun jede höhere Potenz von dx, als verschwindend gegen die niederen, fortfällt, so ist $dy = n \,.\, x^{n-1} \,.\, dx$.

Hierin heißt nx^{n-1} „Der Differentialkoefficient" oder „D
ferentialquotient" oder „derivirte Funktion" von x^n.

Anmerk. Ist $y = ax^n \pm c$, so findet sich
$dy = anx^{n-1} \cdot dx$. Der Differentialquotient ist also
dem konstanten Gliede $\pm c$ ganz unabhängig. (**Das Differential e
konstanten Größe ist o.**)

Beispiele.

$y = 3x^4 + 5$	$dy = 12x^3 \cdot dx$
$y = \frac{2}{3}x^{12} - 7$	$dy = 8x^{11} \cdot dx$
$y = \sqrt[4]{x^3}$	$dy = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}} \cdot dx$
$y = \frac{a}{\sqrt[3]{x}}$	$dy = -\frac{a}{3x\sqrt[3]{x}} \cdot dx.$

2. Ist $y = \lg x$*), so ist $y + dy = \lg(x + dx)$

$$= \lg x\left(1 + \frac{dx}{x}\right)$$

$$= \lg x + \lg\left(1 + \frac{dx}{x}\right)$$

$$= \lg x + \frac{dx}{x} - \frac{dx^2}{2x^2} +$$

daher $dy = \frac{1}{x} \cdot dx.$

Anmerk. Ist $y = \log x$, so ist $dy = \frac{M}{x} \cdot dx$, worin M der Modu
Briggs'schen Systems ist.

3. Ist $y = a^x$, so ist $y + dy = a^{x+dx} = a^x \cdot a^{dx}$

$$= a^x(1 + \lg a \,.\, dx +$$

$$\left[\frac{(\lg a \,.\, dx}{1 \,.\, 2}\right.$$

daher $dy = a^x \lg a \,.\, dx.$

Anmerk. Ist $y = e^x$, so ist $dy = e^x \cdot dx$.

---

*) lg bezeichnet den natürlichen, log den Briggs'schen Logarithm

4. Ist $y = \sin x$, so ist $y + dy = \sin x \cdot \cos dx + \cos x \cdot \sin dx$.

$$= \sin x \left(1 - \frac{dx^2}{1 \cdot 2} + \dots\right) +$$

$$\cos x \left(dx - \frac{dx^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdots\right)$$

daher $dy = \cos x \,.\, dx$.

5. Ist $y = \cos x$, so ist

$y + dy = \cos x \,.\, \cos dx - \sin x \,.\, \sin dx$.

$$= \cos x \left(1 - \frac{dx^2}{1 \cdot 2} \cdots\right)$$

$$- \sin x \left(dx - \frac{dx^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdots\right)$$

daher $dy = -\sin x \,.\, dx$.

§ 3. Das Differential der Summe einfacher Funktionen e Summe der Differentiale dieser Funktionen.

Bew. Ist $y = f(x) + F(x)$, so ist
$y + dy = f(x) + df(x) + F(x) + d\,F(x)$ daher
$dy = df(x) + dF(x)$.

Beispiele.

$y = ax^n + a^x$	$dy = (anx^{n-1} + a^x \lg a) \cdot dx$
$y = ax^n + e^x$	$dy = (anx^{n-1} + e^x) \cdot dx$
$y = x^3 - 2x^2 + 3x + 4$	$dy = (3x^2 - 4x + 3) \cdot dx$
$y = 3\sqrt{x} - 5\sqrt[3]{x^4}$	$dy = \left(\frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{20}{3}\sqrt[3]{x}\right) \cdot dx$
$y = a \lg x + b \sin x$	$dy = \left(\frac{a}{x} + b \cos x\right) \cdot dx$
$y = a^x + b \cos x + c$	$dy = (a^x \lg a - b \sin x)\, dx$.

§ 4. Das Differential des Produktes zweier einfachen tionen ist die Summe der mit dem anderen Faktor mul- irten Differentiale der anderen Faktoren.

Bew. Ist $y = fx \cdot Fx$, so ist $y + dy = (fx + dfx)\,(Fx + dFx)$, daher $Fx \cdot dfx + fx \cdot dFx$.

Beispiele.

$y = x^5 \cdot e^x$	$dy = (5x^4\, e^x + x^5\, e^x)\, dx$
$y = ax^7 \cdot \lg x$	$dy = (7ax^6 \lg x + ax^6)\, dx$
$y = a^x \cdot \lg x$	$dy = \left(a^x \lg a \lg x + \frac{a^x}{x}\right) dx$
$y = ae^x \cdot \lg x$	$dy = ae^x \left(\lg x + \frac{1}{x}\right) dx$
$y = x^4 \cdot \sin x$	$dy = (4x^3 \sin x + x^4 \cos x)\, dx$
$y = 2 \sin x \cdot \cos x$	$dy = 2 (\cos^2 x - \sin^2 x)\, dx = 2 \cos 2x \cdot dx.$
$y = x^n \cdot e^x \cdot \lg x$	$dy = x^{n-1} e^x\, (n \lg x + x \lg x + 1)\, dx$
$y = x^n \cdot \sin x \cdot \cos x$	$dy = \left(\frac{n}{2} x^{n-1} \sin 2x + x^n \cos 2x\right) dx$
$y = x^7 \cdot x^5 \cdot x^3$	$dy = [x^8 \cdot 7x^6 + x^7 (5x^7 + 3x^7)]\, dx = 15x^{14}$

§ 5. Das Differential des Quotienten zweier ein Funktionen wird erhalten, wenn man den Nenner mi Differentiale des Zählers multiplicirt, hiervon den Zähle dem Differentiale des Nenners subtrahirt und die erh Differenz durch das Quadrat des Nenners dividirt.

Bew. Ist $y = \frac{fx}{Fx}$, so ist $y \cdot Fx = fx$, daher

$$Fx \cdot dy + y \cdot dFx = dfx$$

$$dy = \frac{dfx - y \cdot dFx}{Fx}$$

$$= \frac{dfx - \frac{fx}{Fx} \cdot dFx}{Fx}$$

$$= \frac{dfx \cdot Fx - fx \cdot dFx}{(Fx)^2}$$

Beispiele.

$y = \frac{a^x}{x^n}$	$dy = \frac{a^x (x \lg a - a)}{x^{n+1}} \cdot dx$
$y = \frac{e^x}{x^n}$	$dy = \frac{e^x (x - n)}{x^{n+1}} \cdot dx$
$y = \frac{x}{\lg x}$	$dy = \frac{\lg x - 1}{(\lg x)^2} \cdot dx$
$y = \frac{a}{x^n}$	$dy = -\frac{an}{x^{n+1}} \cdot dx$

$$y = \frac{a^x}{\sin x} \quad \Big| \quad dy = \frac{\sin x \cdot a^x \lg x - a^x \cos x}{\sin^2 x} \cdot dx$$

$$y = \frac{a^x}{\cos x} \quad \Big| \quad dy = \frac{\cos x \cdot a^x \lg x + a^x \sin x}{\cos^2 x} \cdot dx$$

§ 6. Aufgabe. Welches sind die Differentiale von tang x cotg x?

Lösung. $d \operatorname{tang} x = d \frac{\sin x}{\cos x}$

$$= \frac{\cos^2 x\, dx + \sin^2 x\, dx}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx.$$ Ebenso findet man

$$d \operatorname{cotg} x = -\frac{1}{\sin^2 x} \cdot dx$$

§ 7. Aufgabe. Welches sind die Differentiale von (sin = x), arc (cos = x), arc (tang = x), arc (cotg = x)?

Lösung. Ist $x = \sin y$, also $y = \mathbf{arc\,(sin = x)}$, so ist

$$dx = \cos y \cdot dy, \text{ also } dy = \frac{1}{\cos y} \cdot dx \text{ oder}$$

$$d \operatorname{arc}(\sin = x), = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx.$$

Ist $x = \cos y$, also $y = \mathbf{arc\,(cos = x)}$, so ist

$$dx = -\sin y \cdot dy, \text{ also } dy = -\frac{1}{\sin y} \cdot dx \text{ oder}$$

$$d \operatorname{arc}(\cos = x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx.$$

Ist $x = \operatorname{tang} y$, also $y = \mathbf{arc\,(tang = x)}$, so ist

$$dx = \frac{1}{\cos^2 y} \cdot dy, \text{ also } dy = \cos^2 y \cdot dx \text{ oder}$$

$$d \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = x) = \frac{1}{1 + x^2} \cdot dx.$$

Ist $x = \operatorname{cotg} y$, also $y = \mathbf{arc\,(cotg = x)}$, so ist

$$dx = -\frac{1}{\sin^2 y} \cdot dy, \text{ also } dy = -\sin^2 y \cdot dx \text{ oder}$$

$$d \operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = x) = -\frac{1}{1 + x^2} \cdot dx.$$

§ 8. Zusammenstellung der bisher gefundenen Differentialformeln.

1.	$dx^n = nx^{n+1} \cdot dx.$
2.	$d \lg x = \frac{1}{x} \cdot dx$
3.	$d \log x = \frac{M}{x} \cdot dx$
4.	$d a^x = a^x \lg x \,.\, dx$
5.	$d e^x = e^x \,.\, dx$
6.	$d(f \pm F) = df \pm dF$
7.	$d(f \,.\, F) = F \,.\, df + f \,.\, dF$
8.	$d \frac{f}{F} = \frac{F \cdot df - f \cdot dF}{F^2}$
9.	$d \sin x = \cos x \,.\, dx$
10.	$d \cos x = -\sin x \,.\, dx$
11.	$d \operatorname{tang} x = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx$
12.	$d \operatorname{cotg} x = -\frac{1}{\sin^2 x} \,.\, dx$
13.	$d \operatorname{arc}(\sin = x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,.\, dx$
14.	$d \operatorname{arc}(\cos = x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,.\, dx$
15.	$d \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = x) = \frac{1}{1+x^2} \,.\, dx$
16.	$d \operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = x) = -\frac{1}{1+x^2} dx.$

§ 9. Aufgabe. Welches ist das Differential einer Funk- von einer Funktion von x?

Lösung. Ist $z = fy$ und $y = \varphi x$, und wächst x um dx, so wächst y dy und in Folge dessen z um dz.

Nun ist $z + dz = f(y + dy) = fy + f'y \cdot dy$, daher

$$dz = f'y \cdot dy$$
$$= f'y \cdot \varphi' x \, dx.$$

Man findet daher das Differential einer Funktion f_x, worin ine Funktion φ_x von x ist, indem man f_y erst nach y dif- ntiirt und für y und dy ihre Werthe φ_x und $\varphi'_x . dx$ sub- irt.

Beispiele.

1) $z = e^y$, worin $y = \sin x$.

$$dz = e^y \cdot dy$$
$$= e^{\sin x} \cdot \cos x \cdot dx.$$

2) $z = e^y$, worin $y = a\sqrt[3]{x^2} + b\sqrt[6]{x^5}$.

$$dz = e^y \cdot dy$$
$$= e^{ax^{\frac{2}{3}} - bx^{\frac{5}{6}}} \cdot (\tfrac{2}{3}ax^{-\frac{1}{3}} + \tfrac{5}{6}bx^{-\frac{1}{6}}).$$

3) $z = y^{\frac{1}{2}}$, worin $y = a + 2x - 3x^2$.

$$dz = \tfrac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} \cdot dy$$
$$= \tfrac{1}{2}(a + 2x - 3x^2) \cdot (2 - 6x)dx.$$

4) $z = \lg y$, worin $y = 4x^7 + 5\cos x$.

$$dz = \frac{1}{y} \cdot dy$$
$$= \frac{1}{4x^7 + 5\cos x} \cdot (28x^6 - 5\sin x)dx.$$

5) $z = y^3$, worin $y = \sin x$.

$$dz = 3y^2 dy$$
$$= 3\sin^2 x \cdot \cos x \, dx$$

6) $z = \text{arc}(\sin = y)$, worin $y = \sqrt{1 - 2x}$.

$$dz = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \cdot dy$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2x - 4x^2}} \cdot dx$$

7) $z = \sqrt{a+x} \cdot \sqrt[3]{a-x^2}$

$$dz = (a-x^2)^{\frac{1}{3}}\ d(a+x)^{\frac{1}{2}} + (a+x)^{\frac{1}{2}} \cdot d(a-x^2)^{\frac{1}{3}}$$

$$= (a-x^2)^{\frac{1}{3}} \cdot \tfrac{1}{2}(a+x)^{-\frac{1}{2}}\,dx + (a+x)^{\frac{1}{2}} \cdot \tfrac{1}{3}(a-x^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot -2x\,dx$$

$$= \frac{3a - 4ax - 7x^2}{6(a+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (a-x^2)^{\frac{2}{3}}} \cdot dx$$

8) $z = \dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x^2}}$

$$dz = \frac{3 - 4x - 3x^2}{6(1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1+x^2)^{\frac{2}{3}}} \cdot dx$$

Zuweilen wird das Differentiiren erleichtert, wenn man zuerst garithmirt, oder auch umgekehrt auf die Zahlen übergeht, wie in folge Beispielen:

9) $\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}}{\sqrt{1+x}}$.

Mittelst § 5 würde sich nach weitläufigem Rechnen ergeben:

$$dz = \frac{x^2 + 4x - 3}{6(1+x^2)^{\frac{2}{3}} \cdot (1+x)^{\frac{3}{2}}} \cdot dx$$

Dasselbe Resultat ergiebt sich leichter, wenn zuerst logarit wird:

$$\log z = \tfrac{1}{3}\lg(1+x^2) - \tfrac{1}{2}\lg(1+x)$$

$$\frac{1}{z}\,dz = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x\,dx - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot dx$$

$$dz = \frac{2x(1+x^2)^{\frac{1}{3}}}{3(1+x^2) \cdot (1+x)^{\frac{1}{2}}}\,dx - \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}}{2(1+x)(1+x)^{\frac{1}{2}}} \cdot dx$$

$$= \frac{4x(1+x) - 3(1+x^2)}{6(1+x^2)^{\frac{3}{3}} \cdot (1+x)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

10) $y = x^x$

$$\lg y = x \lg x$$

$$\frac{1}{y}\,dy = \lg x \cdot dx + \frac{x}{x}\,dx$$

$$dy = x^x\,(1 + \lg x)\,dx.$$

11) $z = \lg \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = ax.)$

$$e^z = \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = ax)$$

$$e^z \, dz = \frac{a}{1 + a^2 x^2} \cdot dx$$

$$dz = \frac{a}{(1 + a^2 x^2) \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = ax)} \cdot dx$$

Daſſelbe Reſultat hätte ſich umſtändlicher mittelſt § 8, Formel 2 und geben.

12) $z = \lg \operatorname{arc}\left(\operatorname{cotg} = \frac{a}{1+x}\right)$.

$$e^z = \operatorname{arc}\left(\operatorname{cotg} = \frac{a}{1+x}\right)$$

$$e^z \, dz = -\frac{1}{1 + \left(\frac{a}{1+x}\right)^2} d \, \frac{a}{1+x}$$

$$dz = \frac{a}{[a^2 + (1+x)^2] \operatorname{arc}\left(\operatorname{cotg} = \frac{a}{1+x}\right)} \cdot dx$$

Daſſelbe Reſultat hätte ſich umſtändlicher mittelſt § 8, Formel 2 und geben.

§ 10. Uebungsaufgaben.

1. $d(4ax^3 \sqrt{x}) = 14ax^5 dx$

2. $d\left(1 + \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} dx$

3. $d\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1 + 2x^2}{2x\sqrt{x}} dx$

4. $d(a+x)^n = n(a+x)^{n-1} dx$

5. $d(a-x)^7 = -7(a-x)^6 dx$

6. $d(a^2 - x^2)^7 = -14(a^2 - x^2)^6 x \cdot dx$

7. $d\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2} dx$

8. $$d\left(\frac{x}{1-x}\right)=\frac{1}{(1-x)^2}\,dx^*$$

9. $$d\left(\frac{1}{a+x^2}\right)=-\frac{2x}{(a+x^2)^2}\,dx$$

10. $$d\sqrt{1-x}=-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\,dx$$

11. $$d\sqrt{a^3+x^3}=\frac{x^2}{\sqrt[3]{(a^3+x^3)^2}}\,dx$$

12. $$d\sqrt[3]{a^4+x^4}=\frac{4x^3}{3\sqrt[3]{(a^4+x^4)^2}}\,dx$$

13. $$d\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=-\frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)^3}}\,dx$$

14. $$d\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}=-\frac{2x}{\sqrt{(1-x^2)(1+x^2)^3}}\,dx$$

15. $$d\lg(a+x)=\frac{1}{a+x}\,dx$$

16. $$d\lg(a+x\sqrt{x})=\frac{3\sqrt{x}}{2a+2x\sqrt{x}}\cdot dx$$

17. $$d\lg(x+x\sqrt{x})=\frac{1+\frac{3}{2}\sqrt{x}}{x+x\sqrt{x}}\cdot dx$$

18. $$d\lg(x^n)=\frac{n}{x}\,dx$$

19 $$d(\lg x)^n=\frac{n}{x}(\lg x)^{n-1}\,.\,dx$$

---

*) Dasselbe Differential, wie vorher, da die Funktionen $\frac{1}{1-}$ $\frac{x}{1-x}$ nur um ein konstantes Glied verschieden sind $\left(\frac{1}{1-x}=1+\frac{}{1}\right.$

20. $$d\ \lg \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{a^2}{x(a^2+x^2)} \cdot dx$$

21. $$d\ e^{\lg x} = \frac{e^{\lg x}}{x} . dx$$

22. $$d\ e^{(e^x)} = e^{(e^x-1)} . dx$$

23. $$d\ \lg\ \lg x = \frac{1}{x \lg x} . dx$$

24. $$d \lg\ \lg \lg x = \frac{1}{x \lg x . \lg \lg x} . dx$$

25. $$d\ \lg\ \sin x = \operatorname{cotg} x . dx$$

26. $$d\ \lg\ \cos x = -\operatorname{tang} x . dx$$

27. $$d\ \sin^3 x = 3 \sin^2 x . \cos x \cdot dx$$

28. $$d\ \cos^3 x = -3 \cos^2 x . \sin x \cdot dx$$

29. $$d(\sin^3 x - \cos^3 x) = \tfrac{3}{2} \sin 2x . (\sin x + \cos x) . dx$$

30. $$d(\sin^4 x - \cos^4 x) = 2 \sin\ 2x . dx$$

31. $$d(e^x \sin nx) = e^x (\sin nx + n \cos nx) . dx$$

32. $$d \sin 2x = 2 \cos 2x \cdot dx$$

$$d \cos 2x = -2 \sin 2x \cdot dx$$

$$d \operatorname{tang} 2x = \frac{2}{\cos^2 2x} \cdot dx$$

$$d \operatorname{cotg} 2x = -\frac{2}{\sin^2 2x} \cdot dx$$

33. $$d \arc\left(\sin = \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot dx$$

$$d \arc\left(\cos = \frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot dx$$

34. $$d \arc\left(\operatorname{tang} = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot dx$$

35. $$d\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = \frac{\sin x}{2\sqrt{2-2\cos x}} \cdot dx$$

36. $$d \lg \frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{2}{\sqrt{x^2-a^2}} \cdot dx.$$

Zweiter Abschnitt.

Höhere Differentiale. Maclaurin'scher und Taylorscher Satz.

§ 11. Wenn $f_x = x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + a^4$,

der erste Differentialquotient $\frac{df_x}{dx}$ oder $f^I x = 4x^3 + 12ax^2 + 12a^2x + 4$

der zweite Differ. $\frac{d^2f_x}{dx^2}$ oder $f^{II}{}_x = 12x^2 + 24ax + 12a^2$

der dritte " $\frac{d^3f_x}{dx^3}$ oder $f^{III}{}_x = 24x + 24a$

der vierte " $\frac{d^4f_x}{dx^4}$ oder $f^{IV}{}_x = 24.$

der fünfte " $\frac{d^5f}{dx^5}$ oder $f^V{}_x = 0.$

Wenn $f_x = \frac{1-x^4}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3$, so ist

$$\frac{df}{dx} \text{ oder } f^I = \frac{1-4x^3+3x^4}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} \text{ oder } f^{II} = \frac{2-12x^2-8x^3-6x^4}{(1-x)^3} = 2 + 6x$$

$$\frac{d^3f}{dx^3} \text{ oder } f^{III} = 6$$

$\frac{d^4f}{dx^4}$ oder f^{IV} $= 0.$

n $f_x = e^x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \ldots$, so ist

$\frac{df}{dx} = e^x$ und so alle folgenden Differentialquotienten $= e^x$.

n $f_x = \mathbf{arc\,(tang = x)} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \ldots$ so ist

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{1+x^2} = \mathbf{1 - x^2 + x^4 - x^6 + - \ldots}.$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = -2x + 4x^3 - 6x^5 + - \ldots \text{ oder}$$

$$\frac{1}{(1+x^2)^2} = \mathbf{1 - 2x^2 + 3x^4 - 4x^6 + - \ldots}.$$

Anmerk. Dieses letzte Beispiel zeigt, wie man durch fortgesetztes Diffe-iren summirbare Reihen sammt ihren Summen finden kann.

§ 13. **Maclaurinscher Satz.** Läßt sich eine f_x in eine Potenzen von x fortschreitende Reihe verwandeln, so ist, n in f_x und allen derivirten Funktionen $f^I{}_x$, $f^{II}{}_x$, $f^{III}{}_x$, ... o gesetzt wird,

$$\mathbf{f_x = f_{(o)} + f^I{}_{(o)}\,x + f_x{}^{II}{}_{(o)} \cdot \frac{x^2}{2!} + f^{III}{}_{(o)} \cdot \frac{x^3}{3!} + \ldots}.$$

Beweis. Wenn

$f_x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$, so ist
$f^I{}_x = B + 2Cx + 3Dx^2 + \ldots$
$f^{II}{}_x = 2C + 2\cdot3Dx + 3\cdot4Ex^2 + \ldots$
$f^{III}{}_x = 2\cdot3D + 2\cdot3\cdot4Ex + \ldots$
$f^{IV}{}_x = 2\cdot3\cdot4E + \ldots$

Wird in diesen Gleichungen $x = o$ gesetzt, so ergiebt sich
$f_{(o)} = \mathbf{A}$
$f^I{}_{(o} = \mathbf{B}$

$$f^{II}_{(o)} = 2C, \text{ daher } C = \frac{1}{2} f^{II}_{(o)}$$

$$f^{III}_{(o)} = 2 \cdot 3 D, \text{ daher } D = \frac{1}{3!} f^{III}_{(o)}$$

$$f^{IV}_{(o)} = 2 \cdot 3 \cdot 4 E, \text{ daher } E = \frac{1}{4!} f^{IV}_{(o)} \text{ ꝛc.}$$

Beispiele:

$$\sin(a + bx) = \sin a + b \cos a \cdot x - \frac{b^2 \sin a}{2!} x^2 - \frac{b^3 \cos a}{3!} x^3 + + - - \cdots$$

$$\cos(a + bx) = \cos a - b \sin a \cdot x - \frac{b^2 \cos a}{2!} x^2 + \frac{b^3 \sin a}{3!} x^3 + - - \cdots$$

§ 14. **Taylorscher Satz.** Wenn in einer f_x die V
änderliche x um $\triangle x$ wächst, so läßt sich $f_{x+\triangle x}$ als eine Reihe d
stellen, deren Glieder nach Potenzen von x fortschreiten, näm

$$f_{x+\triangle x} = f_x + f^{I}_x \cdot \triangle x + f^{II}_x \cdot \frac{\triangle x^2}{2!} + f^{III}_x \cdot \frac{\triangle x^3}{3!} + \cdots$$

Beweis. Sei $f_{x+\triangle x}$ = der Reihe $f_x + A \cdot \triangle x + B \cdot \triangle x^2 + C \cdot$
$+ \cdots$

Für jede Funktion von $(x + y)$ sind die Differentialquotienten dieser
möge man nach x oder nach y differentiiren; z. B.
$z = (x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ giebt nach x differentiirt:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = 3x^2 + 6xy + 3y^2.$$

nach y differentirt: $\left(\frac{dz}{dy}\right) = 3x^2 + 6xy + 3y^2$]. Wird nun die Reihe
$f_x + A \cdot \triangle x + B \cdot \triangle x^2 + C \cdot \triangle x^3 + \cdots$ nach x differentiirt, so ergieb

$$f'_x + \left(\frac{dA}{dx}\right) \cdot \triangle x + \left(\frac{dB}{dx}\right) \cdot \triangle x^2 + \left(\frac{dC}{dx}\right) \cdot \triangle x^3 + \cdots;$$

wird sie nach $\triangle x$ differentiirt, so ergiebt sich

$$A + 2B \cdot \triangle x + 3C \cdot \triangle x^2 + 4D \cdot \triangle x^3 + \cdots$$

Beide Ausdrücke müssen für jeden Werth von $\triangle x$ einander
sein, daher

$$A = f'_x$$

$$2B = \frac{df'x}{dx} = f''_x, \text{ daher } B = \frac{f''x}{2!}$$

$$3C = \frac{d\,f''x}{2!\,dx} = \frac{f'''x}{2!} \text{ daher } C = \frac{f'''x}{3!} \text{ ꝛc.}$$

Anmerk. Setzt man in

$$f_{x+\Delta x} = f_x + f' \cdot \Delta x + f'' \cdot \frac{\Delta x^2}{2!} + f''' \cdot \frac{\Delta x^3}{3!} + \ldots.$$

$x = o$ und $\Delta x = x$, so erhält man für f_x die Maclaurinsche Reihe

$$f_{(o)} + f'_{(o)} \cdot x + f''_{(o)} \cdot \frac{x^2}{2!} + f'''_{(o)} \cdot \frac{x^3}{3!} + \ldots..$$

§ 15. In der Taylorschen Reihe läßt sich das Inkrement stets so klein annehmen, daß $f^I{}_x \cdot \Delta x$ größer wird, als Summe aller übrigen Glieder. Soll nämlich

$$f^I{}_x \cdot \Delta x > f^{II} \cdot \frac{\Delta x^2}{2!} + f^{III} \cdot \frac{\Delta x^3}{3!} + \ldots. \text{ oder}$$

$$f^I{}_x > \left(\frac{f^{II}}{2!} + f^{III} \cdot \frac{\Delta x}{3!} + \ldots.\right) \Delta x \text{ sein,}$$

ist dies offenbar dann der Fall, wenn

$$f^I{}_x > p\,(1 + \Delta x + \Delta x^2 + \ldots.)\,\Delta x,$$

p den größten Koefficienten der Potenzen von Δx bezeichnet; wenn also

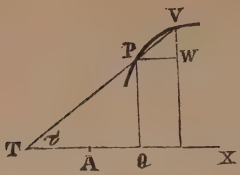
$$\frac{f^I}{p} > (1 + \Delta x + \Delta x^2 + \ldots.)\,\Delta x \text{ oder}$$

$$\frac{f^I}{p} > \frac{1 - (\Delta x)^n}{1 - \Delta x} \cdot \Delta x \text{ oder}$$

$$\text{wenn } \frac{\Delta x}{1 - \Delta x} < \frac{f^I}{p}, \text{ also wenn } \Delta x < \frac{f^I}{p + f^I}.$$

Bei unendlich kleinem Zuwachse dx der Veränderlichen x so also f_x wachsen, wenn der erste Differentialquotient $f^I{}_x$ positiv ist, hingegen abnehmen, wenn $f^I{}_x$ negativ ist. Dieses Bestreben von f_x, zu wachsen oder abzunehmen, ist nicht konstant, sondern mit x zugleich veränderlich, da f^I selber eine Funktion von x ist. (Nur für die Funktion $ax + b$, für welche $f' = a$, konstant ist, ist dieses Bestreben konstant.)

§ 16. Der Verlauf der stetig fließenden Funktion $y =$ läßt sich bildlich durch eine Kurve darstellen. Sei z. B.



$AQ = x$, $QX = \triangle x$,
$PQ = y$, $VWX = y + \triangle y$.

Wenn nun $y = f_x$, so ist

$$y + \triangle y = y + f' \triangle x + f^{II} \cdot \frac{\triangle x^2}{2!}$$

$$f^{III} \cdot \frac{\triangle x^3}{3!} + \ldots$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = f^{I} + f^{II} \cdot \frac{\triangle x}{2!} + f^{III} \cdot \frac{\triangle x^2}{3!} + \ldots$$

für ein unendlich kleines dx ist also

$$\frac{dy}{dx} \text{ oder } f' \text{ die trigonometrische tang}$$

Winkels τ, welchen die durch P gezogene Tangente mit Abscissenachse bil

Denkt man sich zwischen P und V einen Punkt v, du den die Tangente an die Kurve parallel der Sehne PV und bezeichnet Qv, mit $\Theta \cdot \triangle x$ (wo Θ ein echter Bruch ist, ist für den Punkt v, dessen Abscisse $x + \Theta \cdot \triangle x$,

$\text{tang } \tau = f^{I}(x + \vartheta \cdot \triangle x)$, daher auch

$\frac{\triangle y}{\triangle x} = f^{I}(x + \vartheta \cdot \triangle x) \cdot \triangle x$, daher

$\triangle y = f^{I}(x + \vartheta \cdot \triangle x) \cdot \triangle x$.

Es existirt also stets ein echter Bruch Θ, so daß für beliebiges $\triangle x$ $f_{x + \triangle x}$ genau $= f_x + f^{I}(x + \vartheta \cdot \triangle x) \cdot \triangle x$.

Dritter Abschnitt.

timmung des wahren Werthes einer Funktion, welche ine der Formen $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ annimmt.

§ 17. Eine gebrochene Funktion kann für einen besonderen th der Veränderlichen den Werth $\frac{0}{0}$ annehmen. Es sei z. B. $\frac{x^3-64}{x-4}$ die Gleichung einer Kurve, so ist

für $x=$	0	1	2	3	4	5
$y=$	16	21	28	37	$\frac{0}{0}$	61

Es fragt sich nun, welches der wahre Werth der zu $x=4$ örigen Ordinate y ist. Dividirt man Zähler und Nenner ger gebrochenen Function durch $x-4$, so ergiebt sich

$$y=x^2+4x+16, \text{ daher für } x=4$$
$$y=48.$$

Daß die Funktion $\frac{x^3-64}{x-4}$ für $x=4$ auf die unbestimmte m $\frac{0}{0}$ führt, rührt offenbar daher, daß Zähler und Nenner en gemeinsamen Faktor haben, der für den Werth $x=4$ zu ll wird. Wird dieser gemeinschaftliche Faktor vorher ent- nt, so läßt sich, wie bei obigem Beispiele, der Werth $\frac{0}{0}$, y für ein bestimmtes x annimmt, leicht bestimmen. Oft chieht dies aber leichter mittelst der Differentialrechnung.

Es sei z. B. x_0 derjenige Werth von x, für welchen die gebrochene nktion $\frac{F_x}{f_x}$ den Werth $\frac{0}{0}$ erhält, so ist, da

$$\frac{F(x_0+\triangle x)}{f(x_0+\triangle x)}=\frac{F(x_0)+F'(x_0)\cdot\triangle x+F''(x_0)\cdot\frac{\triangle x^2}{2!}+\cdots}{f(x_0)+f'(x_0)\cdot\triangle x+f''(x_0)\cdot\frac{\triangle x^2}{2!}+\cdots}$$

$$= \frac{F'(x_0) + F''(x_0) \cdot \frac{\Delta x}{2!} + \cdots}{f'(x_0) + f''(x_0) \cdot \frac{\Delta x}{2!} + \cdots},$$

für $\Delta x = 0$ der wahre Werth von $\frac{F(x_0)}{f(x_0)} = \frac{F'(x_0)}{f'(x_0)}$.

Man findet also den wahren Werth einer gebrochenen Funktion, die für x_0 die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, indem man Zähler und Nenner differentiirt, durch dx dividirt, und in den erhaltenen Quotienten $\frac{F^1}{f^1}$ für x den Werth x_0 setzt.

Sollte auch $\frac{F'(x_0)}{f'(x_0)}$ auf die Form $\frac{0}{0}$ führen, so müssen in $\frac{F'(x}{f'(x}$ nochmals Zähler und Nenner differentiirt werden, so daß alsdann

$$\frac{F(x_0)}{f(x_0)} = \frac{F''(x_0)}{f''(x_0)}$$

Beispiele.

1. $\frac{x^3 - 64}{x - 4}$ hat für $x = 4$ den Werth $\frac{0}{0}$.

Der wahre Werth ist $\frac{3x^2}{2}$ für $x = 4$, also 48.

2. $\frac{x^2}{1 - \cos x}$ hat für $x = 0$ den Werth $\frac{0}{0}$.

Der wahre Werth ist $\frac{2x}{\sin x}$ für $x = 0$, also wieder $\frac{0}{0}$.

Durch nochmaliges Differentiiren ergiebt sich $\frac{2}{\cos x}$ für $x = 0$, also 2.

3. $\frac{1 - \cos x}{x^2}$ hat für $x = 0$ den Werth $\frac{0}{0}$.

Der wahre Werth ist $\frac{\sin x}{2x}$ für $x = 0$, also wieder $\frac{0}{0}$.

Durch nochmaliges Differentiiren ergiebt sich $\frac{\cos x}{2}$ für $x = 0$, also $\frac{1}{2}$.

4. $\frac{\cos x - \sin x + 1}{\cos x + \sin x - 1}$ hat für $x = 90°$ den Werth $\frac{0}{0}$.

Der wahre Werth ist $\frac{-\sin x - \cos x}{-\sin x + \cos x}$ für $x = 90°$, also 1.

5. $\frac{x-1}{x^2-1}$ für $x = 1$ giebt $\frac{1}{2}$.

6. $\frac{x^n - 1}{x - 1}$ " " " " n.

7. $\frac{\lg x}{x - 1}$ " " " " 1.

8. $\frac{1 - x}{\lg x}$ " " " " -1.

9. $\frac{\sin x}{x^2}$ für $x = o$ giebt ∞.

10. $\frac{\sin^2 x}{x}$ " " " " o.

11. $\frac{x - \sin x}{x^3}$ " " " " $\frac{1}{6}$.

12. $\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$ für $x = o$ giebt 2.

13. $\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ " " " " 2.

14. $\frac{a^x - b^x}{x}$ " " " " $\lg a - \lg b$.

15. $\frac{a - x - a \lg a + a \lg x}{a - \sqrt{2ax - x^2}}$ für $x = a$ giebt -1.

§ 18. Dasselbe Verfahren, wie im vorigen §, ist anzuwenden, wenn $\frac{F(x_o)}{f(x_o)} = \frac{\infty}{\infty}$ wird.

Beweis. $\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{\frac{1}{f(x)}}{1/F(x)} = \frac{0}{0}$ für den Werth x_0.

Durch Differentiiren ergiebt sich $\frac{-(f x)^{-2} \cdot f'x}{-(Fx)^{-2} \cdot F'x} = \frac{(Fx)^2 f'x}{(fx)^2 \cdot F'x}$

wahre Werth von $\frac{F(x_o)}{f(x_o)}$ ist also $\frac{[F(x_o)]^2 \cdot f'(x_o)}{[f(x_o)]^2 \cdot F'(x_o)}$ daher durch Division mit $\frac{F(x_o)}{f(x_o)}$

$$\frac{1}{1} = \frac{F(x_0) \cdot f'(x_0)}{f(x_0) \cdot F'(x_0)}, \text{ woraus}$$

$$\frac{F(x_0)}{f(x_0)} = \frac{F'(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Beispiel. $\frac{\tang 5x}{\tang x}$ hat für $x = 90°$ den Werth $\frac{\infty}{\infty}$.

Der wahre Werth ist $\frac{5}{\cos^2 5x} : \frac{1}{\cos^2 x}$ für $x = 90°$, also $= \frac{5}{5}$.

Durch nochmaliges Differentiiren ergiebt sich $-\frac{10 \cos x \cdot \sin x}{2 \cos 5x \cdot -5 \sin}$ für $x = 90$, also $\frac{0}{5}$.

Durch drittes Differentiiren ergiebt sich $\left(\text{da } \frac{\cos x \cdot \sin x}{\cos 5x \cdot \sin 5x} = \frac{\sin 2x}{\sin 10x}\right)$

$$\frac{2 \cos 2x}{10 \cos 10x} \text{ für } x = 90°, \text{ also } \frac{1}{5}.$$

§ 19. Auch der Fall, in welchem $F_x \cdot f_x$ für x_0 den Wer $0 \cdot \infty$ annimmt, läßt sich auf § 17 zurückführen, da

$$F \cdot f = \frac{F}{f^{-1}}, \text{ also für } x_0 \text{ gleich } \frac{0}{0}.$$

Beispiel.

$x \lg x$ hat für $x_0 = 0$ den Werth $0 \cdot -\infty$.

Nun ist $x \cdot \lg x = \frac{x}{(\lg x)^{-1}}$, also für $x = 0$ gleich $\frac{0}{-0}$.

Durch Differentiiren ergiebt sich $\frac{1}{-1 \cdot (\lg x)^{-2} \cdot \frac{1}{x}}$

oder $\frac{-x}{(\lg x)^{-2}}$ für $x = 0$ gleich $\frac{-0}{-\infty} = 0$.

Derselbe Werth hätte sich auch auf folgende Art ergeben:

$x \lg x = \frac{\lg x}{x^{-1}}$, also für $x = 0$ gleich $-\frac{\infty}{\infty}$

Durch Differentiiren ergiebt sich $\frac{1/x}{-x^{-2}}$ oder $-x$, also 0.

§ 20. Auch die Fälle, in welchen $(F_x)^{f_x}$ für $x_o = o$ einen Werthe o^o, ∞^o, 1^∞ erhält, lassen sich auf § 17 zurückführen.

Sei nämlich w der gesuchte wahre Werth der Funktion F^f für $x = x_o$, ist $\lg w = f \cdot \lg F$, also

$$w = e^{\frac{\lg F}{f^{-1}}}, \text{ worin der Exponent zu bestimmen ist.}$$

Beispiele.

1. $(1+x)^{1/x}$ ist für $x = o$ gleich 1^∞.

Der wahre Werth ist $e^{\frac{\lg(1+x)}{x}}$ für $x = o$, also $e^{\frac{o}{o}}$.

Differentiire $\frac{\lg(1+x)}{x}$, so ergiebt sich $\frac{1}{1+x}$, also $w = e^{\frac{1}{1+x}} = e$.

2. $(1+1/x)^x$ ist für $x = \infty$ gleich 1^∞.

Der wahre Werth ist $e^{\frac{\lg(1+1/x)}{1/x}}$ für $x = \infty$, also $\frac{o}{o}$.

Differentiire $\frac{\lg(1+1/x)}{1/x}$, so ergiebt sich $\frac{\frac{1}{1+1/x} \cdot -x^{-2}}{-x^{-2}}$ oder $\frac{1}{1+1/x}$,

daher $w = e^{\frac{1}{1+1/x}}$ für $x = o$, oder e^1.

3. $(1-x)^{1-x}$ ist für $x = 1$ gleich 0°.

Der wirkliche Werth ist $e^{\frac{\lg(1-x)}{(1-x)^{-1}}}$ für $x = 1$, also $e^{-\frac{o}{o}}$.

Differentiire Zähler und Nenner von $\frac{\lg(1-x)}{(1-x)^{-1}}$, so ergiebt sich $-(1-x)$,

daher $w = e^{-(1-x)}$ für $x = 1$, also gleich $e^o = 1$.

4. $x^{\frac{1}{1-x}}$ ist für $x = 1$ gleich 1^∞.

Der wirkliche Werth ist $e^{\frac{\lg x}{1-x}}$ für $x = 1$, also $e^{\frac{o}{o}}$.

Differentiire Zähler und Nenner von $\frac{\lg x}{1-x}$, so ergiebt sich

$$w = e^{\frac{1/x}{-1}} \text{ für } x = 1, \text{ also gleich } e^{-1} = 1/e.$$

5. $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{1-x}$ hat für $x=1$ den Werth ∞^0.

Der wirkliche Werth ist $e^{\frac{\lg(1-x)^{-1}}{(1-x)^{-1}}}$ für $x=1$, also $e^{\frac{\infty}{\infty}}$.

Differentiire Zähler und Nenner von $\frac{\lg(1-x)^{-1}}{(1-x)^{-1}}$ so ergiebt sich $1-x$

daher $w=e^{1-x}$ für $x=1$, also 1.

§ 21. Wenn die Differenz zweier gebrochenen Funktion für einen bestimmten Werth von x die Form $\infty-\infty$ liefert, find die gebrochenen Funktionen auf denselben Nenner zu br gen. Es ist z. B.

$$\frac{1}{\lg x}-\frac{1}{x-1} \text{ für } x=1 \text{ gleich } \infty-\infty.$$

$\frac{x-1-\lg x}{(x-1)\cdot\lg x}$ für $x=1$ gleich $\frac{0}{0}$. Durch Differentiiren ergiebt sich

$\frac{1-1/x}{\lg x+\frac{x-1}{x}}$ oder $\frac{x-1}{x\lg x+x-1}$ für $x=1$ gleich $\frac{0}{0}$. Durch nochmalig

Differentiiren wird $\frac{1}{\lg x+\frac{x}{x}+1}$ für $x=1$ gleich $\frac{1}{2}$.

§ 22. Sind die für $x=x_0$ im Zähler und Nenner v schwindenden Faktoren Potenzen mit gebrochenen Exponen in welchem Falle die Reihen in § 17 für $F(x_0+\triangle x)$ $f(x_0+\triangle x)$ nicht nach ganzen Potenzen von $\triangle x$ fortschrei können, so läßt sich die Differentialrechnung nicht zur Best mung des wahren Werthes von $\frac{0}{0}$ benutzen. Es wird z. B

$$\frac{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{(x-a)^{\frac{3}{2}}} \text{ für } x=a \text{ gleich } \frac{0}{0}.$$

Hier würde das Differentiiren kein Ende nehmen, also nicht Bestimmung des wahren Werthes von $\frac{0}{0}$ führen.

Setzt man aber $a+h$ statt x, so ergiebt sich

$$\frac{[(a+h)^2-a^2]^{\frac{3}{2}}}{(a+h-a)^{\frac{3}{2}}}=\left(\frac{2ah+h^2}{h}\right)^{\frac{3}{2}}=(2a+h)^{\frac{3}{2}},$$

woraus für $h=0$ der Werth $(2a)^{\frac{3}{2}}$ resultirt.

Anmerk. Dasselbe Resultat hätte sich wie folgt ergeben:

$w = \left(\frac{x^2 - a^2}{x - a}\right)^{\frac{3}{2}}$ ist für $x = a$ gleich $\frac{3}{2}$; ebenso

$w^{\frac{3}{2}} = \frac{x^2 - a^2}{x - a}$ für $x = a$ gleich $\frac{3}{2}$.

Durch Differentiiren des Zählers und Nenners ergiebt sich

$w^{\frac{3}{2}} = \frac{2x}{1}$ oder $2a$, daher $w = (2a)^{\frac{2}{3}}$.

Vierter Abschnitt.

Maxima und Minima.

§ 23. Der Werth einer Funktion f_x heißt ein Maximum, n er größer ist, als der in der Reihe der Werthe von f_x ittelbar vorhergehende und nächstfolgende, ein Minimum, n er kleiner als diese ist. In dem Momente, wo eine f_x Maximum wird, hört ihr Bestreben zu wachsen auf, und beginnt abzunehmen; in dem Momente, wo sie ein Mini- n wird, hört ihr Bestreben abzunehmen auf, und sie be- nt zu wachsen. Nach § 15 wächst aber f_x, wenn der erste ferentialquotient f^1 positiv ist, sie nimmt ab, wenn f^1 ne- v ist. Wenn also f^1 vom Wachsen zum Abnehmen über- t, oder umgekehrt, so muß nothwendig f^1 sein Vorzeichen ern, also entweder gleich 0 oder gleich ∞ sein.*)

*) Eine Funktion kann vom Positiven zum Negativen (und umgekehrt) nur ı übergehen, wenn sie erst 0 oder ∞ wird; es ist z. B.

$a - x$ positiv für $x < a$, negativ für $x > a$, und gleich Null für den Zwischenwerth $x = a$.

$\frac{1}{a - x}$ ist positiv für $x < a$, negativ für $x > a$, und gleich ∞ für den Zwischenwerth $x = a$.

Hieraus ergiebt sich folgende Regel, diejenigen We
von x zu finden, für welche f_x ein Maximum oder Minim
wird:

Suche den Werth x_0, für welchen $f^I{}_x$ gleich Null
unendlich wird, und untersuche, ob der nächstvorhergehe
und der nächstfolgende Werth von $f^I{}_x$ (also die We
von f^I für $x = x_0 - dx$ und $x = x_0 + dx$) entgegengese
Vorzeichen haben. Ist nun der nächst vorhergehende W
von f^I positiv, der nächstfolgende negativ, so findet
Maximum statt; ist der nächst vorhergehende Werth vo
negativ, der nächstfolgende positiv, so findet ein M
mum statt.

§ 24. Für den Fall, daß alle $f^I{}_x$ stetig bleiben, also
plötzlich ∞ werden, ergiebt sich mittelst des Taylorschen S
eine leichtere Regel, als die eben gegebene allgemeine,
Auffindung der Werthe von x, für welche f_x ein Maxi
oder Minimum wird. Es ist nämlich

$$f(x_0 \pm dx) = f(x_0) \pm f^I(x_0) \cdot dx + f^{II}(x_0) \cdot \frac{dx^2}{2!} \pm \ldots$$

Da nun für ein Maximum oder Minimum f^I gleich
ist, so bleibt für diesen Fall

$$f(x_0 \pm dx) = f(x_0) + f^{II}(x_0) \cdot \frac{dx^2}{2!} \pm \ldots$$

Ist nun $f^{II}(x_0)$ positiv, so ist der dem Werth $f(x_0)$
mittelbar vorhergehende und folgende Werth von f_x gr
als $f(x_0)$; dann ist also f_x ein Minimum. Ist aber $f^{II}(x_0)$
gativ, so sind die beiden Nachbarwerthe von f_x kleiner,
$f(x_0)$; dann ist also f_x ein Maximum.

Anmerk. Sollte für denselben Werth x_0, für welchen f' gleich
wird, auch f'' zu Null werden, so wäre

$$f(x_0 \mp dx) = f(x_0) \mp f^{III}(x_0) \cdot \frac{dx^3}{3!} + f^{IV}(x_0) \cdot \frac{dx^4}{4!x} \mp \ldots$$

Ist nun $f^{III}(x_0)$ positiv, so ist der $f(x_0)$ nächstvorhergehende Wert

einer, als $f(x_0)$, der nächstfolgende aber größer, als $f(x_0)$. Ist aber $_0)$ negativ, so ist der $f(x_0)$ nächstvorhergehende Werth von f_x größer, $^2(x_0)$, der nächstfolgende kleiner, als $f(x_0)$. In beiden Fällen ist $f(x_0)$ r ein Maximum noch ein Minimum.

Werden ferner für x_0 zugleich f^I, f^{II}, f^{III} gleich Null, so läßt sich zeigen, daß $f(x_0)$ ein Maximum, wenn $f^{IV}(x_0)$ negativ, hingegen ein imum, wenn $f^{IV}(x_0)$ positiv ist, ꝛc.

§ 25. Uebungsaufgaben.

1. Die Werthe von x zu finden, für welche die Funktion $x^2 - x + 1$ ein Maximum oder Minimum wird.

Lösung. $f' = 3x^2 - 2x - 1 = 0$ liefert $x_0 = 1$ oder $-\frac{1}{3}$.
$f^{II} = 6x - 2$. f' wird für $x = 1$ positiv,
für $x = -\frac{1}{3}$ negativ, daher ist
die Funktion $x^3 - x^2 - x + 1$ ein Minimum für $x = 1$, ein
Maximum für $x = -\frac{1}{3}$.

2. Die Maxima und Minima der Funktion $-\frac{7}{4}x^2 + 6x + 3$ zu bestimmen.

Lösung. $f' = x^3 - 7x^2 + 6 = 0$, daher (Analysis pag. 44) $x_0 = 1$ od. 2 od. -3.
$f^{II} = 3x^2 - 7$. f^{II} wird für $x = 1$ negativ,
für $x = 2$ positiv,
für $x = -3$ positiv, daher
ist die gegebene Funktion ein Maximum $(5\frac{1}{4})$ für $x = 1$, hingegen ein
imum (5 und $-26\frac{1}{4}$) für $x = 2$ und $x = -3$.

3. Die Maxima und Minima von $\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 1$ zu bestimmen.

ng. $f^I = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3 = 0$ liefert $x_0 = 1$ oder 1 oder 1 oder 3.
$f^{II} = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 10$. Für $x = 1$ wird $f^{II} = 0$, $f^{III} = 0$,
$f^{III} = 12x^2 - 36x + 24$ f^{IV} negativ, daher ein Maximum
$f^{IV} = 24x - 36$ (1,7) für $x = 1$.
Für $x = 3$ wird f^{II} positiv, daher
ein Minimum (0,1) für $x = 3$.

4. Desgleichen von $e^x + 2\cos x + e^{-x}$.

Lösung. $f^{I} = e^{x} - 2\sin x - e^{-x} = 0$ liefert $x = 0$, für welchen Wert
$f^{II} = e^{x} - 2\cos x + e^{-x}$ und $f^{III} = 0$, f^{IV} positiv wird,
$f^{III} = e^{x} + 2\sin x - e^{-x}$ ein Minimum (4) für $x = 0$.
$f^{IV} = e^{x} + 2\cos x + e^{-x}$

5. Welcher von allen Brüchen übertrifft sein Qua am meisten? Antwort: $\frac{1}{2}$.

6. Welches von allen Rechtecken vom Inhalte a hat kleinsten Umfang?

Lösung. Sei x die Basis, also $\frac{a}{x}$ die Höhe des gesuchten Rechtec

ist der Umfang $= 2x + \frac{2a}{x}$.

$f' = 2 - \frac{2a}{x^2} = 0$ liefert $x = \sqrt{a}$.

Es hat daher von allen Rechtecken von gleichem Inhalte Quadrat den kleinsten Umfang.

7. Welches von allen Rechtecken von gleichem Umf u hat den größten Inhalt?

Lösung. Die Basis des gesuchten Rechtecks ist $\frac{u}{4}$; daher von allen Rechtecken von gleichem Umfange das Quadra größten Inhalt.

8. In ein Dreieck von der Basis a und Höhe h soll größtmögliche Rechteck eingezeichnet werden. Welche Höh ihm zu geben?

Lösung. Seien x u. y die Höhe und Basis des gesuchten ecks, so ist $h : a = (h-x) : y$, daher $y = \frac{a}{h}(h - x)$; demnach ist der $= \frac{a}{h}(hx - x^2)$. Dies ist ein Maximum oder Minimum für den We welcher f', nämlich $\frac{a}{h}(h - 2x)$ zu Null macht, nämlich für $x_0 = h/2$ nun f^{II} für $x = \frac{h}{2}$ negativ ist, so findet für $x = \frac{h}{2}$ ein Maximum Sta

9. In einen Kreis vom Radius r soll das größtmö Rechteck eingezeichnet werden. Welche Basis ist ihm zu g

Lösung. Sei x die Basis des gesuchten Rechtecks, so ist dessen $\sqrt{4r^2 - x^2}$ und der Inhalt $= x\sqrt{4r^2 - x^2}$. Diese Funktion wird für e x_0 ein Maximum, für welches ihr Quadrat $4r^2x^2 - x^4$ ein Ma- wird. $f' = 8r^2x - 4x^3 = 0$ für $x = 0$ oder $r\sqrt{2}$.

$f'' = 8r^2 - 12x^2$. Für $x = 0$ wird f'' positiv, also das Rechteck ein Minimum;

für $x = r\sqrt{2}$ wird f' negativ, also das Rechteck ein Maximum.

a für $x = r\sqrt{2}$ auch die Höhe $= r\sqrt{2}$ wird, so ist das **größte Recht- welches einem Kreise eingezeichnet werden kann, ein Quadrat, Inhalt $2r^2$.**

10. Um einen Kreis ein gleichschenkliges Dreieck zu be- ben, dessen Inhalt ein Minimum ist.

Lösung. Das gesuchte Dreieck ist ein gleichseitiges.

11. In einer Kugel einen geraden Kegel vom größtmög- Inhalte zu konstruiren.

Lösung 1. Bezeichne die Entfernung des Mittelpunkts der Grund- fläche von der Kugeloberfläche (DE) mit x, so ist der Grund- flächenradius $AD = \sqrt{2rx - x^2}$, die Höhe $BD = 2r - x$, daher der Kegelinhalt $(x^3 - 4rx^2 + 4r^2x)\frac{\pi}{3}$. Setze nun $3x^2 - 8rx + 4r^2 = 0$, so ergiebt sich $x_0 = \frac{2}{3}r$ für den Maximalkegel.

Lösung 2. Setze $\angle AOD = \xi$; dann ergiebt sich $\cos \xi_0 = \frac{1}{3}$ ꝛc.

12. In einem geraden Kegel den größten Cylinder zu uiren.

Lösung. Die Cylinderhöhe ist $\frac{1}{3}$ h.

13. Welcher von allen geraden Cylindern vom Inhalte a ie kleinste Gesammtoberfläche?

Lösung. Sei x der Radius der Grundfläche, y die Höhe des Cylinders, so ist $y = \frac{a}{x^2\pi}$ und die Gesammtoberfläche $= 2\left(\frac{a}{x} + x^2\pi\right)$. Wird nun $f' = \frac{2a}{x^2} + 4\pi x = 0$ gesetzt, so

resultirt $x_0 = \sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}}$ und $y_0 = 2\sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}}$. Es ist daher die
des gesuchten Cylinders gleich dem Durchmesser seiner Grund

14. Eine Zahl a in zwei Summanden zu zerlegen,
Produkt ein Maximum wird.

Lösung: $\frac{a}{2} + \frac{a}{2}$.

15. Aus einem rechteckigen Stück Pappe sollen, na
an den Ecken gleiche Quadrate fortgenommen worden, die
tenstücke senkrecht gegen das Mittelstück aufgebogen werden
der entstehende hohle Kasten ein Maximum sein.

Lösung. Die Fläche des Mittelstücks ist $(a-2x)(b-2x)$,
der Kasteninhalt $x(a-2x)(b-2x)$. Für den Maximalka

$$x_0 = \frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}.$$

Anmerk. Ist $b=a$, so ist $x_0 = \frac{a}{6}$ und der Inhalt des M
kastens $\frac{2}{27}a^3$.

16. Durch einen geg. Punkt P zwischen den Sch
eines rechten Winkels A die kürzeste Linie MN zu ziehen

Lösung 1. Seien a u. b die Koordinaten von P. Bezeich
mit x, so ist $MN^2 = x^2 + AM^2$

$$= x^2 + \frac{b^2x^2}{(x-a)^2}.$$

Wird nun $f'x = 2x + \frac{2b^2x(x-a)^3 - 2b^2x^2(x-a)}{(x-a)^4} = 0$

so ist $x_0 = a + \sqrt[3]{ab^2}$.

Lösung 2. Bezeichne $\angle MNA$ mit ξ. Dann ist $MN = \frac{a}{\cos\xi}$
Wird der erste Differentialquotient dieser Funktion glei

gesetzt, so ergiebt sich $\operatorname{tang}\xi_0 = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, daher wieder A

$a + b\cot g\,\xi_0) = a + \sqrt[3]{ab^2}$.

7. Für welchen Werth von x wird x^x ein Minimum?

Lösung. Da $x = e^{\lg x}$, so ist $x^x = e^{x \lg x}$; daher $f' = e^{x \lg x}(1 + \lg x)$. Hierin kann der erste Faktor nicht gleich Null gesetzt werden, daher setze $1 + \lg x = 0$; dann ist $\lg x_0 = -1$, also $x_0 = 1/e$.

8. Für welchen Werth von x wird $\sqrt[x]{x}$ ein Maximum Minimum?

Lösung. $f_x \sqrt[x]{x}$

$\lg f = 1/x \lg x$. Durch Differentiiren wird

$$\frac{1}{f} \cdot df = \left(-\frac{1}{x^2} \lg x + \frac{1}{x^2}\right) dx.$$

$$\frac{df}{dx} \text{ oder } f' = f_x \left(-\frac{1}{x^2} \lg x + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2} (1 - \lg x).$$ Setze $1 - \lg x = 0$, so ist $\lg x_0 = 1$, also $x_0 = e$

und für $x_0 = e$ die Funktion $\sqrt[x]{x}$ ein Maximum, $\sqrt[e]{e}$.

Fünfter Abschnitt.

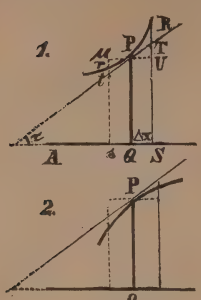
Von der Konkavität und Konvexität der Kurven.

§ 26. Eine Kurve heißt in Bezug auf einen ihrer Punkte ab gegen die Abscissenachse, wenn sie zwischen dieser und durch den Punkt gezogenen Tangente liegt, konvex, wenn außerhalb der Abscissenachse und der durch den Punkt gezogenen Tangente liegt.

Die Punkte, wo eine Kurve von Konkavität in Konvexität, umgekehrt, übergeht, heißen Wendepunkte.

Eine Kurve, die einen Wendepunkt hat, kann durch eine Gerade in mehr als zwei Punkten geschnitten werden.

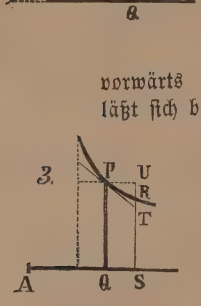
§ 27. Aufgabe. Für welches x wird eine Kurve, d
Gleichung $y = f_x$ ist, konkav oder konvex?



Lösung. PQ = y wachse um RU = △y, wenn A
um QS = △x wächst. Dann ist nach dem
lorschen Satze

$$\triangle y = f'_x \cdot \triangle x + f'' \cdot \frac{\triangle x^2}{2!} + f''' \cdot \frac{\triangle x^3}{3!} \cdots$$

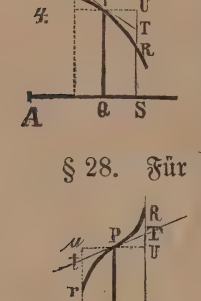
Wird nun △x so klein angenommen, daß jedes
dieser Reihe größer ist, als die Summe alle
genden (§ 15), so ist für wachsende positive
dinaten (Fig. 1 u. 2), für welche f'_x positiv
△y oder RU größer, als TU oder $f' \cdot \triangle x$ (§ 16
bald f'' positiv ist. Hingegen ist △y kleiner, al
sobald f'' negativ ist. Im ersten Falle ist die
im Punkte P vorwärts konvex, im zweiten
vorwärts konkav gegen die Abscissenachse. (In derselben
läßt sich bei Annahme eines negativen △x zeigen, daß im
Falle die Kurve auch rückwärts konvex, so wi
zweiten Falle auch rückwärts konkav ist.)



Für abnehmende positive Ordinaten (Fig. 3
für welche f'_x negativ ist, ist △y oder RU kleiner
TU, sobald f'' positiv ist (Konvexität), hingegen
als TU, sobald f'' negativ ist (Konkavität).

Aehnlich läßt sich zeigen, daß für negative Ordi
gerade umgekehrt Konvexität stattfindet, wenn f'' ne
Konkavität, wenn f'' positiv ist. Daher ist mit B
sichtigung des Vorzeichens von y die allgemeine
**Eine Kurve $y = f_x$ ist so lange konkav, als
negativ, und so lange konvex, als $y \cdot f''_x$ positi**

§ 28. Für diejenige Abscisse x_o, für welche $f'' = o$,



$\triangle y = f'_x \cdot \triangle x + f''' \cdot \frac{\triangle x^3}{3!}$ Ist nun f'''
sitiv, so ist
$+\triangle x$ △y od. UR > UT, also d. Kurv vorw.
$-\triangle x$ △y od. ur > ut, „ „ „ „
Ist aber f''' negativ, so ist für
$+\triangle x$ △y < UT, also d. K. vorw.
$-\triangle x$ △y < ut, „ „ „ rückw.
In beiden Fällen, also wenn $f'' = o$ und f''' positiv

v, ist P ein Wendepunkt; daher sind **die Abscissen die Wende-
einer Kurve $y = f_x$ die Wurzeln der Gleichung $f'' = o$.**

Anmerk. Sollte für denselben Werth x_o, für welchen $f'' = o$ wird, auch der folgende oder mehrere folgende Differentialquotienten $= o$ werden, so kann **ein Wendepunkt nur dann vorhanden sein, wenn der erste nicht zu Null werdende Differentialquotient von ungerader Ordnung ist.**

§ 29. Diskussion einiger Kurven.

$= \sqrt{ax}$ (Parabelgleichung).

$= \frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}\,x^{-\frac{1}{2}}$
$= -\frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}\,x^{-\frac{3}{2}}$

Da f'' für jedes x negativ ist, so ist die Parabel überall konkav gegen die Abscissenachse.

$= a \lg x$.
$= a/x$
$= -a/x^2$

Für $x < 1$ ist y negativ, $y \cdot f''_x$ positiv, daher der unterhalb der Abscissenachse liegende Zweig konvex.

Für $x = 1$ ist $y = o$.

Für $x > 1$ ist $y \cdot f''_x$ negativ, daher der oberhalb der Abscissenaxe liegende Zweig konkav. Kein Wendepunkt, da f'' für keinen Werth von x zu Null wird.

$= (x - a)^3$.
$= 3(x - a)^2$
$= 6(x - a)$
$= 6$

Für $x = a$ ist
- $y = o$ weder ein Minimum noch Maximum nach § 24 Anm.
- $f' = o$, dah. d. Abscissenachs. Tang.
- $f'' = o$. Wendepunkt, da der erste nicht verschwindende Diff.quot. von ungerader Ordnung ist.

$= (x - a)^4$.
$f^I = 4(x - a)^3$
$f^{II} = 12(x - a)^2$
$f^{III} = 24(x - a)$
$f^{IV} = 24$.

Für $x = a$ ist
- $y = o$ ein Minim. n. § 24 Anm.
- $f' = o$, dah. d. Abscissen. Tangente
- $f'' = o$; doch kein Wendepunkt, da der erste nicht verschwindende Diff.-quot. von gerader Ordnung ist.

Für $x \lessgtr a$ ist f'' stets positiv, daher die Kurve überall konvex.

II. $y = -(x - a)^4$.
$f^I = -4(x - a)^3$
$f^{II} = -12(x - a)^2$
$f^{III} = -24(x - a)$
$f^{IV} = -24$.

Für $x = a$ ist
- $y = o$ e. Maximum. n. § 24 An.
- $f' = o$, dah. d. Abscissen. Tangente
- $f'' = o$; doch kein Wendepunkt.

für $x \lessgtr a$ ist y negativ und $y \cdot f''_x$ positiv, daher die (unterhalb der Achse liegende) Kurve konvex.

5. $y = (x-a)^5$.

$f^I = 5(x-a)^4$
$f^{II} = 20\,(x-a)^3$
.
.
$f^V = 120$.

Für x=a ist y=o weder ein Maxi
noch ein Minim
f'=o, daher die Abs
achse Tangent
f''=o. Wendepunkt
Für alle ± Ordinaten ist die
ko

6. $y = x + \sqrt{x}$.

$f^I = 1 \pm \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
$f^{II} = \mp \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$
$f^{III} = \pm \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$
$f^{IV} = \mp \frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}$

Für negative x ist y imaginär;
für x = o ist y = o;
für x zwischen o u. 1 ist y ±;
für x = 1 ist y = 2 od. o;
für x > 1 ist y positiv.

Die Kurve erstreckt sich nach der positiven Seite hin mit zwei Sch
ins Unendliche.

Für x = o schneidet der erste Schenkel die Abscissenachse und
x = o f' = ∞, so steht die Tangente in A senkrecht auf der Abscisse
Da ferner f' für bis ins Unendliche wachsende x stets positiv ist,
der erste Schenkel weder ein Maximum noch ein Minimum, u
f'' stets negativ ist, so ist dieser Schenkel überall konkav.

Der zweite Schenkel schneidet für x = o die Abscissenachse und
x = o f' = ∞, so steht die Tangente in A senkrecht auf der Abscisse
Da ferner f' für $x = \frac{1}{4}$ zu Null wird, und f'' für $x = \frac{1}{4}$ positiv ist, so
für $x = \frac{1}{4}$ ein Minimum Statt $(-\frac{1}{4})$. Da für x zwischen O u. 1 der
von $y \cdot f''$ negativ ist, so ist der zweite Schenkel unterhalb der Ab
achse konkav. Für x = 1 schneidet er die Abscissenachse zum zweiten
Für x > 1 ist f' stets negativ, daher dann kein Maximum oder Mi
mehr stattfindet. Da ferner für x > 1 der zweite Diff.quotient stets
ist, so ist der zweite Schenkel für sämmtliche x > 1 konvex.

7. $y = \sqrt[3]{x} \pm \sqrt{x}$.

$f^I = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \pm \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
$f^{II} = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} \mp \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$

Die Kurve erstreckt sich nach der positive
hin mit zwei Schenkeln ins Unendliche.

I. **Schenkel.** Für x = o schneidet d
Schenkel die Abscissenachse. Da f' für je
positiv ist, so hat er **kein Maximum od**
nimum, und da f'' stets negativ ist, so ist er überall konkav.

henkel. Für $x = o$ schneidet er die Abscissenachse. f' wird $= o$ für $)^e$; da für diesen Werth f'' negativ ist, so findet für ihn ein **Maxi-** Statt. f'' wird $= o$ für $x = (\frac{8}{5})^e$. Wendepunkt, da der dritte Diff. nt nicht $= o$ ist.

$= 3 \pm (x-8)\sqrt{x-3}$.

ür $x < 8$ ist y imaginär;

ir $x = 3$ ist $y = 3$;

ir $x = 8$ ist $y = 3$;

ir $x > 3$ hat y zwei Werthe, die gleichviel über und unter 3 sind, die Kurve durch eine in der Entfernung 3 der Abscissenachse parallel ne Linie halbirt wird.

$f' = \pm\sqrt{x-3} \pm \frac{x-8}{2}(x-3)^{-\frac{1}{2}}$. Da f' für $x = 3$ unendlich ist, ht die Tangente in dem zu $x = 3$ gehörigen Punkte senkrecht auf der senachse. f' wird $= o$ für $x = 4\frac{2}{3}$. Da für diesen Werth von x f'' e obere Hälfte negativ, für die untere positiv ist, so findet **für den zu** $\frac{2}{3}$ **gehörigen Punkt der oberen Hälfte ein Maximum, der un-** **Hälfte ein Minimum Statt.**

Sechster Abschnitt.

Differentiation verwickelter Funktionen zweier Veränderlichen.

§ 30. Sei $F(x, y) = o$ eine verwickelte Funktion der beiden nderlichen x und y. Denkt man sich diese Gleichung auf ducirt, so ist y eine f_x, daher muß, wenn x sich um dx rt, y sich um ein davon abhängiges dy ändern, welches $f'_x \cdot dx$ ist. Die beiden zusammengehörigen Werthe dx und $y + dy$ müssen dann wieder die Gleichung $F(x+dx, dy) = o$ identisch machen; es ist also $F(x + dx, \mathbf{y}) = o$, **y** das neue zu $x + dx$ gehörige y bezeichnet.

Nun ist aber $F(x + dx, \mathbf{y}) = F(x, \mathbf{y}) + F'_x(x, \mathbf{y})\, dx$, n F'_x den ersten Differentialquotienten der nach x diffe-

rentiirten Funktion F bezeichnet. Ueberall ist statt **y** zu
$y + dy$, daher
$F(x + dx,\ y + dy) = F(x,\ y + dy) + F^{I}{}_{x}(x,\ y + dy)$

Nun ist $F(x,\ y + dy) = F + F'_y\, dy$.

$F'_x(x,\ y + dy) = F'_x + F''_{x,y}\, dy$, daher
$F(x + dx,\ y + dy) = F + F'_y \cdot dy + F'_x \cdot dx + F''_{x,y} \cdot d$
oder, da der Ausdruck links und das erste Glied rechts
und das letzte Glied rechts eine unendlich kleine Größe zu
Grades, $\mathbf{F'_y \cdot dy + F'_x \cdot dx = o}$.

Man findet also den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ einer F
$= o$, indem man die Funktion erst nach y und dann
x differentiirt, und die Summe beider Differentiale
Null setzt.

Beispiele: 1. $y^2 - 2xy - 3x^2 - 4 = o$

$2y\,dy - 2x\,dy - 2y\,dx - 6x\,dx = o.$

$(y - x)\,dy - (3x + y)\,dx = o$, daher $\frac{dy}{dx} = \frac{3x + y}{y - x}$

Da y doppelwerthig ist, (weil aus der gegebenen Gleichung
$y = x \pm \sqrt{1 + x^2}$), so ist $\frac{dy}{dx} = 1 \pm \frac{4x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

2. $\mathbf{x^4 y^3 - e^y - x^4 + 7 = 0.}$

$3x^4 y^2\,dy - e^y\,dy + 4y^3 x^3\,dx - 4x^3\,dx =$

$(3x^4 y^2 - e^y)\,dy + (4y^3 x^3 - 4x^3)\,dx = o$

$$dy = \frac{4x^3 - 4x^3 y^3}{3x^4 y^2 - e^y} \cdot dx.$$

§ 31. Allgemein erhält man aus einer verwickelten
tion zweier Veränderlichen den zweiten Differentialquotie
$\frac{d^2y}{dx^2}$ wie folgt:

Aus $F(x,\ y) = o$ folgt durch Differentiiren
(1) ..... $F'_x \cdot dx + F'_y \cdot dy = o$ für jeden Werth von
her auch das Differential des Ausdrucks links $= o$ sein

d aber F'x, F'y und dy Funktionen von x, während dx nstant anzusehen ist. Daher

$$_{x,x} \cdot dx^2 + F''_{x,y}\, dx\, dy) + (F''_{y,x}\, dx\, dy + F''_{y,y}\, dy^2 + F'y \cdot d^2y) = 0.$$

$$\ldots\ldots F''_{x,x} + F''_{x,y} \cdot \frac{dy}{dx} + F''_{y,x} \frac{dy}{dx} + F''_{y,y} \frac{dy^2}{dx^2} + F'y \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

ierin ist für $\frac{dy}{dx}$ sein Werth aus (1) zu substituiren.

Beispiele: 1. Aus $y^2 - 2xy - 3x^2 - 4 = 0$ folgt

$$y\,dy - x\,dy - 3x\,dx - y\,dx = 0 \text{ für jedes } x.$$

aher auch das Differential des Ausdrucks links = 0 sein muß. Im cke links sind aber y und dy Funktionen von x, während dx als t anzusehen ist. Daher erhält man durch nochmaliges Differentiiren

$$dy^2 + y\,d^2y - dx\,dy - x\,d^2y - 3dx^2 - dx\,dy = 0$$

$$dy^2 + (y - x)\,d^2y - 2\,dx\,dy - 3dx^2 = 0$$

$$(y - x) \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + \frac{dy^2}{dx^2} - 3 = 0.$$

iese Gleichung ergiebt die Beziehung zwischen x, y und dem ersten veiten Diff. quotienten.

Wenn man nun $\frac{d^2y}{dx^2}$ als Funktion von x u. y darstellen will, so muß Werth von $\frac{dy}{dx}\left(= \frac{3x + y}{y - x}\right)$ substituirt werden.

2. $y^3 - 3xy + x^3 = 0$ (Gleichung für das kartesische Blatt).

$$3y^2 dy - 3x\,dy - 3y\,dx + 3x^2\,dx = 0$$

$$y^2\,dy - x\,dy - y\,dx + x^2\,dx = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}.$$

Für $x = 0$ ist auch $y = 0$. Da nun $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ wird, so ist nach § 17 der wahre Werth

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dx} - 2x}{2y \cdot \frac{dy}{dx} - 1}, \text{ woraus}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4xy}}{2y} = \frac{1 \pm (1 - 2xy - \cdots)}{2y}.$$

Für das obere Vorzeichen ist $\frac{dy}{dx}$ für $x = o$ u. $y = o$ unendlich

das untere Vorzeichen $= o$. Im Anfangspunkte der Kurve ein Doppelpunkt ist, steht also die eine Tangente senkrecht der Abscissenachse, die andere Tangente fällt mit der Abscisse zusammen.

Der erste Diff. quot. wird o für $y - x^2 = o$, oder $y = x^2$. dieser Werth in die gegebene Gleichung substituirt, so ist

$$x^6 - 3x^3 + x^3 = o$$

$$x^6 - 2x^3 \quad = o, \text{ also } x = o \text{ und } \sqrt[3]{2}, \text{ mithin}$$

$$y = o \text{ und } \sqrt[3]{4}.$$

Für $x = \sqrt[3]{2}$, $y = \sqrt[3]{4}$ wird also $\frac{dy}{dx} = o$. Um zu erkennen, ob der Ku

punkt, dessen Abscisse $\sqrt[3]{2}$ ist, ein Maximum Minimum ist, muß $\frac{d^2y}{dx^2}$ gefunden werden. rentiire daher obige Gleichung

$y^2\,dy - x\,dy - y\,dx + x^2 dx = o$, so ist

$2y\,dy^2 + y^2\,d^2y - dy dx - x d^2y - dy\,dx + 2x\,dx^2 = o.$

$(y^2 - x)\frac{d^2y}{dx^2} - 2\left(\frac{dy}{dx}\right) + 2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x = o.$ Es ist aber

den zu untersuchenden Punkt $\frac{dy}{dx} = o$, daher

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2x}{y^2 - x} = \frac{-2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{16} - \sqrt{2}} = -2, \text{ also negativ;}$$

daher findet ein Maximum Statt.

Siebenter Abschnitt.

Differentiation der Funktionen zweier oder mehrerer absolut Veränderlichen.

§ 32. Es sei z eine Funktion der beiden absolut Verän-
ichen x und y, die ganz unabhängig von einander sind,
3. $z = f(x, y)$ die Gleichung einer krummen Fläche.
Im Allgemeinen wird z sich ändern, wenn x oder y oder
e zugleich sich ändern. Bezeichne die Aenderung von z,
he durch Aenderung von x erfolgt, mit $\underset{x}{\triangle} z$, diejenige,
he durch Aenderung von y erfolgt, mit $\underset{y}{\triangle} z$, und diejenige
he durch Aenderung von x und y erfolgt, mit $\triangle z$. Aen-
sich erst x um $\triangle x$, so ist

$$\underset{x}{\triangle} z = f(x + \triangle x,\ y) = f(x,\ y) + f'_x(x,\ y) \cdot \triangle x + f''_x(x,$$

$$\frac{\triangle x^2}{2!} \cdot \ldots$$ Aendert sich hierin noch y (um $\triangle y$), so ist

$$\ldots\ z + \underset{\cdot\cdot}{\triangle} z = f(x,\ y + \triangle y) + f'_x(x,\ y + \triangle y)\,\triangle x +$$

$$(x, y + \triangle y) \cdot \frac{\triangle x^2}{2!} \ldots$$ Hierin ist jetzt x konstant. Nach
Taylorschen Satze ist nun

$$f(x,\ y + \triangle y) = f(x,\ y) + f'_y \cdot \triangle y + f''_y \cdot \frac{\triangle y^2}{2!} \ldots$$

$$f'_x(x, y + \triangle y) = f'_x + f''_{x,\,y} \cdot \triangle y + f'''_{x,\,y,\,y} \cdot \frac{\triangle y^2}{2!} \ldots$$

$$f''_x(x, y + \triangle y) = f''_{x,\,x} + f'''_{x,\,x,\,y} \cdot \triangle y + f^{IV}{}_{x,\,x,\,y,\,y} \cdot \frac{\triangle y^2}{2!} \ldots$$

r nach Substitution in (1)

$$z + \Delta z = \begin{cases} f + f'_y \cdot \Delta y + f''_{y,y} \cdot \frac{\Delta y^2}{2!} + A \cdot \frac{\Delta y^3}{3!} \cdots \\ + f'_x \cdot \Delta x + f''_{x,y} \Delta x \cdot \Delta y + B \cdot \Delta x \cdot \Delta y^2 \cdot \\ + f''_{x,x} \frac{\Delta x^2}{2!} + C \cdot \Delta x^3 \cdot \Delta y \cdot \end{cases}$$

daher die totale Differenz $\Delta z = f'_x \cdot \Delta x + f'_y \cdot \Delta y + f''_{x,}$

$$\frac{\Delta x^2}{2!} + f''_{x,y} \cdot \Delta x \Delta y + f''_{y,y} \cdot \frac{\Delta y^2}{2!} \cdots$$

§ 33. Wächst in der Funktion $z = f(x, y)$ die Veränd liche x um dx, so ist $f(x + dx, y) = f(x, y) + f'_x \cdot dx,$ rin f'_x eine Funktion von x u. y.

Wächst in $f(x + dx, y)$ die Veränderliche y um dy, so $f(x + dx, y + dy) = f(x + dx, y) + f'y\,(x + dx, y) \cdot dy,$ rin f'y eine Funktion von $(x + dx)$ u. y, also $= f'_y + M \cdot$ Daher ist $f(x + dx, y + dy) = f(x, y) + f'_x \cdot dx + (f'_y +$ $\cdot dx)\, dy$. Also, da M dx dy als unendlich kleine Größe zwe Grades ausgelassen werden kann,

das totale Differential $dz = f'_x \cdot dx + f'_y\, dy$.

Wächst in der Funktion $z = f(x, y, v)$ die Veränderl x um dx, so ist $f(x + dx, y, v) = f(x, y, v) + f'_x\, dx,$ w f'_x eine Funktion von x, y, v.

Wächst in $f(x + dx, y, v)$ die Veränderliche y um dy, $f(x + dx, y + dy, v) = f(x + dx, y, v) + f'y\,(x + dx, y, v)$ worin f'_y eine Funktion von $x + dx$, y, v, also $=$

$$f'_y\,(x,\ y,\ v) + M$$

Wächst in $f(x + dx, y + dy, v)$ die Veränderliche v dv, so ist $f(x + dx, y + dy, v + dv) = f(x + dx, y + dy$ $+ f'_v\,(x + dx,\ y + dy,\ v) \cdot dv,$ worin f'_v eine Funk von $x + dx$, $y + dy$

$$\text{also} = f'_v(x + dx, y + dy, v) + N$$
$$= f'_v(x, y, v) + P \cdot dx + N \cdot$$

Substituirt man die gefundenen Werthe von
$x + dx$, $y + dy$, v) und $f(x + dx, y, v)$, so resultirt
$+ dx, y + dy, v + dv) = f(x, y, v) + f'_x \cdot dx + (f'_y + M dx) dy$
$+ (f'_v + P\,dx + N\,dy)\,dv$, daher
s totale Differential $\mathbf{dz = f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy + f'_v \cdot dv.}$

Beispiele: 1. $z = 2x^2y - 3xy^2 + 4$. Wächst x um dx, y um dy, so ist

$$dz = (4xy - 3y^2)\,dx + (2x^2 - 6xy)\,dy.$$

2. $z = x + y^3 + v^3$.

$$dz = dx + 2y\,dy + 3v^2\,dv.$$

3. $z = 3xy^2 + 4yv^2 + 5x^2v$.

$$dz = (3y^2 + 10xv)\,dx + (6xy + 4v^2)\,dy + (8yv + 5x^2)\,dv.$$

4. $z = 3x^3y^2v - 4x^2y^2v^2 + 5xyv^4 + 6$.

$$dz = (9x^2y^2v - 8xy^2v^2 + 5yv^4)dx + (6x^3yv - 8x^2yv^2 + 5xv^4)dy + (3x^3y^2 - 8x^2y^2v + 20xyv^3)dv.$$

5. $z = x^m y^n$.

6. $z = \frac{1}{x}\sqrt{x^2 + y^2}$.

7. $z = \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{y}\right)$.

§ 34. Sind in einer verwickelten Funktion $f(x, y, z) = 0$. y die absolut Veränderlichen, z die von ihnen abhängige änderliche, so läßt sich durch eine ähnliche Betrachtung wie § 30 zeigen, daß

$$\mathbf{F'_x \cdot dx + F'_y \cdot dy + F'_z \cdot dz = 0.}$$

Beispiel. $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ (Gl. der Kugeloberfläche).

Lösung 1. $x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$.

$$dz = -\frac{(x\,dx + y\,dy)}{z}.$$

Lösung 2. $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, daher nach § 32

$$dz = f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy \quad \left| \begin{array}{l} f'_x = -\dfrac{x\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} = -\dfrac{x\,dx}{z} \\ f'_y = -\dfrac{y\,dy}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} = -\dfrac{y\,dy}{z} \end{array} \right.$$

$$dz = -\frac{(x\,dx + y\,dy)}{z}.$$

§ 35. Aufgabe. Die Gleichung der durch den Punkt P e krummen Fläche $f(x, y, z) = 0$ gehenden Tangentialebene finden.

Lösung. Die Koordinaten des Punktes P seien x_0, y_0, z_0. Wächst x_0 um $\triangle x$, z_0 um $\triangle z$ und bleibt y konstant, so ist dadurch Punkt $P_,$ krummen Fläche bestimmt. Wächst nur y_0 um $\triangle y$, z_0 um $\triangle z$ und x konstant, so ist dadurch Punkt $P_{,,}$ der Fläche bestimmt.

Die Gl. der durch P $P_,$ $P_{,,}$ gehenden Ebene sei $Z = AX + BY$ dann ist

$$z_0 = A\,x_0 + B\,y_0 + C$$

$$z_0 + \underset{x}{\triangle z} = A(x_0 + \triangle x) + B\,y_0 + C$$

$$z_0 + \underset{y}{\triangle z} = A\,x_0 + B(y_0 + \triangle y) + C.$$

Aus diesen drei Gleichungen ergeben sich $A = \dfrac{\underset{x}{\triangle z}}{\triangle x}$, $B = z\,\dfrac{\underset{y}{\triangle z}}{\triangle y}$

$z - \dfrac{\underset{x}{\triangle z}}{\triangle x} - \dfrac{\underset{y}{\triangle z}}{\triangle y}$. Werden $\triangle x$ u. $\triangle y$ unendlich klein, so kann gekrümmte Flächenstück P $P_,$ $P_{,,}$ als eben angesehen werden fällt dann mit der gesuchten Ebene $Z = AX + BY + C$ zusa

Dann sind A u. B die partialen Diff. quotienten $\dfrac{dz}{dx}$ (oder f'

$\dfrac{dz}{dy}$ (oder f'_y). Daher ist die Gl. der gesuchten Tangentia $Z - z = f'_x \cdot (X - x) + f'_y\,(Y - y)$, worin für x, y, z die Koord des gegebenen Punktes P zu setzen sind.

Beispiel. $z^2 - x^2 - y^2 - r^2 = 0$. (Gl. der Kugeloberfläche).

Differentiire nach x, so ist $2z \cdot dz - 2x \cdot dx = 0$, also f'_x

Differentiire nach y, so ist $2z\,dz - 2y\,dy = 0$, also $f'_y = -\frac{y}{z}$. Daher ist die Gl. der Tangentialebene durch den Punkt x, y, z der Kugeloberfläche:

$$Z - z = -\frac{x}{z}(X - x) - \frac{y}{z}(Y - y) \text{ oder}$$

$$x(X - x) + y(Y - y) + z(Z - z) = 0.$$

Zusatz. Für $x = 0$, $y = 0$, also $z = r$ ist die Gl. der Tangentialebene $r(Z - r) = 0$ oder $Z = r$, also unabhängig von x u. y, also der Ebene der x, y im Abstande r parallel.

Maxima und Minima der Funktionen mehrerer absolut Veränderlichen.

§ 36. $z = f(x, y)$ ist ein Maximum (oder Minimum) für nigen Werthe x_0 und y_0, für welche gleichzeitig

1) $f'x$ und $f'y = 0$.
2) $f''x$ und $f''y$ beide negativ (oder beide positiv).
3) $f''x \cdot f''y \gtrless (f''_{x,y})^2$.

Beweis. Es ist $f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + f'_x \cdot \Delta x + f'_y \cdot \Delta y + f'_x \cdot \frac{\Delta x^2}{2} + f''_y \cdot \frac{\Delta y^2}{2} + f''_{x,y} \Delta x \Delta y \cdots$

Δx u. Δy können so klein angenommen werden, daß $f'_x \Delta x + f'_y \cdot \Delta y$ größer ist, als die Summe aller folgenden Glieder. Soll nun z für x_0 u. y_0 ein Maximum (oder Minimum) sein, so müssen **f'_x u. f'_y beide gleich Null sein.**

Wären nämlich beide +, so würde z wachsen für $+\Delta x$ u. $+\Delta y$, abnehmen für $-\Delta x$ u. $-\Delta y$;
wären beide −, so würde z abnehmen für $+\Delta x$ u. $+\Delta y$, wachsen für $-\Delta x$ u. $-\Delta y$;
wäre f'_x pos., f'_y negativ, so würde z wachsen für $+\Delta x$ u. $-\Delta y$, abnehmen für $-\Delta x$ u. $+\Delta y$.

Demnach ist beim Maximum (u. Minimum):

$$\cdot \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + f''_x \cdot \frac{\Delta x^2}{2} + f''_y \cdot \frac{\Delta y^2}{2} + f''_{x,y} \Delta x \cdot \Delta y \cdots$$

und zwar kann ein **Maximum** nur dann stattfinden, wenn

$$f''_x \cdot \frac{\Delta x^2}{2} + f''_y \cdot \frac{\Delta y^2}{2} + f''_{x,y}\,\Delta x \cdot \Delta y \text{ negat}$$

also **wenn f_x u. f_y beide negativ** sind.

Wäre nämlich $f''_x +$ und $f''_y -$, so wäre für $\Delta y = 0$ die Summe po

und wäre $f''_x -$ und $f''_y +$, „ „ „ $\Delta x = 0$ „ „

Ein **Minimum** kann nur dann stattfinden, wenn f_x u. f_y **positiv** sind.

Für ein Maximum muß noch $f''_x \cdot \Delta x^2 + f''_y \cdot \Delta y^2 + 2f''_{x,y}\,\Delta$ negativ sein, es muß also, wenn für $f''_x \cdot \Delta x^2 + 2f''_{x,y} \cdot \Delta$

der Werth $f''_x \cdot \left(\Delta x + \frac{f''_{x,y}}{f''_x} \cdot \Delta y\right)^2 - \frac{(f''_{x,y})^2}{f''_x}\,\Delta y^2$ fu

wird, $f''_x \left(\Delta x + \frac{f''_{x,y}}{f''_x} \cdot \Delta y\right)^2 + f''_y - \frac{(f''_{x,y})^2}{f''_x} \cdot \Delta y^2$ negativ

diese Bedingung wird aber, da beim Maximum f''_x u. f negativ sind, erfüllt, wenn

$f''_y - \frac{(f''_{x,y})^2}{f''_x}$ Null oder negativ ist, also wenn

$$f''_x \cdot f''_y \gtrless (f''_{x,y})^2 \text{ ist.}$$

Für ein Minimum muß $f''_x \left(\Delta x + \frac{f''_{x,y}}{f''_x} \cdot \Delta y\right)^2 + \left[f''_y - \frac{(f''_{x,y})^2}{f''_x}\right.$ posit

Diese Bedingung wird, da beim Minimum f''_x u. f''_y beide sind, erfüllt, wenn

$$f''_x \cdot f''_y \lesseqgtr (f''_{x,y})^2 \text{ ist.}$$

Anmerk. Gewöhnlich erkennt man aus der Funktion selbst, Maximum oder Minimum stattfindet, und hat dann nicht nöthig, zu ob die Bedingungen 2) u. 3) erfüllt sind.

§ 37. Uebungsaufgaben.

1. Wann wird $z = x^2 + xy + y^2 - 3x + 3y$ ein mum oder Minimum?

Lösung. f'_x od. $\frac{dz}{dx} = 2x + y - 3 \;\Big|\; = 0$

f'_y od. $\frac{dz}{dy} = x + 2y + 3 \;\Big|\; = 0$ giebt $x = 3$, $y = -3$.

Da $f''_x = 2$, $f''_y = 2$, $f_{x,y} = 1$, so ist $f''_x \cdot f''_y > (f_{x,y})^2$, wird z ein Minimum für $x = 3$ u. $y = -3$.

2. Die Zahl 9 in drei Theile x, y, z zu zerlegen, so daß Produkt $x^2 y^3 z^4$ ein Maximum wird.

Lösung. $x^2 y^3 (9-x-y)^4$ soll ein Maximum werden.

$$1) \ldots\ldots f'_x = 2xy^3(9-x-y)^4 - x^2 y^3 \cdot 4(9-x-y)^3 \Big| = o$$
$$2) \ldots\ldots f'_y = 3x^2y^2(9-x-y)^4 - x^2 y^3 \cdot 4(9-x-y)^3 \Big| = o$$

Da weder x, noch y, noch $9-x-y$ gleich o sein können, so dividire 1) durch $2xy^3(9-x-y)^3$ und 2) durch $x^2y^2(9-x-y)^3$; dann ist

$$\left.\begin{matrix}(9-x-y)-2x=o\\ 3(9-x-y)-4y=o\end{matrix}\right\} \text{ oder } \left.\begin{matrix}9-3x-y=o\\ 27-3x-7y=o\end{matrix}\right\},$$

daher $x=2$, $y=3$, $z=4$.

Für diese drei Theile von 9 wird $x^2 y^3 z^4$ ein Maximum, da von einem Minimum nicht die Rede sein kann.

Anmerk. **Soll die Zahl a in drei solche Theile zerlegt werden, $x^2 y^3 z^4$ ein Maximum wird,** so ergeben sich als solche $\frac{2}{9}a$, $\frac{3}{9}a$, $\frac{4}{9}a$.

3. Eine Linie a in drei solche Theile x, y, z zu theilen, das daraus konstruirte Dreieck ein Maximum wird.

Lösung. $\sqrt{\frac{a}{2}\left(\frac{a}{2}-x\right)\left(\frac{a}{2}-y\right)\left(x+y-\frac{a}{2}\right)}$

soll ein Maximum sein; dies ist offenbar der Fall, wenn

$\frac{a}{2}\left(\frac{a}{2}-x\right)\left(\frac{a}{2}-y\right)\left(x+y-\frac{a}{2}\right)$ ein Maximum ist.

$$f'_x = -\left(\frac{a}{2}-y\right)\left(x+y-\frac{a}{2}\right) + \left(\frac{a}{2}-x\right)\left(\frac{a}{2}-y\right) \Big| = o$$
$$f'_y = -\left(\frac{a}{2}-x\right)\left(x+y-\frac{a}{2}\right) + \left(\frac{a}{2}-x\right)\left(\frac{a}{2}-y\right) \Big| = o$$

$$\left(\frac{a}{2}-y\right)\left(a-2x-y\right) = o$$
$$\left(\frac{a}{2}-x\right)\left(a-x-2y\right) = o$$

$\frac{a}{2}-y$ kann nicht $=o$ sein, denn dann wäre auch $\frac{a}{2}-x=o$

$\frac{a}{2}-x$ " " " " " " " " $\frac{a}{2}-y=o$

und somit wäre der dritte gesuchte Theil $=o$.

Es ist also zu setzen $a - 2x - y = o$
$a - x - 2y = o$, woraus $x = a/3$, $y = a/3$,
z

Da nun für diese Werthe

$$\left.\begin{aligned} f''_x &= -\tfrac{1}{3}a \\ f''_y &= -\tfrac{1}{3}a \\ f''_{x,y} &= -\tfrac{1}{6}a \end{aligned}\right\} \text{ und } f''_x \cdot f''_y > (f''_{x,y})^2, \text{ so findet ein Maximum Sta}$$

Von allen Dreiecken gleichen Umfangs hat also das gleich den größten Inhalt.

4. Welche Dimensionen hat dasjenige gerade Par pipedum, welches von allen Parallelepipeden gleichen In (V) die kleinste Oberfläche hat?

Lösung. Werden die Dimensionen des Parallel. mit x, y, z (= bezeichnet, so ist die Oberfläche, welche ein Minimum sein soll,

$$2\left(xy + \frac{V}{x} + \frac{V}{y}\right).$$

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 2(y - Vx^{-2}) \\ f'_y &= 2(x - Vy^{-2}) \end{aligned}\right| \begin{matrix} = o \\ = o \end{matrix}\Bigg\} \quad \text{Hieraus } x = \sqrt[3]{V5}, \; y = \sqrt[3]{V5}, \; z = \sqrt[3]{V5}$$

Da für diese Werthe $f''_x = 4$, $f''_y = 4$, $f''_{x,y} = 2$ so hat **von allen Parallelepip gleichen Inhalts der Kubus kleinste Oberfläche.**

5. Innerhalb eines geg. Dreiecks wird ein solcher P gesucht, daß die Summe der von ihm nach den Ecken genen Strahlen ein Minimum ist.

Lösung. Bezeichne PB, PA, PC mit x, y, z; ferner mit ξ und $\angle$ PBA mit $\beta - \xi$, so ist

$$y^2 = c^2 + x^2 - 2cx \cdot \cos(\beta - \xi)$$
$$z^2 = a^2 + x^2 - 2ax \cdot \cos \xi; \text{ daher ist zu untersuchen, w}$$

$$x + \sqrt{c^2 + x^2 - 2cx\cos(\beta - \xi)} + \sqrt{a^2 + x^2 - 2ax\cos\xi} \text{ ein Minimu}$$

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 1 + \frac{x - c\cos(b - \xi)}{y} + \frac{x - a\cos\xi}{z} \\ f'_\xi &= \frac{cx\sin(\beta - \xi)}{y} - \frac{ax\sin\xi}{z} \end{aligned}\right| \begin{matrix} = o \\ = o \end{matrix}$$

Fällt man AD ⊥ BP, BE ⊥ CP, so ist

$(\beta - \xi) = BD.$ $\quad a \cdot \cos \xi = BE,$

$(\beta - \xi) = AD.$ $\quad a \cdot \sin \xi = CE,$ daher

$$\ldots 1 + \frac{x - BD}{y} + \frac{x - BE}{z} = 0 \text{ oder } 1 - \frac{PD}{y} - \frac{PE}{z} = 0$$

$$\ldots \frac{AD}{y} - \frac{CE}{z} = 0.$$

1) folgt $\frac{PD}{y} + \frac{PE}{z} = 1$, oder $\cos APD + \cos EPC = 1$.

2) folgt $\frac{AD}{y} = \frac{CE}{z}$, oder $\sin APD = \sin EPC$,

daher $\angle APD = EPC$, daher

$PD = \frac{1}{2}$, oder $\angle APD = 60°$
$EPC = \frac{1}{2}$, oder $\angle EPC = 60°$.
} Der gesuchte Punkt P liegt demnach so, daß **jeder der Winkel APB, BPC, CPA = 120°** ist.

Zusatz. Konstruirt man über zwei Seiten des gez. △ABC, gleichseitige Dreiecke, und um jedes einen Kreis, so schneiden sich beide Kreise im gesuchten Punkte P.

C. Maxima und Minima mit Nebenbedingungen.

§ 38. Wenn $z = F(x, y)$ die Gleichung einer krummen che ist, so kann gefragt werden, für welche aus $y = f(x)$ ergebenden zusammengehörigen Werthe von x u. y z ein ximum oder Minimum wird, oder mit anderen Worten: nn man in allen Punkten der in der Ebene der x, y genen Kurve $y = f(x)$ Lothe zur Ebene der x, y errichtet, che die krumme Fläche $z = F(x, y)$ schneiden, diejenigen rchschnitte zu bestimmen, welche Maxima oder Minima sind.

Es sei z. B. $z = x^3 - y^2$ und $y = 10 + \frac{3}{2}x$.

$= -3$	$-2\frac{1}{2}$	-2	...	0	....	$3\frac{1}{2}$	4	$4\frac{1}{2}$	5 .... ist
$= 5\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{4}$	7		10		$15\frac{1}{4}$	16	$16\frac{3}{4}$	$17\frac{1}{2}$ ...und
$= -57\frac{1}{4}$	$-54\frac{11}{16}$	-57	...	-100	....	$-189\frac{1}{16}$	-192	$-189\frac{7}{16}$	$-181\frac{1}{4}$....

Es erhält z für die verschiedenen zusammengehörigen Werth
x u. y im Allgemeinen verschiedene Werthe. Um nun zu bestim

für welchen Werth $x^3 - y^2$ oder $x^3 - (10 + \frac{3}{2}x)^2$ ein Max

oder Minimum wird, setze

$$f'_x = 3x^2 - 3(10 + \tfrac{3}{2}x) \text{ oder } 3x^2 - \tfrac{9}{2}x - 30 = 0.$$

Hieraus ergiebt sich $x = 4$ u.

$f'_x = 6x - 9/2$ ist für $x = 4$ positiv, für $x = -2\frac{1}{2}$ negati

Daher ist z ein **Maximum für $x = 2\frac{1}{2}$** und d. zugeh. y =

ein **Minimum für $x = 4$**, „ „ „ y =

Anmerk. Man kann diese Werthe auch finden, ohne den Wert
y in die Gl. für z zu substituiren. Differentiirt man nämlich (nach
die gegebenen Gleichungen $z - x^3 + y^2 = 0$,

$$y - \frac{3}{2}x - 10 = 0, \text{ so ist}$$

1) ..... $dz - 3x^2\,dx + 2y\,dy = 0$

2) ..... $dy - \frac{3}{2}\,dx \qquad = 0.$

$\frac{dz}{dx}$ oder $3x^2 - 2y\frac{dy}{dx}$ ist $= 0$ zu setzen.

Aus 2) folgt $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}$, daher $3x^2 - 3y = 0$ oder

$x^2 - y = 0$ für das Max. oder Mi

Daher mit Hilfe der zweiten geg. Gleichung, die ja ebenfa
das gesuchte x gilt, für welches z ein Maximum oder Minim

$x^2 - \frac{3}{2}x = 10$, woraus $x = -2\frac{1}{2}$ und 4.

§ 39. Uebungsaufgaben.

1. Die Höhe y und den Radius x eines offenen Cyl
zu bestimmen, dessen Oberfläche f bei geg. Inhalte v ei
nimum ist.

Lösung. (1) ... $f = 2x\pi y + x^2\pi$

(2) ... $y = \frac{v}{\pi}x^{-2}$.

Setze $df = 0$, so ist $(y + x)\,dx + x\,dy = 0$

$$(y + x)\,dx - x \cdot \frac{v}{\pi}\,2x^{-3}\,dx = o$$

$$y + x - \frac{2v}{\pi}\,x^{-2} = o. \quad \text{Nun ist aber (2)}$$

$$2y - \frac{2v}{\pi}\,x^{-2} = o; \quad \text{daher } y - x = o.$$

Es ist also **die Oberfläche eines offenen Cylinders vom Inhalte n Minimum, wenn** $y = x = \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$.

2. Welches aus den vier Seiten a, b, c, d konstruirbare reck hat den größten Inhalt?

Lösung. Sei ξ der $\angle$ zwischen a u. b, ψ der dadurch bestimmte $\angle$ zwischen c u. d, so ist der Inhalt $f = \frac{ab}{2}\sin\xi + \frac{cd}{2}\sin\psi$.

Ferner ist, da die Diagonale sich auf 2 Arten ausdrücken läßt,

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\xi = c^2 + d^2 - 2cd\cos\psi.$$

Da die Elimination von ψ sehr umständlich wäre, so eliminire $d\psi$.

Es ist (1) ..... $df = \frac{1}{2}ab\cos\xi\,d\xi + \frac{1}{2}cd\cos\psi\,d\psi = o.$

(2) ..... $2ab\sin\xi\,d\xi = 2cd\sin\psi\,d\psi.$

$$ab\cos\xi \cdot d\xi + cd\cos\psi \cdot d\psi = o$$

$$ab\sin\xi \cdot d\xi - cd\sin\psi \cdot d\psi = o$$

$$ab(\cos\xi \cdot \sin\psi + \sin\xi \cdot \cos\psi)\,d\xi = o.$$

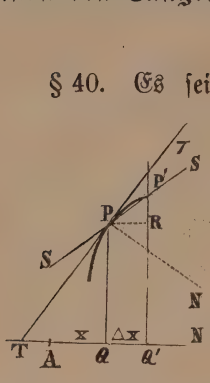
$$\sin(\xi + \psi) = o, \text{ daher } \xi + \psi = 180°.$$

Das gesuchte Viereck ist daher ein Kreisviereck, dessen gegenüberliegende Winkel ξ u. ψ sich aus (2) ergeben. Da nämlich $\cos\psi = -\cos\xi$, so ist $\cos\xi = \frac{a^2 + b^2 - (c^2 + d^2)}{2(ab + cd)}$.

Achter Abschnitt.

Von den Tangenten und der Krümmung der Ku

§ 40. Es sei $y = f(x)$ die Orthogonalgleichung Kurve. Wächst $AQ = x$ um $QQ^1 =$ ändert sich $PQ = y$ um $P'R = \Delta y$, ist nach dem Taylorschen Satze:



$$y + \Delta y = y + f'\Delta x + f'' \cdot \frac{\Delta x}{2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f' + f'' \cdot \frac{\Delta x}{2!}$$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist die Tang. des Winkels, den kante SS mit der Abscissenachse bildet. Je kleiner Δx mehr nähert sich SS der Tangente; für $\Delta x = dx = 0$ mit dieser zusammen, daher wird der Winkel, welchen gente mit der Abscissenachse bildet, durch $\mathbf{tang}\,\tau = \frac{dy}{dx}$

$\operatorname{cotg}\tau = \frac{dx}{dy}$ bestimmt.

Für die Tangente, Subtangente, Normale, Sub ergeben sich folgende Formeln:

Tangente $TP = y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$	Norm. $PN = y\sqrt{1}$
Subtang. $TQ = y \cdot \left(\frac{dx}{dy}\right)$	Subn. $QN = y \cdot \left($

Beispiele.

1. Die Tangente, Subtangente, Normale, Subno Parabel $y = \sqrt{ax}$ zu bestimmen.

$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x}}$ wird für $x = o$ unendlich, daher ist die Tangente im Scheitel Parabel senkrecht zur Abscissenachse.

Für den Punkt, dessen Abscisse x ist, ist

die Tangente $= \sqrt{ax + 4x^2}$	die Normale $= \sqrt{ax + \frac{a^2}{4}}$
die Subtang. $= 2x$	die Subnorm. $= \frac{a}{2}$.

2. Die Tangente, Subtangente, Normale, Subnormale des Kreises $r^2 - x^2$ zu bestimmen.

$\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{x}{y}$ wird für $x = o$ zu Null,

daher ist die Tangente in den Punkten des Kreises, deren Abscisse o, parallel der Abscissenachse.

Für $x = \pm r$ wird $\frac{dy}{dx} = \infty$, daher die zugehörige Tangente senkrecht zur Abscissenachse.

Für $x = \pm \frac{r}{2}\sqrt{2}$ wird $\frac{dy}{dx} = \pm 1$, daher bildet die zugehörige Tangente mit der Abscissenachse einen Winkel von 45°.

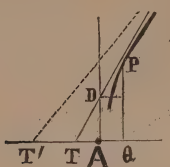
Die Tangente $= \frac{y}{x} r$	die Normale $= r$
die Subtang. $= -\frac{y^2}{x}$	die Subnorm. $= -x$.

3. Für die Exponentiallinie $y = e^x$ ist

$\frac{dy}{dx} = e^x$. Für $x = o$ schneidet die Tangente die Abscissenachse unter einem Winkel von 45°.

Die Tangente $= \sqrt{1 + e^{2x}}$	die Normale $= e^x\sqrt{1 + e^{2x}}$
die Subtang. $= 1$	die Subnorm. $= e^{2x}$.

§ 41. Asymptote einer Kurve heißt diejenige der sich die Kurve immer mehr nähert, ohne sie jemals reichen. Die Asymptote kann daher als Tangente an ei endlich weit entfernten Punkt der Kurve angesehen wer



Ist D der Durchschnitt der Tange der Ordinatenachse, T der mit d cissenachse, so drücke man

$$AT = y \cdot \operatorname{cotang} \tau - x$$

$$AD = y - x \operatorname{tang} \tau$$

als Funktionen von x aus und un ob diese Strecken für $x = \infty$ endl ben oder ∞ werden. Bleiben sie endlich, so giebt es eine As werden sie unendlich, so giebt es keine Asymptote. A eine Strecke endlich, die andere unendlich, so ist die As der einen Koordinatenachse parallel; werden beide Strecke 0, so geht die Asymptote durch den Koordinatenanfan In diesem Falle muß zur Bestimmung der Richtung der tote $\operatorname{tang} \tau$ oder $\frac{dy}{dx}$ für $x = \infty$ gefunden werden.

Beispiele. 1. Für die Kurve $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ ist

$$\operatorname{tang} \tau = \frac{dy}{dx} = \frac{bx}{a}(x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}, \text{ daher}$$

$$AT = y \cdot \operatorname{cotg} \tau - x = -\frac{a^2}{x}.$$

$$AD = y - x \operatorname{tang} \tau = \frac{-ab}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Sowohl AT als AD werden für $x = \infty$ zu Null. D die Asymptote durch den Koordinatenanfang.

Da $\operatorname{tang} \tau = \frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}}$

$$= \frac{b}{a\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}} \text{ für } x = \infty \text{ gleich } \pm \frac{b}{a} \text{ wi}$$

hierdurch die Richtung der beiden Asymptoten bestimmt.

2. Für die Kurve $y = x + \frac{a^2}{4x} + a$ ist

$$\text{tang } \tau = \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{a^2}{4x^2}, \text{ daher}$$

$$AT = y \cdot \text{ctg } \tau - x = \frac{2\,ax}{x-a} = \frac{2a}{1-a/x}.$$

$$AD = y - x \text{ tang } \tau = \frac{2a^2}{x} + 2a.$$

Für $x = \infty$ ist $AT = 2a$ u. $AD = 2a$.

Für $y = \infty$ ist $x = o$, daher $AT = o$ u. $AD = \infty$.

Anmerk. Um keine Asymptote zu verfehlen, ist in den Formeln für AT u. AD sowohl $x = \infty$, als $y = \infty$ zu setzen.

3. Für das kartesische Blatt $x^3 + y^3 - 3axy = o$ ist

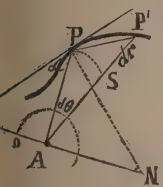
$$\text{tang } \tau = \frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}, \text{ daher } AT = y \cdot \text{ctg } \tau - x = \frac{axy}{ay - x^2}$$

$$= \frac{a}{\frac{a}{x} - \frac{x}{y}}$$

$$AD = y - x \text{ tang } \tau = -\frac{axy}{ax - y^2} = -\frac{a}{\frac{a}{y} - \frac{y}{x}}$$

Für $x = \infty$ ist $y = -\infty$, daher $AT = a$ und $AD = -a$; dadurch ist die Lage der Asymptote bestimmt. (Sie bildet mit der Abscissenachse einen $\angle$ von 135°).

§ 42. Es sei $r = f(\Theta)$ die Polargleichung einer Kurve ert sich Θ um $\triangle\,\Theta$, so ändert sich auch $AP = r$ um SP' r und es ist nach dem Taylorschen Satze



$$r + \triangle r = f(\Theta) + \left(\frac{dr}{d\Theta}\right) \cdot \triangle\Theta + \left(\frac{d^2r}{d\Theta^2}\right) \frac{\triangle\Theta^2}{2!} \quad \ldots\ldots$$

$$\frac{\triangle r}{\triangle\Theta} = \left(\frac{dr}{d\Theta}\right) + \left(\frac{d^2r}{d\Theta^2}\right) \frac{\triangle\Theta}{2!} \quad \ldots\ldots$$

Da Bogen $PS = r \cdot \triangle\,\Theta$, so ist

$$\frac{SP'}{SP} = \frac{1}{r}\left(\frac{dr}{d\Theta}\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{d^2r}{d\Theta^2}\right) \frac{\triangle\Theta}{2!} \quad \ldots$$

Ist $\Delta\Theta$ unendlich klein, $= d\Theta$, so wird die Sekant
zur Tangente, und ist für diese **tang** $\tau = \frac{1}{r}\left(\frac{dr}{d\Theta}\right)$.
ergeben sich leicht folgende Formeln:

die Tangente $= r\sqrt{1+r^2\left(\frac{d\Theta}{dr}\right)^2}$	die Norm. $= \sqrt{r^2+($
die Subtang. $= r^2\left(\frac{d\Theta}{dr}\right)$	die Subn. $= \left(\frac{dr}{d\Theta}\right)$

Beispiele.

1. $r = \frac{a}{2\pi}\,\Theta$ (archimedische Schraube).

$dr = \frac{a}{2\pi}d\Theta$, daher $\tan\tau = \frac{a}{2r\pi} = \frac{1}{\Theta}$ und tang $\alpha = \Theta$. D
die tang des Winkels, den die Tangente mit dem Radiu
bildet, immer gleich dem Polarwinkel Θ.
Für $\Theta = o$ fällt die Tangente mit dem Rad. vektor zusa
Für $\Theta = \infty$ steht die Tangente auf dem Rad. vektor senk

Tangente $= \frac{a}{2\pi}\,\Theta\sqrt{1+\Theta^2}$	Normale $= \frac{a}{2\pi}\sqrt{1}$
Subtang. $= \frac{a}{2\pi}\,\Theta^2$	Subnorm. $= \frac{a}{2\pi}$

2. $r = e^{\vartheta}$ (Exponential-Spirale).

$dr = e^{\vartheta}\cdot d\vartheta$, daher tang $(90-\tau) = \frac{1}{r}\cdot e^{\vartheta} = 1$. Daher b
Tangente an die Exponentialspirale mit dem Radiusvek
einen Winkel von 45°.

Tangente $= r\sqrt{2}$	Normale $= r\sqrt{2}$
Subtang. $= r$	Subnorm. $= r$.

Bei der Exponentialspirale sind also die Tangenten u. N
einander gleich; ebenso die Subtangenten und Subnorma

§ 43. Wenn zwei Kurven $y = f(x)$ u. $y = \varphi(x)$ fü
bestimmten Werth x_o dasselbe y haben, so daß also fü
Werth x_o die Funktion $f(x_o) = \varphi(x_o)$ ist, so gehe
Kurven durch denselben Punkt P_o. Ist nun für x_o

$= \varphi'(x_0)$, so haben beide Kurven im Punkte P_0 eine schaftliche Tangente; es findet dann zwischen den Kurven Berührung ersten Grades" Statt. Ist außerdem $f''(x_0) = \varphi''(x_0)$, so findet eine „Berührung zweiten s" Statt, ꝛc. Je mehr aufeinanderfolgende Differential- nten einander gleich sind, um so inniger schmiegen sich iden Kurven in der Nähe ihres gemeinsamen Punktes einander.

44. Aufgabe. Gegeben ist die Parabel $y = \sqrt{x}$. Welche lische Linie $y = ax^3 + bx + c$ hat mit ihr eine möglichst Berührung im Punkte P_0 dessen Abscisse $x_0 = 4$.

Lösung.

$f = \sqrt{x}$	$\varphi = ax^3 + bx + c$
$f' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\varphi' = 3ax^2 + b$
$f'' = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$	$\varphi'' = 6ax.$

Da für $x_0 (= 4)$ $f = \varphi$ ist, so ist $2 = a \cdot 64 + b \cdot 4 + c$. Ferner ist

$$\frac{1}{4} = 3a \cdot 16 + b$$

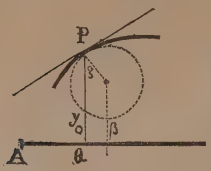
$$\frac{1}{32} = 6a \cdot 4.$$

Hieraus $a = -\frac{1}{768}$, $b = \frac{5}{16}$, $c = \frac{5}{6}$ daher die gesuchte Kurve: $y = -\frac{1}{768}x^3 + \frac{5}{16}x + \frac{5}{6}$.

Anmerk. Da die gesuchte parabolische Linie $y = ax^3 + bx + c$ nur drei zu bestimmende Koefficienten enthält, so kann für sie und $y = \sqrt{x}$ nur eine Berührung zweiten Grades gefordert werden. Hätte die gesuchte parabolische Linie die Form $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ haben sollen, so hätte für sie und die Parabel $y = \sqrt{x}$ eine Berührung III. Grades gefordert werden können.

45. Erklärung. Krümmungskreis heißt derjenige der mit einer Kurve $y = f(x)$ in einem gegebenen derselben die möglichst innigste Berührung hat; Krümmradius heißt der Radius dieses Kreises.

§ 46. Aufgabe. Welches ist der Krümmungskreis fi
Kurve $y = f(x)$ im Punkte P, dessen Koordinaten x_0 u. y



Lösung. Seien α u. β die Koordinat
Mittelpunktes des gesuchten Krümmungskrei
der Krümmungsradius, also
$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \varrho^2$ die Gl. des Krümm
Für x_0 ist zugleich

$$y = f(x) \text{ und } y = \beta + \sqrt{\varrho^2 - (x-\alpha)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{(x-\alpha)}{\sqrt{\varrho^2 - (x-\alpha)^2}}$$

$$f''(x) = -\frac{\varrho^2}{\sqrt{[\varrho^2 - (x-\alpha)^2]^3}}$$

Aus diesen drei Bestimmungsgleichungen ergeben sich die gesuchten
α, β, ϱ, nämlich

$$\varrho^{*}) = -\frac{(1+f_i^2)}{f_{ii}}$$

$$(x_0 - \alpha) = \frac{f'(1+f_i^2)}{f_{ii}} \text{ oder } \alpha = x_0 - \frac{f'}{f''}(1+f_i^2)$$

$$(y_0 - \beta) = -\frac{1+f_i^2}{f_{ii}} \text{ oder } \beta = y_0 + \frac{1+f_i^2}{f_{ii}}.$$

§ 47. Die Krümmungen zweier sich in P von inn
rührenden Kreise verhalten sich umgekehrt, wie die Radi

Beweis. Man denke sich Punkt P auf beiden Kreisen bis Z un
wegt, so daß $\angle POZ = Poz$. In Z und z ist P gleichviel von sei
sprünglichen Richtung abgewichen. Daher ist die Krümmung des K
soviel mal größer, als die des Kreises O, als Bogen Pz in PZ, o
Po im Radius PO enthalten ist.

Anmerk. Wird die Krümmung eines Kreises vom Radius 1 a
heit gesetzt, so sind die Krümmungen der Kreise vom Radius 2, 3,
auszudrücken durch $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ . . . . $1/r$.

Zur Beurtheilung der Krümmung, die eine Kurve in einem bes
Punkte hat, dient der Krümmungskreis für diesen Punkt; je grö

---

*) Da ϱ (als absolute Linie) stets positiv ist, so muß von dem $\pm$
der Wurzel dasjenige genommen werden, welches ϱ positiv giebt, d
$+$ Zeichen, wenn die Kurve konkav, also f'' negativ ist, das $-$
wenn die Kurve konvex ist.

ungsradius ist, je schwächer ist die Krümmung der Kurve in diesem , und je kleiner der Krümmungsradius ist, desto größer ist die Krümder Kurve.

a $\varrho = -\frac{(1+f_{'}^{2})^{\frac{3}{2}}}{f_{''}}$, so ist für $f_{''}=0$ der Werth von ϱ unendlich daher die Krümmug $\left(\frac{1}{\varrho}\right)=0$. Dieser Fall tritt bei allen Wendet ein.

§ 48. Aufgaben.

. Die Krümmung der Parabel $\mathbf{y=\sqrt{px}}$ für einen been Punkt, dessen Koodinaten x u. y sind, zu bestimmen.

Lösung. $y=\sqrt{px}$

$y'=\frac{1}{2}\sqrt{p/x}$

$y''=-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{p}{x^3}}$

$\varrho=\mp\frac{(1+y_{'}^{2})^{\frac{3}{2}}}{y_{''}}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(4x+p)^3}{p}}$

er Krümmungsradius für den Scheitel der Parabel $(x=o)$ ist daher

Mit wachsendem x wächst ϱ, die Krümmung wird also immer ger und ist daher im Scheitel der Parabel am stärksten.

2. Die Krümmung der Ellipse $\mathbf{y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}$ zu been.

$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

$y'=-\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}$

$y''=-\frac{ab}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$

$\varrho=\mp\frac{(1+y_{'}^{2})^{\frac{3}{2}}}{y_{''}}$ oder, nachdem die Werthe von y' und y'' substituirt und die nöthigen Umformungen vorgenommen,

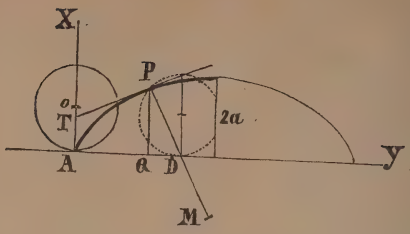
$\varrho=\frac{[a^2(a^2-x^2)+b^2x^2]^{\frac{3}{2}}}{a^4b}$.

Für $x=o$ ist $\varrho=\frac{a^2}{b}$;

für $x=a$ / für $x=-a$ ist $\varrho=\frac{b^2}{a}$, also kleiner, als für $x=o$. Demnach ist die Krümmung der Ellipse in ihren Durchschnitten mit der Abscissenachse größer, als in ihren Durchschnitten mit der Ordinatenachse.

3. Die Krümmung der Cykloide

$$x = a \cdot \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{a-y}{a}\right) \mp \sqrt{2ay - y^2}$$ zu bestimm



Lösung. Da x al gegeben, so vertausche di ordinatenachsen, dann ist

$$y = a \cdot \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{a-}{a}\right.$$

$\sqrt{2ax - x^2}$, oder, wenn nur die erste Hälfte der Cykloide betrachtet w

$$y = a \cdot \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{a-x}{a}\right) - \sqrt{2ax - x^2}.$$ Daher

$$y' = \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{x}{\sqrt{2ax - x^2}} \qquad \varrho = \frac{(1 + y_1'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

$$y'' = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{ax}{\sqrt{(2ax - x^2)^3}} \qquad = 2\sqrt{2ax}.$$

Da die Sehne $PD = \sqrt{2ax}$, so ist **der Krümmungsradius für Punkt der Cykloide doppelt so groß, als die entsprechende Sehn des Erzeugungskreises**, daher

$\varrho = PM$ für jeden Punkt der Cykloide leicht konstruirbar ist.
Für $x = o$ ist $\varrho = o$, also der Krümmungsradius der Cykloide in A unen
Für $x = 2a$ ist $\varrho = 4r$, also die Krümmung der Cykloide in B ein Mini

=

§ 49. Ist y nicht direkt als $f(x)$ gegeben, sondern

$$\left.\begin{aligned} y &= \varphi(\Theta) \\ x &= \psi(\Theta) \end{aligned}\right\}$$ so kann doch y als Funktion von x angesehen we

da jedem x ein bestimmtes y entspricht. Es handelt sich da dy zu bestimmen, wenn x sich um ein solches dx ändert, d Größe von $d\theta$ abhängig ist.

$$\left.\begin{aligned} \text{Es ist } dy &= \varphi'(\Theta) \cdot d\Theta \\ dx &= \psi(\Theta) \cdot d\Theta \end{aligned}\right\}$$ daher $f'x$ oder $\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\varphi'(\Theta)}{\psi(\Theta)}$, also $f'x$

Funktion v

Wird weiter nach Θ differentiirt, so ist

$$d(f'x) = \frac{\psi' \varphi'' \cdot d\Theta - \varphi' \psi'' \cdot d\Theta}{\psi_t^2}.$$

Wird nun links mit dx, rechts mit $\psi' \cdot d\Theta$ dividirt, so ergiebt sich

$$\frac{d(f'x)}{dx} \text{ oder } f''_x = \frac{\psi' \varphi'' - \varphi' \psi''}{\psi_t^3}.$$

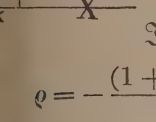
Setze nun $\varphi' = \frac{dy}{d\Theta}$, $\psi' = \frac{dx}{d\Theta}$,

$\varphi'' = \frac{d^2y}{d\Theta^2}$, $\psi'' = \frac{d^2x}{d\Theta^2}$, so ist

$$f''_x = \frac{\frac{dx}{d\Theta} \cdot \frac{d^2y}{d\Theta^2} - \frac{dy}{d\Theta} \cdot \frac{d^2x}{d\Theta^2}}{\left(\frac{dx}{d\Theta}\right)^3}$$

$$= \frac{dx \cdot d^2y - dy \cdot d^2x}{dx^3}, \text{ also ebenfalls eine Funktion von } \Theta.$$

§ 50. Krümmungsradien für Kurven, die durch Polargleichung gegeben sind.



Sei $r = f(\Theta)$ die Polargleichung einer Kurve. Es ist

$y = r \sin \Theta$, also eine $\varphi(\Theta)$

$x = r \cos \Theta$, also eine $\psi(\Theta)$.

In die Formel für den Krümmungsradius

$$\varrho = -\frac{(1 + f_t^2)^{\frac{3}{2}}}{f_{tt}}$$ substituire $f' = \frac{dy}{dx}$

$$f'' = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^3},$$

$dy = dr \sin \Theta + r \cos \Theta \cdot d\Theta$

$dx = dr \cos \Theta - r \sin \Theta \cdot d\Theta$

$d^2y = \sin \Theta \cdot d^2r + 2\, dr \cos \Theta \cdot d\Theta - r \sin \Theta \cdot d\Theta^2$

$d^2x = \cos \Theta \cdot d^2r - 2\, dr \sin \Theta \cdot d\Theta - r \cos \Theta \cdot d\Theta^2$.

Nach einer etwas umständlichen Multiplikation resultirt

$$\varrho = -\frac{(r^2\, d\Theta^2 + dr^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2\, d\Theta^3 + 2\, dr^2\, d\Theta - r\, d^2r\, d\Theta}$$

Daher ergiebt sich als Krümmungsradius für eine Kurve, Gleichung in Polarkoordinaten gegeben ist:

$$\varrho = \mp \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2 - r\left(\frac{d^2r}{d\Theta^2}\right)}$$

Beispiel.

Zur Bestimmung der Krümmungsradien der Exponentialspirale r hat man

$$\frac{dr}{d\Theta} = e^{\vartheta} \qquad \left(\frac{d^2r}{d\Theta^2}\right) = e^{\vartheta}$$

$$\varrho = \frac{(r^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r^2 - r^2} = r\sqrt{2},$$

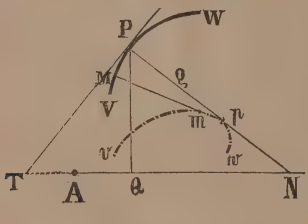
also für jeden Punkt gleich der Nor Daher ist für die Exponentialspirale die vom nach dem Centrum des Krümmungskreises gezogene Gerade stets gleich Radiusvektor.

Neunter Abschnitt.

Evolventen und Evoluten.

§ 51. Erklärung. Die Kurve, welche der geometr Ort der Mittelpunkte aller Krümmungskreise einer Kurve $y = f$ ist, heißt die Evolute*) dieser Kurve, $f(x)$ selber Evolvente.

§ 52. Aufgabe. Die Gl. der Evolute von VW zu finden



Lösung. Seien x und y die K dinaten eines Punktes P der VW, P der zu P gehörige Krümmungsradius, die Koordinaten von p α u. β, so ist (

$$(1) \ldots\ldots \alpha = x - \frac{f'}{f''}(1 + f_1^2)$$

$$(2) \ldots\ldots \beta = y + \frac{1 + f_1^2}{f''}.$$

*) Diese Kurven entdeckte Huyghens und wandte sie auf die von erfundenen Pendeluhren an.

Hierin sind y, f', f'' Funktionen von x. Für jeden Werth von x ergeben estimmte Werthe von α u. β; umgekehrt ergiebt sich für jedes bestimmte bestimmtes x und somit auch durch Substitution in (2) ein bestimmtes Funktion von α.

Beispiel. Die Gl. für die Evolute der **Parabel** $y = \sqrt{ax}$ zu finden.

$f' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x}}$ | (1) .... $\alpha = 3x + \frac{a}{2}$ | $x = \frac{\alpha - a/2}{3}$, daher durch

$f'' = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{a}{x^3}}$ | (2) .... $\beta = -4\sqrt{\frac{x^3}{a}}$ | Substitution in (2)

$$\beta = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{(\alpha - a/2)^3}{3a}}.$$

§ 53. Bezeichnet man $\frac{1}{f''}(1 + f_1^2)$, welches eine Funktion x ist, mit u (x), so ist

(1) . . . . . $\alpha = x - f' u$

(2) . . . . . $\beta = y + u$.

Durch Differentiiren ergiebt sich

$$d\alpha = dx - u \,.\, df' - f' \,.\, du$$
$$= dx - u \,.\, f'' \,.\, dx - f' \,.\, du$$
$$= dx - (1 + f_1^2)\, dx - f' du$$
$$= -f_1^2\, dx - f' du.$$

$d\beta = dy + du$, daher

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{dy + du}{-f_1^2\, dx - f' du} = \frac{dy + du}{-f_1 (dy + du)} = -\frac{1}{f'}.$$

$\frac{d\beta}{d\alpha}$ ist die tang des Winkels, den die durch p an die Evolute gelegte Tangente mit AX bildet = tang pNX, daher tang pNA = $\frac{1}{f'}$

Da nun tang PT A = f', so ist $\angle$ pNA + PTA = 90°, also bilden die Linien Pp u. pN eine einzige Gerade. Es folgt daraus der Satz:

Die auf einer Kurve senkrechten Krümmungsradien tangiren Evolute dieser Kurve.

§ 54. Sind m u. p zwei benachbarte Punkte der Evolute, t der Bogen mp der Evolute gleich der Differenz der zugehörigen Krümmungsradien der Evolvente.

Beweis.

Es seien α u. β die Koordinaten von m, $Mm = \varrho$, $mp = b$, f

$db = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2}$. Subst. aus dem vorigen § $d\alpha$ u. $d\beta$, so

$db = (dy + du)\sqrt{1 + f_1'^2}$ woraus durch Differentiiren nach e
Umformungen resultirt:

$$d\varrho = -(dy + du)\sqrt{1 + f_1'^2}.$$

Es ist also $db = d\varrho$, mithin Bogen mp zwischen den Na
punkten m u. p gleich der Differenz der zugehörigen Krümm
radien.

Anmerk. Legt man um vmp einen Faden, befestigt ihn
und wickelt ihn dann ab, so beschreibt Punkt v die Kurve V

§ 55. Aufgaben.

1. Die Evolute der Ellipse $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ zu find

Lösung. Die Ellipsengl. läßt sich auf die Form $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ brin

daher $\frac{2y}{a^2} \cdot dx + \frac{2y}{b^2} \cdot dy = 0$, woraus $\frac{dy}{dx}$ oder $f' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$ und

$\frac{d^2y}{dx^2}$ oder $f'' = -\frac{b^4}{a^2 y^3}$, daher

$$\alpha = x - \frac{xy^2}{b^2}\left(1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}\right)$$

$$\beta = y - \left(\frac{a^4 y^2 + b^4 x^2}{a^2 b^4}\right) \cdot y$$

woraus nach den gehörigen Substitutionen

$$\alpha = \frac{(a^2 - b^2)\, x^3}{a^4}, \text{ daher } x = \sqrt[3]{\frac{a^4 \cdot \alpha}{a^2 - b^2}} = \sqrt[3]{\frac{a^4 \alpha}{c^2}}$$

$$\beta = -\frac{(a^2 - b^2)\, y^3}{b^4} \text{ daher } y = -\sqrt[3]{\frac{b^4 \beta}{a^2 - b^2}} = -\sqrt[3]{\frac{b^4 \beta}{c^2}}$$

Es ist aber $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, daher $\sqrt[3]{a^2 \alpha^2} + \sqrt[3]{b^2 \beta^2} = \sqrt[3]{c^4}$.

Hieraus folgt, nachdem auf beiden Seiten kubirt worden,
$27\, a^2 b^2 c^4 \alpha^2 \beta^2 = (c^4 - a^2 \alpha^2 - b^2 \beta^2)^3$, eine Kurve 6. Ordnung.

Zusatz. Für $a = o$, also für den Punkt, wo die Evolute der Ellipse die Ordinatenachse schneidet, ist $\beta = \frac{a^2 - b^2}{b}$.

Für $\beta = o$, also für den Punkt, wo die Evolute die Abscissenachse schneidet, ist $\alpha = \frac{b^2}{a}$.

Die Evolute der Cykloide

$$x = a \cdot \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{a - y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2}$$ zu finden.

Lösung. Durch Differentiiren nach y ergiebt sich

$$dx = \frac{a}{\sqrt{2ay - y^2}} \cdot dy - (2ay - y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (a - y)\, dy \text{ oder}$$

$$\frac{dy}{dx} \text{ oder } f' = \sqrt{\frac{2a}{y} - 1}. \text{ Ferner ist}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} \text{ oder } f'' = -\frac{a}{y^2}.$$

Durch Substituirung dieser Werthe von f' u. f'' in die Evolutengleichungen § 52 folgt:

$$\alpha = x - \frac{f'}{f''}(1 + f_1'^2)$$

$$\beta = y + \frac{1 + f_1'^2}{f''}$$

$$\alpha = x + 2\sqrt{2\,ay - y^2} = a \cdot \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{a - y}{a}\right) + \sqrt{2ay - y^2}$$

$\beta = -y$, somit die Gleichung der Evolute der Cykloide:

$$\alpha = a \cdot \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{a + \beta}{a}\right) + \sqrt{-2a\beta - \beta^2}.$$

Die Evolute der Cykloide ist also eine dieser kongruente Cykloide. Damit α reell wird, muß β negativ genommen werden.

Für $\beta = -2a$ folgt $\alpha = a \cdot \operatorname{arc}(\cos = -1)$
$= a\pi$, also gleich dem Umfange des Erzeugungskreises der gegebenen Cykloide.

Zehnter Abschnitt.

Die wichtigsten Sätze der Integralrechnung.

§ 56. Erklärung. Die Integralrechnung lehrt zu e gegebenen Differentiale die ursprüngliche Funktion (das I gral) finden. $\int d\varphi = \varphi$.

§ 57. Aus § 8 ergeben sich unmittelbar folgende grationsformeln:

1. $\int x^n \cdot dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$
2. $\int e^x \cdot dx = e^x$
3. $\int \frac{1}{x} \cdot dx = \lg x$
4. $\int a^x \cdot dx = \frac{1}{\lg a} \cdot a^x$
5. $\int \sin x \cdot dx = -\cos x$
6. $\int \cos x \cdot dx = \sin x$
7. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -$ co
8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \text{tang}$
9. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{arc (sin}$
   $= -\text{arc (cos}$
10. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \text{arc (tan}$
    $= -\text{arc (cotg}$

Anmerk. Die Formel 1) gilt dann nicht, wenn $n = -1$; in d Falle ist Formel 3) anzuwenden.

§ 58. Da zwei Funktionen, die sich nur durch das stante Glied unterscheiden, dasselbe Differential haben, so

jedem Integrale eine beliebige ± Konstante hinzufügen,
$\int x^3 \cdot dx = \frac{1}{4}x^4 + c.$

Jeder konstante Faktor unter dem Integralzeichen kann stets dasselbe gesetzt werden, z. B.

$\int ax^3\, dx = a \int x^3\, dx = \frac{a}{4} x^4 + c.$

§ 59. Uebungsaufgaben.

$$\int \frac{1}{x+1} dx = \int \frac{1}{y} dy = \lg y = \lg (x+1).$$

$$\int \frac{1}{x+a} dx = \int \frac{1}{y} dy = \lg y = \lg (x+a).$$

$$\int \frac{1}{x-a} dx = \int \frac{1}{y} dy = \lg y = \lg (x-a).$$

$$\int \frac{1}{(x-a)^3} dx = \int y^{-3} dy = -\frac{1}{2} y^{-2} = -\frac{1}{2(x-a)^2}.$$

$$\int \frac{1}{(x-a)^n} dx = \frac{1}{-n+1} (x-a)^{-n+1}.$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{a}{1+y^2} \cdot dy$$

$$= \frac{1}{a} \operatorname{arc} \left(\operatorname{tang} \frac{x}{a}\right).$$

$$\int \frac{1}{a^2 x^2 + 1} dx = \int \frac{1}{y^2+1} \cdot \frac{1}{a} dy = \frac{1}{a} \operatorname{arc} (\operatorname{tang} = ax).$$

$$\int e^{ax} dx = \int e^y \cdot \frac{1}{a} dy = \frac{1}{a} e^{ax}.$$

$$\int e^{-ax} \cdot dx = -\frac{1}{a} e^{-ax}.$$

$$\int \cos ax \cdot dx = \int \cos y \cdot \frac{1}{a} dy = \frac{1}{a} \sin ax.$$

11. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,dx = \arc\left(\sin = \frac{x}{a}\right).$

12. $\int \frac{x\,dx}{ax^2 + b} = \int \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{2a} = \frac{1}{2a} \lg (ax^2 + b).$

Anmerk. 1. **Ist**, wie in diesem Beispiele, **der Zähler ei integrirenden Bruches das Differential des Nenners,** sehen von einem konstanten Faktor), so ist das Integral stets dem lg des Nenners.

13. $\int (1 - x^4)^7\, x^3\, dx = \int y^7 \cdot -\frac{1}{4}\,dy = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8}(1 - x^$

14. $\int (1 - x^3)^{-6}\, x^2\, dx = \int y^{-6} \cdot -\frac{1}{3}\,dy = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}(1 - x^3)$

15. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \int (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot x\,dx = \int y^{-\frac{1}{2}} \cdot -\frac{1}{2}\,dy$

$= -(1 -$

Anmerk. 2. **Ist**, wie in den Beisp. 13—15, **der eine eines zu integrirenden Produktes eine Potenz, der** (abgesehen von einem konstanten Faktor) **das Differenti Basis dieser Potenz**, so ist das Integral gleich der höheren Potenz.

16. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\, x\,dx = -(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}.$

17. $\int \lg x \cdot \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}(\lg x)^2.$

18. $\int (ax + b)^2\,dx = \frac{1}{3a}(ax + b)^3.$

19. $\int (x^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}}\, x\,dx = (x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}.$

20. $\int (ax^2 + bx + c)^4 \cdot (2ax + b)\,dx = \frac{1}{5}(ax^2 + bx +$

21. $\int (ax^2 + bx + c)^{\frac{1}{4}} \cdot (2ax + b)\,dx = \frac{4}{7}(ax^2 + bx +$

§ 60. Theilweise Integration. Sind f und φ Funktionen von x, so ist $\int f\,d\varphi = \varphi . f - \int \varphi\,df$, d. h.

das Integral eines Produktes zweier Faktoren, von denen der zweite $d\varphi$ integrirbar ist, ist gleich dem ersten Faktor mal dem Integral φ des zweiten Faktors, vermindert um das Integral des Produktes aus diesem φ und dem Differential des ersten Faktors.

Beweis. Da $d(f\varphi) = \varphi df + f d\varphi$, so ist

$$f\varphi = \int \varphi\,df + \int f\,d\varphi, \text{ daher}$$

$$\int f\,d\varphi = f\varphi - \int \varphi\,df.$$

Beispiele.

1. $\int x . e^x\,dx = x . e^x - \int e^x\,dx$
$= x . e^x - e^x = (x-1)e^x.$

2. $\int \cos x . x\,dx = \int x . \cos x\,dx$
$= x \sin x - \int \sin x\,dx = x \sin x + \cos x.$

3. $\int x^2 \cos x\,dx = x^2 \sin x - \int \sin x . 2x\,dx$
$= x^2 \sin x + 2x \cos x - \int \cos x\,d\,2x$
$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x.$

4. $\int \lg x . dx = x \lg x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx$
$= x \lg x - x.$

5. $\int x \lg x\,dx = \int \lg x . x\,dx = \frac{1}{2} x^2 \lg x - \int \frac{1}{2} x^2 \frac{1}{x}\,dx$
$= \frac{1}{2} x^2 \lg x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} x^2$
$= \frac{1}{2} x^2 \lg x - \frac{1}{4} x^2.$

6. $\int \frac{1}{x} \lg x\,dx = \int \lg x \cdot \frac{1}{x}\,dx = \lg x \cdot \lg x - \int \lg x \cdot \frac{1}{x}\,dx$

$$2 \int \frac{1}{x} \lg x\,dx = (\lg x)^2, \text{ daher}$$

$$\int \frac{1}{x} \lg x\,dx = \frac{1}{2} (\lg x)^2$$

7. $\int x^n \lg x \, dx = \int \lg x \, . \, x^n dx$

$$= \frac{1}{n+1} x^{n+1} \lg x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \lg x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} .$$

8. $\int \text{arc}\,(\text{tang} = x) dx = x \, . \, \text{arc}(\text{tang} = x) - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2}$

also nach § 59

$$= x \, . \, \text{arc}\,(\text{tang} = x) - \frac{1}{2} \lg (1 + x^2)$$

9. $\int \text{arc}\,(\sin = x)\, dx = x \, . \, \text{arc}\,(\sin = x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$= x \, . \, \text{arc}\,(\sin = x) - \int x (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

also nach § 59, 14 An

$$= x \, . \, \text{arc}\,(\sin = x) + (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

10. $\int \text{arc}\,(\cos = x)\, dx = x \, . \, \text{arc}\,(\cos = x) - \sqrt{1-x^2}$

§ 61. Integration rational gebrochener Fu
tionen, die sich in Partialbrüche zerlegen las
deren Zähler Funktionen I Grades oder konstant, deren Ne
Funktionen I oder II Grades, oder Potenzen davon sind.

1. $\int \frac{5x-2}{x^2+x-20} dx = \int \frac{2}{x-4} dx + \frac{3}{x+5} dx$

$$= 2 \lg (x-4) + 3 \lg (x+5)$$

2. $\int \frac{27}{x^2+x-20} dx = \int \frac{3}{x-4} dx - \frac{3}{x+5} dx$

$$= 3 \lg \frac{x-4}{x+5} = \log \left(\frac{x-4}{x+5}\right)^3 .$$

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2a}}{a+x}\,dx + \frac{\frac{1}{2a}}{a-x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{a+x} + \frac{dx}{a-x}$$

$$= \frac{1}{2a}\lg\frac{a+x}{a-x}.$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2}\,dx = \int \frac{-\frac{1}{2a}}{x+a}\,dx + \frac{\frac{1}{2a}}{x-a}\,dx$$

$$= \frac{1}{2a}\int -\frac{dx}{x+a} + \frac{dx}{x-a}$$

$$= \frac{1}{2a}\lg\frac{x-a}{x+a}$$

$$\int \frac{x^2 - 2x + 21}{(x-3)^2(x+3)}\,dx = \int \frac{4\,dx}{(x-3)^2} + \frac{dx}{x+3}$$

$$= -4(x-3)^{-1} + \lg(x+3)$$

$$\frac{3x^3 - 27x^2 + 85x - 69}{(x-3)^3 \cdot (x+3)}\,dx = \int \frac{4}{(x-3)^3}\,dx + \frac{3}{x+3}\,dx$$

$$= 4\int (x-3)^{-3}\,dx + 3\int \frac{1}{x+3}\,dx$$

$$= -2(x-3)^{-2} + 3\lg(x+3)$$

$$\frac{x^3 + 5x^2 - 13x - 75}{x^2 + x - 20}\,dx = \int \left(x + 4 + \frac{3x+5}{x^2+x-20}\right) dx$$

$$= \tfrac{1}{2}x^2 + 4x + \int \frac{17}{9(x-4)}\,dx + \int \frac{10}{9(x+5)}\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}x^2 + 4x + \tfrac{17}{9}\lg(x-4) + \tfrac{10}{9}\lg(x+5).$$

§ 62. Integration der wichtigsten irrationalen Funktionen.

1. $\int \frac{1}{\sqrt{x+a}}\,dx = \int (x+a)^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2\sqrt{x+a}.$

2. $\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}}\,dx = \int (ax+b)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b}$

3. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx.$ Setze $\sqrt{x^2+a^2} = y - x$, so ist

$$x^2 + a^2 = y^2 - 2xy + x^2$$
$$y\,dy = (y-x)\,dy$$
$$\frac{dx}{y-x} = \frac{dy}{y}, \text{ daher das gesuchte Integral}$$
$$= \int \frac{dy}{y} = \lg(x + \sqrt{x^2+a^2})$$

4. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-ax}}\,dx.$ Setze $\sqrt{x^2-ax} = y - x$, so ist

$$-ax = y^2 - 2xy, \text{ woraus}$$
$$\frac{dx}{y-x} = \frac{2\,dy}{2y-a}, \text{ daher das gesuchte Integral}$$
$$= \int \frac{dy}{y-\frac{a}{2}} = \lg\left(x - \frac{a}{2} + \sqrt{x^2-ax}\right).$$

5. $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx.$ Setze $\sqrt{ax^2+bx+c} = y -$

so ist $bx + c = y^2 - 2xy\sqrt{a}$,

$b\,dx = 2y\,dy - 2y\sqrt{a}\cdot dx - 2x\sqrt{a}\cdot dy$

$\frac{dx}{y - x\sqrt{a}} = \frac{dy}{y\sqrt{a} + \frac{b}{2}}$ daher das ge

In

$$= \int \frac{dy}{y\sqrt{a} + \frac{b}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \lg\left(ax + \frac{b}{2} + \sqrt{a}\cdot\sqrt{ax^2+bx}\right.$$

$\int \frac{1}{\sqrt{-ax^2+bx+c}}\,dx$. Setze $-ax^2+bx+c$ oder

$-(ax^2-bx)+c$ oder $-\left(x\sqrt{a}-\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2+\frac{b^2}{4a}+c$

$=-y^2+m^2$, so daß $x\sqrt{a}-\frac{b}{2\sqrt{a}}=y$,

$dx\sqrt{a}=dy$, also $dx=\frac{1}{\sqrt{a}}dy$, daher das gesuchte Integral

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dy}{\sqrt{m^2-y^2}}=\frac{1}{m\sqrt{a}}\int\frac{dy}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{m}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\operatorname{arc}\left(\sin=\frac{y}{m}\right)=\frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arc}\left[\sin=\frac{x\sqrt{a}-\frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{\frac{b^2}{4a}+c}}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arc}\left(\sin=\frac{2ax-b}{\sqrt{b^2+4ac}}\right)$$

Anmerkg. Ist in Beisp. 5 u. 6 $a=0$, so ist nach Beisp. 2.

$$\int\frac{1}{\sqrt{bx+c}}=\frac{2}{b}\sqrt{bx+c}$$

$\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=-\sqrt{1-x^2}$. (siehe § 59, 16.

$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int x\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=-x\sqrt{1-x^2}-\int-\sqrt{1-x^2}\cdot dx$

$$=-x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$=-x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \text{ daher}$$

$$2\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=-x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

das ges. Integral $=-\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arc}(\sin=x)$.

9. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,dx$. Setze $\frac{x}{a} =$

also $dx = a\,dy$, so ist das gesuchte I

$$= \frac{a}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\,dy$$

$$= \arc\left(\sin = \frac{x}{a}\right).$$

10. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{x^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}$. Setze $\frac{x}{a} = y$, also dx so ist das gesuchte I

$$= a^2 \int \frac{y^2}{\sqrt{1 - y^2}}\,dy \text{ oder (nach Bsp.}$$

$$= a^2 \left[-\frac{y}{2}\sqrt{1 - y^2} + \frac{1}{2}\arc(\sin = y)\right.$$

$$= -\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arc\left(\sin = \frac{x}{a}\right).$$

§ 62. Integration der wichtigsten logarithmischen, exponential- und trigonometrischen Funktionen.

1. $\int \lg x\,.\,dx$ (s. § 60,4) $= x \lg x - x$.
2. $\int x \lg x\,.\,dx$ (s. § 60,5) $= \frac{x^2}{2}\lg x - \frac{x^2}{4}$.
3. $\int x^n \lg x\,.\,dx$ (s. § 60,7) $= \frac{x^{n+1}}{n+1}\lg x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$
4. $\int \frac{1}{x}\lg x\,.\,dx$ (s. § 60,6) $= \frac{1}{2}(\lg x)^2$
5. $\int x \cdot e^x dx$ (s. 60, 1) $= (x - 1)\,e^x$.

$$\int x^2 \cdot e^x dx = x^2 e^x - \int e^x \cdot 2x\, dx$$
$$= x^2 \cdot e^x - 2 \int x \cdot e^x dx$$
$$= x^2 e^x - 2(x-1) e^x = (x^2 - 2x + 2) e^x.$$

$\int \frac{1}{e^x} dx$. Setze $e^x = y$, also $dx = \frac{1}{y} dy$, so resp. $-\frac{1}{e^x}$.

$\int \sin x \,.\, \cos x\, dx = \sin x \,.\, \sin x - \int \sin x \,.\, \cos x\, dx$, daher
$= \frac{1}{2} \sin^2 x$.

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{1}{\cos x} \cdot \sin x\, dx = \int \frac{1}{y} \cdot -dy$$
$$= -\lg y = -\lg \cos x.$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x\, dx = \int \frac{1}{y} dx$$
$$= \lg y = \lg \sin x.$$

$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} dx$. Setze $\frac{x}{2} = y$,
$dx = 2dy$,

so ist $\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1}{\sin y \cos y} dy$
$= \lg \operatorname{tang} \frac{x}{2}$.

$\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{1}{\sin (\frac{\pi}{2} - x)} dx$, daher (nach 11)
$= -\lg \operatorname{tang} (\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$
$= \lg \operatorname{tang} (\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})$.

$\int \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} dx = \lg \operatorname{tang} x$, denn $d(\lg \operatorname{tg} x) = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}$.

Zweiter Beweis:

$$\int \frac{1}{\sin x \cos x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x}\,dx$$

$$= \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx + \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx, \quad \text{oder}$$

$$= -\lg \cos x + \lg \sin x$$

$$= \lg \operatorname{tang} x.$$

14. $\int \cos^2 x \cdot dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x.$

15. $\int \cos^3 x \cdot dx = \frac{1}{4}\int (3\cos x + \cos 3x)\,dx = \frac{3}{4}\sin x + \frac{1}{12}$ si

§ 64. Tabelle der wichtigsten Integralformeln.

1. $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1}.$

2. $\int (ax+b)^2 = \frac{1}{3a}\,(ax+b)^3.$

3. $\int (ax^2+bx+c)^n \cdot (2ax+b)\,dx = \frac{1}{n+1}\,(ax^2+bx+c)^{n+1}.$

4. $\int \frac{1}{x \pm a}\,dx = \lg (x \pm a).$

5. $\int \frac{1}{(x-a)^n}\,dx = \frac{1}{-n+1}\,(x-a)^{-n+1}$

6. $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = x).$

7. $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\,\operatorname{arc\,tang}\left(= \frac{x}{a}\right)$

8. $\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\lg \frac{x-a}{x+a}$

9. $\int \frac{1}{a^2x^2+1}\,dx = \frac{1}{a}\,\operatorname{arc}(\operatorname{tang} = ax)$

10. $\int \frac{x}{ax^2+b}\,dx = \frac{1}{2a}\lg (ax^2+b)$

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}}\,dx = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{matrix}\text{arc}\,(\sin = x)\\ -\,\text{arc}\,(\cos = x).\end{matrix}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \text{arc}\left(\sin = \frac{x}{a}\right)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \lg\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-ax}}\,dx = \lg\left(x-\frac{a}{2}+\sqrt{x^2-ax}\right)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\lg\left(ax+\frac{b}{2}+\sqrt{a}\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}\right)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{-ax^2+bx+c}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\text{arc}\left(\sin = \frac{2ax-b}{\sqrt{4ac+b^2}}\right)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \sqrt{x^2+a^2}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\sqrt{a^2-x^2}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\,\text{arc}\left(\sin = \frac{x}{a}\right)$$

$$\int \lg x\cdot dx = x\lg x - x$$

$$\int \lg x\cdot x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\lg x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

$$\int \lg x\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}(\lg x)^2.$$

$$\int e^x\,dx = e^x.$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}$$

$$\int e^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a}e^{-ax}$$

$$\int e^x\cdot x\,dx = e^x(x-1)$$

$$\int e^x\cdot x^2\,dx = e^x(x^2-2x+2).$$

29. $\int \frac{1}{e^x} dx = -\frac{1}{e^x}$.

30. $\int \sin x \cdot dx = -\cos x$.

31. $\int \cos x \cdot dx = \sin x$.

32. $\int \operatorname{tang} x \cdot dx = -\lg \cos x$.

33. $\int \operatorname{cotg} x \cdot dx = \lg \sin x$.

34. $\int \cos^2 x \cdot dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x$.

35. $\int \cos^3 x \cdot dx = \frac{3}{4} \sin x + \frac{1}{12} \sin 3x$.

36. $\int \cos ax \cdot dx = \frac{1}{a} \sin ax$.

37. $\int \frac{1}{\sin x} \cdot dx = \lg \operatorname{tang} \frac{x}{2}$

38. $\int \lg \frac{1}{\cos x} dx = \lg \operatorname{tang} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

39. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x$.

40. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tang} x$.

41. $\int \cos x \cdot x dx = x \sin x + \cos x$.

42. $\int \cos x \cdot x^2 dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$.

43. $\int \sin x \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x$.

44. $\int \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} \cdot dx = \lg \operatorname{tang} x$.

Elfter Abschnitt.

Rektifikation und Quadratur der Kurven.

§ 65. $y = f_x$ sei die Gleichung einer Kurve, deren **gen** $s = P_0P$ gemessen werden soll. Läßt man die Abscisse Punktes P, nämlich $AQ = x$, um $QS = dx$ wachsen, und da- ch den zu messenden Bogen $P_0P = s$ um $PR = ds$, so ist, ein unendlich kleines Bogenelement mit seiner Sehne zu- menfällt,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \text{ daher } s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$$

r $s = F_x + c$. Da nun für $x = x_0$ der Bogen $s = o$ sein , so muß die Konstante so beschaffen sein, daß $o = F_{x_0} + c$ $c = -F_{x_0}$, daher $s = F_x - F_{x_0}$ oder mit anderer Bezeichnung

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Dieses Integral hat einen bestimmten Werth, sobald die enzen x_0 und x bestimmte Werthe haben und heißt dann bestimmtes Integral, z. B.

$$\int_0^x x^2 dx = \tfrac{1}{3}x^3 \qquad \int_0^1 x^2 dx = \tfrac{1}{3} \qquad \int_0^2 x^2 dx = \tfrac{8}{3}$$

Anmerk. Für Polarkoordinaten ist $ds^2 = dr^2 + r^2\, d\Theta^2$, daher

$$s = \int \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2} \cdot d\Theta.$$

§ 66. Aufgaben.

1. Den Kreis $y^2 + x^2 = a^2$ zu rektificiren.

Lösung. $s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$, also, da $2y\,dy + 2x\,d$

$$\frac{dy}{dx} = -$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{a \cdot 1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx, \text{ d. h. (nach § 64, 13)}$$

$$= \Big[a \cdot \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{x}{a}\right) \Big]_{x_0}^{x}$$

Soll der Bogen in dem Punkte, dessen Abscisse o ist, anheben, $s = a \cdot \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{x}{a}\right)$.

2. Die Parabel $y^2 = ax$ zu rektificiren.

Lösung. $2y\,dy = a\,dx$, $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2y}$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{a}{4x}$, daher

$$= \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + \frac{a}{4x}}\, dx. \quad \text{Setze } \sqrt{1 + \frac{a}{4x}} = t, \text{ so ist } x = \frac{a/4}{t^2 - 1},$$

$$= \int_{x_0}^{x} t \cdot dx = t\,x - \int x\,dt$$

$$= tx - \frac{a}{4} \int \frac{1}{t^2 - 1}\, dt \text{ oder (nach § 64, 8)}$$

$$= tx - \frac{a}{8} \lg \frac{t-1}{t+1},$$

$$= \Big[x \sqrt{1 + \frac{a}{4x}} - \frac{a}{8} \lg \frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{a}{4x}}}{+1 + \sqrt{1 + \frac{a}{4x}}} \Big]_{x_0}^{x}$$

$$= \text{*)} \left[\sqrt{x^2 + \frac{a}{4}}\, x + \frac{a}{8} \lg \frac{\left(\sqrt{4x + a} + 2\sqrt{x}\right)}{a} \right]_{x_0}^{x}$$

$$= \left[\sqrt{x^2 + \frac{a}{4}}\, x + \frac{a}{4} \lg \left(\frac{\sqrt{4x + a} + 2\sqrt{x}}{\sqrt{a}} \right) \right]_{x_0}^{x}$$

Soll der Bogen im Scheitel der Parabel anheben, so ist

$$s = \sqrt{x^2 + \frac{a}{4}\, x} + \frac{a}{4} \lg \left(\frac{\sqrt{4x + a} + 2\sqrt{x}}{\sqrt{a}} \right).$$

nmerk. Sind nicht x_0 u x, sondern die Grenzordinaten y_0 u. y des chnenden Parabelbogens gegeben, so ist, da $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2y}$ u. $dx = \frac{2}{a}\, y\, dy$,

$$\int_{y_0}^{y} \sqrt{1 + \frac{a^2}{4y^2}} \cdot \frac{2}{a}\, y\, dy.$$

$$\int \sqrt{4y^2 + a^2} \cdot dy. \quad \text{Setze } \sqrt{4y^2 + a^2} = t\, y, \text{ also}$$

$$y^2 = \frac{a^2}{t^2 - 4}, \text{ so ist}$$

$$\int t\, y\, dy = \frac{1}{a} \left(\frac{t}{2} y^2 - \frac{1}{2} \int y^2\, dt \right)$$

$$= \frac{1}{a} \left(\frac{t}{2} y^2 - \frac{a^2}{2} \int \frac{1}{t^2 - 4}\, dt \right) \text{ oder, nach § 64, 8}$$

$$= \frac{1}{a} \left(\frac{t}{2} y^2 - \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{4} \lg \frac{t - 2}{t + 2} \right), \text{ daher, wenn y wieder eingeführt wird,}$$

$$s = \left[\frac{1}{2a} \left(y \sqrt{4y^2 + a^2} + \frac{a^2}{4} \lg \frac{\sqrt{4y^2 + a^2} + 2y}{\sqrt{4y^2 + a^2} - 2y} \right) \right]_{y_0}^{y}$$

) $\left[\quad \right]_{x_0}^{x}$ bedeutet, daß in dem dazwischen enthaltenen Ausdrucke einmal x und dann x_0 zu setzen und der erhaltene zweite Ausdruck rsten abzuziehen ist.

$$s = \left[\frac{y}{2a}\sqrt{4y^2 + a^2} + \frac{a}{4} \lg \frac{2y + \sqrt{4y^2 + a^2}}{a} \right]_{y_0}^{y}$$

Soll der Bogen im Scheitel anheben, wo $y_0 = 0$, so ist

$$s = \frac{y}{2a}\sqrt{4y^2 + a^2} + \frac{a}{4} \lg \frac{2y + \sqrt{4y^2 + a^2}}{a}.$$

3. Die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ zu rektificiren.

Lösung. Da $\frac{x\,dx}{a^2} + \frac{y\,dy}{b^2} = 0$, so ist $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$, daher

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}}\,dx, \text{ oder, nachdem } a^4 y^2 \text{ in x ausgedri}$$

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{\frac{a^2 - x^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)}{a^2 - x^2}} \cdot dx$$ dieses Integral ist eine tran dente Funktion.

Anmerk. Bei der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{\frac{a^2 - x^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)}{a^2 - x^2}}\,dx.$$

4. Die Cykloide $\left\{\begin{matrix} x = a\Theta - a\sin\Theta \\ y = a - a\cos\Theta \end{matrix}\right\}$ zu rektificire

Lösung. $ds^2 = dx^2 + dy^2 = 2a^2(1 - \cos\Theta)\,d\Theta^2$

$$= 4a^2 \sin^2\frac{\Theta}{2}\,d\Theta^2$$

$$ds = 2a \sin\frac{\Theta}{2} \cdot d\Theta$$

$$s = 2a \int \sin\frac{\Theta}{2}\,d\Theta. \quad \text{Setze } \frac{\Theta}{2} = \psi, \text{ also } d\Theta = 2d\psi, \text{ fo}$$

$$\int \sin\frac{\Theta}{2}\,d\Theta = 2\int \sin\psi \cdot d\psi$$

$$= -2\cos\psi, \text{ daher}$$

$$s = -4a\cos\frac{\Theta}{2} + c.$$

ll Bogen s vom Anfangspunkte A anheben, wo $\Theta = 0$, so muß

$$0 = -4a + c, \text{ also } c = 4a \text{ sein, daher}$$

$$s = 4a\left(1 - \cos\frac{\Theta}{2}\right) = 8a\sin^2\frac{\Theta}{4}.$$

r $\Theta = 2\pi$ ergiebt sich als **Länge der ganzen Cykloide** 8a.
kloide ist also eine der wenigen Kurven, die sich ganz genau rekti-
assen.

Die Evolute $y = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{(x - a/2)^3}{3a}}$ (s. § 51) der Pa-
$Y^2 = aX$ zu rektificiren.

ung. $y^2 = \frac{16}{27a}\left(x - \frac{a}{2}\right)^3$, daher $\frac{dy}{dx} = \frac{8}{9ay}\left(x - \frac{a}{2}\right)^2$.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx = \sqrt{1 + \frac{4}{3a}\left(x - \frac{a}{2}\right)}\,dx$$

$$= \sqrt{\frac{4x + a}{3a}}\,dx = \frac{(4x + a)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3a}}\,dx.$$

$$s = \frac{1}{\sqrt{3a}}\int_{x_0}^{x} (4x + a)^{\frac{1}{2}}\,dx. \quad \text{Setze } 4x + a = y,\ dx = \frac{1}{4}\,dy.$$

$$s = \frac{1}{4\sqrt{3a}}\int y^{\frac{1}{2}}\,dy$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{3a}} \cdot \tfrac{2}{3}(4x + a)^{\frac{3}{2}} + c.$$

$$= \frac{(4x + a)^{\frac{3}{2}}}{6\sqrt{3a}} + c.$$

Die archimedische Spirale $r = \frac{a}{2\pi}\,\Theta$ zu rektificiren.

ung. Nach § 65 Anm. ist $s = \int\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2} \cdot d\Theta$.

Da nun $\frac{dr}{d\Theta} = \frac{a}{2\pi}$, so ist

$$s = \int \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4\pi^2}} \cdot d\Theta = \int \sqrt{\frac{a^2}{4\pi^2}\,\Theta^2 + \frac{a^2}{4\pi^2}} \cdot d\Theta$$

$$= \frac{a}{2\pi} \int \sqrt{\Theta^2 + 1} \cdot d\Theta. \quad \text{Setze } \sqrt{\Theta^2 + 1} = t\,\Theta, \text{ also}$$

$$\Theta^2 = \frac{1}{t^2 - 1}, \text{ so ist}$$

$$s = \frac{a}{2\pi} \int t \cdot \Theta\, d\Theta$$

$$= \frac{a}{2\pi} \left(\frac{t}{2}\,\Theta^2 - \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2 - 1}\, dt \right)$$

$$= \frac{a}{4\pi} \left[\Theta \sqrt{\Theta^2 + 1} + \lg\left(\Theta + \sqrt{\Theta^2 + 1}\right) \right]$$

§ 67. $y = f_x$ sei die Gl. einer Kurve; die Ab
$AQ_o = x_o$, $AQ = x$, die Ordinaten $P_oQ_o = yo$, $PQ = y$.
ist die **Fläche** $z = Q_oP_o\,PQ$ offenbar durch x_o, y_o, x,
stimmt, also eine Funktion von x. Wächst AQ um QS
und dadurch die Fläche z um dz, so läßt sich dz als ein
eck von der Basis dx und Höhe y ansehen, daher

$$dz = f_x\, dx$$

$$z = \int f_x\, dx = F_x + c.$$

Da nun für $x = x_o$ der Flächeninhalt z gleich Nul
soll, so muß die Konstante so beschaffen sein, daß $o = F_{x_o}$
daher $c = -F_{x_o}$, daher $z = \int_{x_o}^{x} f_x dx$.

Anmerk. Für Polarkoordinaten ist, wenn Θ um $d\Theta$, r um d
Fläche z um dz wächst, $dz = \frac{r + dr}{2} \cdot r\,d\Theta = \frac{r^2}{2} d\Theta + \frac{r}{2}\, dr\, d\Theta = \frac{r^2}{2} d\Theta$

$$z = \tfrac{1}{2} \int r^2 d\Theta.$$

§ 68. Aufgaben.

1. Die Kurve $y = x^2$ zu quadriren.

Lösung. $z \int_{x_o}^{x} x^2\, dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{x_o}^{x}$

Soll die Fläche von A anheben, wo $x_0 = 0$, so ist $z = \frac{1}{3} x^3$.
Soll die Fläche anheben von $P_0 Q_0$, deren Abscisse $x_0 = 1\frac{1}{2}$ ist,
so ist $z = \frac{1}{3} x^3 - \frac{9}{8}$.

2. Die Parabel $y^2 = ax$ zu quadriren.

Lösung. $z = \int a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + c.$

$= \frac{2}{3} xy + c.$

Soll die Fläche vom Scheitel anheben ($x = 0$) so ist $c = 0$, also $z = \frac{2}{3} xy$.
Soll die Fläche von $P_0 Q_0$, deren Abscisse $= 3$ ist, anheben, so ist
$c = -2\sqrt{3a}$.

3. Die Ellipse $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ zu quadriren.

Lösung 1. Soll die Fläche von A (wo $x_0 = 0$ ist) anheben, so ist

$$z = \int_0^x \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int \frac{b(a^2 - x^2)}{a\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx$$

$$= ab \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx - \frac{b}{a}\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx$$

daher nach § 64, 13 u. 20

$$= \left[ab \arc\left(\sin = \frac{x}{a}\right) + \frac{bx}{2}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - \frac{ab}{2} \arc\left(\sin = \frac{x}{a}\right) \right]_0^x$$

Für $x = 0$ verschwindet dieser Ausdruck, daher

$$z = \frac{bx}{2x}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{ab}{2} \arc\left(\sin = \frac{x}{a}\right).$$

Lösung 2. In $z = \frac{b}{a}\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ setze $x = a \sin \varphi$

$dx = a \cos \varphi\, d\varphi$, so ist

$$z = \frac{b}{a}\int \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi} \cdot a \cos \varphi\, d\varphi.$$

$= ab \int \cos^2 \varphi\, d\varphi$, also nach § 64, 34

$= \frac{ab}{2}(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi) + c.$

Soll das Integral von $x = o$ (wo dann auch $\varphi = o$) anfangen $c = o$, daher $z = \frac{ab}{2}(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi)$. Wird hierin φ wieder in x drückt, nämlich $\varphi = \text{arc}\left(\sin = \frac{x}{a}\right)$, $\sin 2\varphi = \frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2}$, so wir

$$z = \frac{bx}{2a}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{ab}{2}\,\text{arc}\left(\sin = \frac{x}{a}\right).$$

Anmerk. Für $x = a$ ist z, der vierte Theil der Ellipse, $= \frac{1}{4}ab\pi$ die ganze Ellipsenfläche $= ab\pi$.

4. Die Hyperbel $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ zu quadriren.

Lösung. $z = \frac{b}{a}\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx$. Setze $x^2 - a^2 = t^2x^2$, so ist

$$z = \frac{b}{a}\int t \cdot x\,dx = \frac{b}{a}\left(\frac{t}{2}x^2 - \int \frac{1}{2}x^2\,dt\right)$$

$$= \frac{b}{a}\left(\frac{t}{2}x^2 - \frac{a^2}{2}\int \frac{1}{1-t^2}\,dt\right)$$

$$= \frac{b}{2a}\left(x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2\int \frac{1}{1-t^2}\,dt\right)$$

$$= \frac{b}{2a}\left(x\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\lg\frac{1+t}{1-t}\right) + c$$

Nun ist $t = \frac{1}{x}\sqrt{x^2 -$

$$\frac{1+t}{1-t} = \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{x - \sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$z = \frac{bx}{2a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{ab}{4}\lg\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{x - \sqrt{x^2 - a^2}} + c.$$

$$= \frac{bx}{2a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{ab}{2}\lg\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} + c.$$

Soll die Hyperbelfläche im Scheitel B (wo $x = a$) anheben, so i $c = o$, daher

$$z = \frac{bx}{2a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{ab}{2}\lg\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}.$$

5. Die durch die Asymptotengl. $xy = a^2$ gegebene Hyel zu quadriren.

Lösung. $z = a^2 \int \frac{1}{x}\,dx$

$= a^2 \lg x + c.$

Soll die Hyperbelfläche von BD (wo $x = a$) anheben, so ist, da $^2 \lg a + c$, also $c = -a^2 \lg a$ sein muß,

$z = a^2 \lg x - a^2 \lg a$ oder

$z = a^2 \lg \frac{x}{a}.$

Ist auf der Abscissenasymptote $AE = a/2$, also die zugehörige Ordinate 2a, so ist die Fläche $PEDB = a^2 \int_{a/2}^{a} \frac{1}{x}\,dx = a^2 (\lg a - \lg a/2)$

$= a^2 \lg 2.$

6. Die Cykloide $\left.\begin{aligned} x &= a\Theta - a \sin \Theta \\ y &= a \quad - a \cos \Theta \end{aligned}\right\}$ zu quadriren.

Lösung. Ist $y = f_x$, so ist $z = \int f_x\,dx$, also $dz = f_x\,dx$ und

$$\frac{dz}{dx} = y.$$

Die Fläche z kann als Funktion von Θ angesehen werden, daher

$$\frac{dz}{d\Theta} = \left(\frac{dz}{dx}\right) \cdot \frac{dx}{d\Theta}. \quad \text{Nun ist } \frac{dx}{d\Theta} = a(1 - \cos \Theta)$$

$$= ay(1 - \cos \Theta) = a^2 (1 - \cos \Theta)^2$$

$$dz = a^2 (1 - \cos \Theta)^2 \cdot d\Theta$$

$$z = a^2 \int (1 - \cos \Theta)^2 \cdot d\Theta = a^2 \int (1 - 2 \cos \Theta + \cos^2 \Theta)\,d\Theta$$

$$= a^2 \int (\tfrac{3}{2} - 2 \cos \Theta + \tfrac{1}{2} \cos 2\Theta)\,d\Theta.$$

$$= a^2 (\tfrac{3}{2}\Theta - 2 \sin \Theta + \tfrac{1}{4} \sin 2\Theta) + c.$$

Soll die Fläche von A anheben, so ist $\Theta = 0$, daher zur Bestimmung onstante $0 = a^2 \cdot 0 + c$, daher $c = 0$ und

$$z = a^2 (\tfrac{3}{2}\Theta - 2 \sin \Theta + \tfrac{1}{4} \sin 2\Theta).$$

Wird hierin $\Theta = 2\pi$ gesetzt, so ergiebt sich die ganze Cykloidenfläche, h $3r^2\pi$. Es ist daher **die Cykloidenfläche dreimal so groß, wie läche des Erzeugungskreises.**

7. Die Spirale $r = a\Theta$ zu quadriren.

Lösung.

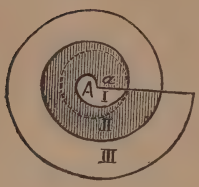
Nach § 67 Anm. ist $z = \frac{1}{2}\int r^2\, d\Theta = \frac{1}{2}\int a^2$

$= \frac{a^2}{6}\Theta^3 + c.$

Hebt die Fläche von $\Theta = \varphi$ an, so ist $z = \frac{a^2}{6}(\Theta$

Hebt die Fläche von $\Theta = o$ an, so ist $z = \frac{a^2}{6}\Theta^3$ oder $= \frac{1}{6}$

8. Die archimedische Spirale $r = \frac{a}{2\pi}\Theta$ zu quadrire



Lösung 1. $z = \frac{1}{2}\int r^2 d\Theta$. Nun ist $d\Theta =$

daher $z = \frac{\pi}{a}\int r^2\, dr$ oder

$z = \frac{\pi}{3a} r^3 + c.$

Soll die Fläche mit $r = o$ anheben, so ist

$c = o$, also $z = \frac{\pi}{3a} r^3$. Daher

für $r = \frac{a}{4}$ (Viertelumdrehung) $z = \frac{a^3}{192}\pi.$

für $r = \frac{a}{2}$ (halbe Umdrehung) $z = \frac{a^3}{24}\pi.$

für $r = a$ (ganze Umdrehung) $z = \frac{a^3}{3}\pi.$

Anmerk. Für $\Theta = 4\pi$ (zweite völlige Umdrehung) ist $z = \frac{2^3 a^3}{3}$

die Spire II (Fläche zwischen I u. II Windung) $= 2a^2\pi$.

Für $\Theta = 6\pi$ (dritte völlige Umdrehung) ist $z = \frac{3^3 a^3 \pi}{3}$, daher

die Spire III zwischen II u. III Windung $= 4a^2\pi$. Ferner

die Spire IV zwischen III u. IV Windung $= 6a^2\pi$ ꝛc. Dieses Ge

schon Archimedes gefunden.

9. Die Kurve $y = \frac{4}{\sqrt{x}}$ zu quadriren.

ösung. Für $x = 0$ ist y unendlich und für $y = 0$ ist x unendlich. Die Ordinatenachse und die positive Seite der Abscissenachse sind Asymp- Für positive Ordinaten ist, wenn die Fläche in A anhebt,

$$z = 4\int_0^x x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= 8\sqrt{x} - 8\sqrt{0}.$$

$= 8\sqrt{x}$, also ein endlicher Werth, obgleich sich die Fläche an der Ordinatenachse ins Unendliche erstreckt.

10. Die Exponentiallinie $y = e^x$ zu quadriren.

ösung. Soll die Fläche von A anheben, so ist

$$z = \int e^x dx = e^x - e^0.$$

$$= e^x - 1.$$

Für $x = -\infty$ ist daher $z = -1\square$*).

Soll die Fläche von $-\infty$ anheben, so ist

$$z = \int_{-\infty}^{x} e^x dx = e^x - e^{-\infty}$$

$$= e^x$$

Für $x = 0$ ist daher $z = +1\square'$.

Anmerk. Für die Exponentiallinie $y = \frac{1}{e^x}$ ist, wenn z in A anhebt,

$$z = \int_0^x \frac{1}{e^x} dx = -\frac{1}{e^x} + \frac{1}{e^0}$$

$$= -\frac{1}{e^x} + 1. \quad \text{z. B. für } x = \infty \text{ ist } z = +1\square'.$$

*) Daß dieses Resultat negativ ist, kommt daher, daß in der Sum- nsformel $\int e^x dx$ alle Glieder wegen des negativen Faktors dx iv sind.

11. Die Kurve $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ zu quadriren.

Lösung. $y = (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$.

Für $x = 0$ ist $y = \pm 1$

für $y = 0$ ist $x = \pm 1$

| für $x \begin{matrix} > +1 \\ < -1 \end{matrix}$ ist y imagin
| für $y \begin{matrix} > +1 \\ < -1 \end{matrix}$ ist x imaginä

Hebt die Fläche bei A an, so ist der Inha

Quadranten:

$$z = \int_0^1 (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\, dx.$$ Setze $x^{\frac{1}{3}} = \sin \Theta$,

| also für $x = 0$ $\quad \Theta = 0$

| für $x = 1$ $\quad \Theta = \frac{\pi}{2}$

| $\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}\, dx = \cos \Theta \cdot d\Theta$

| $dx = 3 \sin^2 \Theta \cos \Theta \cdot d\Theta$

$$z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \Theta \cdot 3 \sin^2 \Theta \cos \Theta \cdot d\Theta$$

$$= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \Theta \cos^4 \Theta \cdot d\Theta$$

$$= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 \Theta - \cos^6 \Theta)\, d\Theta$$

| $\cos^4 \Theta = \frac{1}{8}(3 + 4 \cos 2\Theta + \cos 4\Theta)$

| $\cos^6 \Theta = \frac{1}{32}(10 + 15 \cos 2\Theta + 6 \cos 4\Theta +$

$$z = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\Theta + \frac{1}{8} \cos 4\Theta - \left(\frac{5}{16} + \frac{15}{32} \cos 2\Theta + \frac{3}{16} \cos \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{32} \cos 6\Theta\right)\right.$$

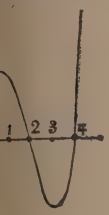
Man braucht hier nur die konstanten Glieder $\frac{3}{8} - \frac{5}{16} = \frac{1}{16}$ mit
multipliciren und zu integriren, da die Integrale aller anderen Glied
$\sin 2\Theta$, $\sin 4\Theta$ $\sin 6\Theta \cdots$ für $\Theta = \frac{\pi}{2}$ u. für $\Theta = 0$ verschwinden,

$$z = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{16}\,d\Theta = \frac{3}{16}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{3}{16}\cdot 0$$

$$= \frac{3}{32}\pi.$$

aher die Gesammtfläche $= \frac{3}{8}\pi$.

2. Die parabolische Kurve $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ oder
$y = x(x-2)(x-4)$
adriren.



Lösung. Die Kurve schneidet die Abscissenachse für x=o 2, 4. Die Ordinaten sind positiv für x zwischen 0 u. 2 negativ für x zwischen 2 u. 4.

Zur Berechnung der Fläche von x=o bis x=4 hat man:

$$z = \int_0^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2\right]_0^4$$
$$= \tfrac{1}{4}\cdot 256 - 2\cdot 64 + 4\cdot 16$$
$$= o.$$

Dieses ist offenbar ein falsches Resultat.

ätte man aber den Lauf der Kurve berücksichtigt und erst den oberhalb achse liegenden Theil, und dann den unterhalb liegenden berechnet, so ich ergeben

$$z = \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx + \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx.$$

$$= \left[\tfrac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2\right]_0^2 + \left[\tfrac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2\right]_2^4$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 2^4 - 2\cdot 2^3 + 4\cdot 2^2 + \begin{Bmatrix}\frac{1}{4}\cdot 4^4 - 2\cdot 4^3 + 4\cdot 4^2 \\ -\frac{1}{4}\cdot 2^4 + 2\cdot 2^3 - 4\cdot 2^2\end{Bmatrix}$$

$$= 4 + (-4).^*)$$

er wirkliche Flächeninhalt von x=o bis x=4 ist daher $8\square'$.

---

*) Das Zeichen − kommt daher, daß in der Summationsformel $\int_2^4 y\,dx$ alle Glieder wegen des negativen Faktors y negativ sind.

13. Die Schlinge des kartesischen Blattes $y^3 - 3axy + x^3 = 0$ oder $r = \frac{3a \operatorname{tang} \Theta}{(1 + \operatorname{tang}^3 \Theta) \cos \Theta}$ zu quadriren.

Lösung. Nach § 67 Anm. ist

$$z = \tfrac{1}{2} \int r^2 \, d\Theta = \frac{9a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tang}^2 \Theta}{(1+\operatorname{tang}^3 \Theta)^2 \cos^2 \Theta} \, d\Theta.$$

Setze $\operatorname{tang} \Theta = t$, $d\Theta = \cos^2 \Theta$

$$z = \frac{9a^2}{2} \int \frac{t^2}{(1+t^3)^2} \, dt. \quad \text{Setze } \begin{matrix} 1 + t^3 = v \\ 3t^2 \, dt = dv. \end{matrix}$$

$$z = \frac{9a^2}{6} \int v^{-2} \, dv$$

$$= -\frac{3}{2} a^2 v^{-1} = \Big[-\frac{3}{2} \frac{a^2}{(1 + \operatorname{tang}^3 \Theta)} \Big]$$

$$= \frac{3}{2} a^2.$$

14. Die Kardioide $r = 4a \cos^2 \frac{\theta}{2}$ zu quadriren.

Lösung. $z = \frac{16a^2}{2} \int_0^{2\pi} \cos^4 \frac{\theta}{2} \, d\Theta$. Drückt man $\cos^4 \frac{\theta}{2}$ durch

$\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{8} \cos 4 \frac{\theta}{2}$ aus,

$$z = 8a^2 \int_0^{2\pi} (\tfrac{3}{8} \, d\Theta + \tfrac{1}{2} \cos \Theta \cdot d\Theta + \tfrac{1}{8} \cos 2\Theta \cdot d\Theta)$$

$$= 8a^2 \Big[\tfrac{3}{8} \Theta + \tfrac{1}{2} \sin \Theta - \tfrac{1}{16} \sin 2\Theta \Big]_{\theta = 0}^{\theta = 2\pi}$$

$$= 6a^2 \pi.$$

Zwölfter Abschnitt.

omplanation und Kubatur der Revolutionskörper.

§ 69. Ist $y = f_x$ die Gleichung einer Kurve, welche um die e AX rotirt, so ist die durch den Bogen P_oP (dessen Endtabsciffen $AQ_o = x_o$ u. $AQ = x$ sind) beschriebene Fläche

$$F = 2\pi \int_{x_o}^{x} f_x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$$ und das Volumen

durch die Fläche Q_oP_oPQ beschriebenen Rotationskörpers

$$V = \pi \int_{x_o}^{x} (f_x)^2 dx.$$

Beweis. Es wachse AQ um $QS = dx$, und dadurch PQ um dy, t die Sehne $PR = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$, daher die durch PR riebene cylindrische Fläche $dF = 2y\pi \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$, daher

$$F = 2\pi \int_{x_o}^{x} f_x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx.$$

Ferner ist der durch QPRS beschriebene Rotationskörper

$dV = y^2\pi \cdot dx$, daher

$$V = \pi \int_{x_o}^{x} (f_x)^2 \cdot dx.$$

§ 70. Aufgaben.

1. Wie groß ist die Fläche, welche der um die Achse rotirende Kreisbogen P_0P beschreibt?

Lösung. $y^2+x^2=r^2$, daher $2y\,dy+2x\,dx=0$, $\frac{dy}{dx}$

$$F = 2\pi \int_{x_0}^{x} \sqrt{(r^2-x^2)\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)} \cdot dx$$

$$= 2\pi \int_{x_0}^{x} \sqrt{y^2+x^2} \cdot dx$$

$$= 2r\pi \int_{x_0}^{x} dx = 2r\pi\,(x-x_0)$$

Zusatz. Für $x_0 = 0$ und $x = r$ ergiebt sich die halbe Kugelfläche $2r^2\pi$.

2. Wie groß ist die Fläche, welche der um AX rotirende Parabelbogen AP (dessen Gl. $y = \sqrt{ax}$) beschreibt?

Lösung. $F = 2\pi \int_0^x \sqrt{ax\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)} \cdot dx.$ $\left|\begin{array}{l} 2y\,dy = a\,dx. \\ \frac{dy}{dx} = \frac{a}{2\sqrt{ax}} \end{array}\right.$

$$= 2\pi \int_0^x \frac{1}{2}\sqrt{4ax+a^2} \cdot dx$$

$$= \pi\sqrt{a} \int_0^x \sqrt{4x+a} \cdot dx$$

$$= \frac{\pi\sqrt{a}}{6} \Big[(4x+a)^{\frac{3}{2}} \Big]_x^0$$

$$= \frac{\pi}{6}\left[(4x+a)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{a} - a^2 \right]$$

. Wie groß ist die Fläche, welche der Bogen des um oße Achse AX rotirenden Ellipsenquadranten beschreibt? $-\sqrt{a^2-x^2})$.

sung. $F = 2\pi \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}dx \Big| \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$

$$= \frac{2\,b\pi}{a}\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{x^2+\frac{a^2}{b^2}(a^2-x^2)}\,dx.$$

$$= 2\,\frac{b\pi}{a^2}\int_0^a \sqrt{a^4-(a^2-b^2)\,x^2}\,dx. \quad \text{Setze } a^2-b^2=c^2.$$

$$= \frac{2\,bc\,\pi}{a^2}\int_0^a \sqrt{\frac{a^4}{c^2}-x^2}\,dx. \quad \text{Setze } \frac{a^2}{c}=\delta$$

$$= \frac{2\,bc\,\pi}{a^2}\int_0^a \sqrt{\delta^2-x^2}\,dx, \text{ also nach § 68, 3}$$

$$= \frac{2\,bc\,\pi}{a^2}\left[\frac{x}{2}\sqrt{\delta^2-x^2}+\frac{\delta^2}{2}\arc\left(\sin=\frac{x}{\delta}\right)\right]_0^a, \text{ d. h.}$$

lbe Ellipsoid- fläche $= \frac{2\,bc\,\pi}{a^2}\left(a^2\sqrt{\frac{a^4}{c^2}-a^2}+\frac{a^4}{2c^2}\arc\left(\sin=\frac{c}{a}\right)\right)$

$$= b^2\pi+\frac{a^2\,b\pi}{c}\arc\left(\sin=\frac{c}{a}\right).$$

Zusatz. Die ganze Ellipsoidfläche $= 2b^2\pi+\frac{2\,a^2b\pi}{c}\arc\left(\sin=\frac{c}{a}\right)$.

Anmerk. 1. Das durch Drehung der Ellipse um die kleine Achse ende Ellipsoid hat die Oberfläche $2a^2\pi+\frac{2\,ab^2\pi}{c}\lg\frac{a+c}{b}$.

Anm. 2. Für $b=a$ ergiebt sich aus beiden Formeln als Kugelche $4a^2\pi$.

k. Das Paraboloid zu berechnen, welches durch Drehung)arabelbogens AP ($y^2=ax$) um die Achse AX entsteht.

Lösung. $V = \pi \int_0^x ax\,dx$

$= \frac{a\pi}{2} x^2$

Anmerk. Da aus der Parabelgl. folgt $ax^2 = y^2x$, so ist $V = \frac{x}{2} \cdot y^2\pi$, daher **das Paraboloid halb so groß, wie der Cyli dessen Höhe x, dessen Radius y ist.**

5. Das Ellipsoid zu berechnen, welches durch Dre der halben Ellipse $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$ um ihre große Achse en

Lösung. $V = \pi \int_{-a}^{+a} (f_x)^2\,dx$

$= \pi \int_{-a}^{+a} \frac{a^2b^2 - b^2x^2}{a^2}\,dx$

$= \frac{b^2\pi}{a^2} \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2)\,dx$

$= \frac{b\,\pi}{a^2} \left[a^2x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-a}^{+a} = \frac{4}{3}ab^2\pi.$

Anmerk. Das durch Drehung der halben Ellipse um die Achse entstehende Ellipsoid ist $= \frac{4}{3}a^2b\pi$.

6. Den durch Drehung der Cykloide um ihre Achs stehenden Rotationskörper zu berechnen.

Lösung. Da $x = a\,(\Theta - \sin\Theta)$

$y = a\,(1 - \cos\Theta)$, so ist

$V = \pi \int_0^x y^2 dx$, worin $dx = a\,(d\Theta - \cos\Theta \cdot d\Theta)$,

$= a^3\pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos\Theta)^3$. Setze $(1 - \cos\Theta)^3 = A + B\cos\Theta + C\cos 2\Theta + D$

Durch successive Annahme von $\Theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi$ ergeben sich B, C, D vier Bestimmungsgleichungen und aus diesen für A, B, C, Werthe $\frac{5}{2}, -\frac{15}{4}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{4}$, daher

$V = a^3\pi \int (\frac{5}{2} - \frac{15}{4}\cos\Theta + 3\cos 2\Theta - \frac{1}{4}\cos 3\Theta)\,d\Theta.$

$= a^3\pi \left[(\frac{5}{2}\Theta - \frac{15}{4}\sin\Theta + \frac{3}{4}\sin 2\Theta - \frac{1}{12}\sin 3\Theta) \right]$

$= 5a^3\pi^2.$

Dreizehnter Abschnitt.

Integration der Differentialgleichungen.

§ 71. Erklärungen. Eine Gleichung, in welcher veränder- Größen mit ihren Differentialen vorkommen, heißt Diffe- ialgleichung. Diejenige Gleichung, aus welcher die erentialgleichung abgeleitet werden kann, heißt die zugehö- Integralgleichung. Letztere muß so beschaffen sein, die aus ihr gezogenen Werthe der abhängigen Veränder- n und ihrer Differentiale nach Substitution in die Diffe- algleichung dieser genügen, z. B.

(1) . . . . . $2\,y\,dy = a\,dx$ ist eine Differentialgl.

(2) . . . . . $y^2 = ax$ ist die zugehörige Integral-

hung. Hieraus ist $y = \sqrt{ax}$ und $dy = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}}\,dx$;

Werthe geben, in (1) substituirt, $2\sqrt{ax} \cdot \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}} \cdot dx = a\,.\,dx.$

Die Differentialgleichungen heißen erster, zweiter, dritter nung, wenn darin die Differentiale I, II, III Ordnung abhängig Veränderlichen (dy, d^2y, d^3y . . .) vor- men; sie heißen ersten, zweiten, dritten . . . Grades, wenn in erster, zweiter, dritter Potenz in ihnen vorkommt. Wir achten hier nur die

Differentialgleichungen I. Ordnung und I. Grades.

§ 72. Für die Integration der Differentialgleichungen, in den meisten Fällen sehr schwierig ist, sind nur wenige emeine Methoden bekannt.

A. Die unmittelbare Integration ist möglich, die Differentialgleichung durch Differentiation einer Fu $F_{x\,y} = o$ entstanden ist.

Da nämlich durch Differentiation von $F_{x,\,y} = o$ sich $\left(\frac{dF}{dy}\right) \cdot dy + \left(\frac{dF}{dx}\right) \cdot dx = o$ und $d^2F_{x,\,y} = d^2F_{y,\,x}$, so wür gegebene Differentialgleichung $P\,dy + Q\,dx = o$ (worin P Funktionen von x u. y) als durch unmittelbare Differen einer $F_{x,\,y}$ entstanden sich ansehen lassen, („ein vol menes Differential" sein), wenn

$\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy}$ ist. In diesem Falle integrire man P d y, wobei das in P enthaltene x vorläufig als konstant sehen ist. Da nun in der zu addirenden Konstanten noc φ_x stecken kann, so ist diese noch zu dem erhaltenen Int zu addiren. Der Werth dieser φ_x ergiebt sich, indem ma erhaltene Integral wieder differentiirt und das Resultat m gegebenen Differentialgleichung vergleicht.

Beispiele: 1. $(3y^2 - 2x^2)\,dy + (3x^2 - 4xy)\,dx = o.$

Da das Differential von $3y^2 - 2x^2$ nach x gleich ist dem rential von $3x^2 - 4xy$ nach y, so ist die gegebene Gl. ei kommnes Differential, daher die Integralgl.:

$$\int (3y^2 - 2x^2)\,d\varphi = o$$

$$y^3 - 2x^2y + \varphi_x + c = o.$$

Wird wieder differentiirt, so ist $3y^2dy - 2x^2dy - 4xy\,dx + \varphi_x$ +

$$(3y^2 - 2x^2)\,dy + \left(\frac{d\varphi}{dx} - 4xy\right)$$

Durch Vergleichung mit der gegebenen Gl. ergiebt sich $\frac{d\varphi}{dx} = 3x^2$

$$\varphi = \int 3x^2\,dx = x^3,$$

$y^3 - 2x^2y + x^3 + c = o$ die gesuchte Integralgl.

2. $(2ay + bx + e)\,dy + (2gx + by + h)\,dx = o.$

Da das Differential von $2ay + bx + e$ nach x gleich ist dem vor $2gx + by + h$ nach y, so ist die geg. Gl. ein vollkommenes Differ daher die dazugehörige Integralgleichung:

$$\int (2ay + bx + e)\,dy = o.$$

$ay^2 + bxy + ey + \varphi x + c = o$. Wird wieder differentiirt, so ist

$(2ay + bx + e)\,dy + (by + \left(by + \frac{d\varphi}{dx}\right)dx = o.$

Durch Vergleichung mit der geg. Gl. ergiebt sich $\frac{d\varphi}{dx} = 2gx + h$, daher

$\varphi = \int (2gx + h)\,dx = gx^2 + h$, daher die gesuchte Integralgl.:

$ay^2 + bx\,y + ey + gx^2 + hx + c = o.$

. $\frac{1}{x} \cdot dy - \frac{y}{x^2} \cdot dx = o.$

Da das Differential von $\frac{1}{x}$ nach x gleich ist dem von $\frac{y}{x^2}$ nach y, die Bedingung der Integrabilität erfüllt. Man erhält:

$\int \frac{1}{x}\,dy = \frac{1}{x}\,y + \varphi x + c = o$. Wird wieder differentiirt, so ist

$$\frac{1}{x}\,dy - y \cdot x^{-2}\,dx + d\varphi = o.$$

$$\frac{1}{x}\,dy - \left(\frac{y}{x^2} - \frac{d\varphi}{dx}\right) = o.$$

Durch Vergleichung mit der geg. Gl. ergiebt sich $d\varphi = o$, daher φ konstant

daher $\frac{1}{x}\,y + c = o$ die gesuchte Integralgl.

. $x\,dy - y\,dx = o$. Hier ist das Differential von x nach x nicht dem von $-y$ nach y, daher ist die Bedingung der Integrabilität erfüllt, also $x\,dy - y\,dx$ nicht das Differential einer $F_{x,y}$. Aber die s durch Multiplikation mit $\frac{1}{xy}$ entstehende Gleichung

$-\frac{1}{x}\,dx = o$ ist integrabel, da das Differential von $\frac{1}{y}$ nach x gleich n von $-\frac{1}{x}$ nach y, nämlich beide $= o$. Als die der Gleichung

$-\frac{1}{x}\,dx = o$ entsprechende Integralgl. ergiebt sich

$\lg y - \lg x + c = o$, woraus

$\lg \frac{y}{x} = \lg k$ oder $y = kx$.

Anmerk. Diejenige $f_{x,y}$ womit eine die Bedingung der Integra- nicht erfüllende Differentialgl. multiplicirt werden muß, um inte- zu werden, heißt der **„integrirende Faktor"**. Für Gl. 4) z. B. $\frac{1}{xy}$. ie Auffindung eines solchen integrirenden Faktors ist im Allgemeinen wierig.

B. Integration mittelst Separation der V
derlichen.

1. $\mathbf{x\,dy - y\,dx = 0}$

$$\frac{1}{y}dy - \frac{1}{x}dx = 0$$

$$\lg y - \lg x = c \text{ (oder bequemer } = \lg a)$$

$$y - ax = 0.$$

2. $\mathbf{x\,dy + y\,dx = 0}$

$$\frac{1}{y}dy + \frac{1}{x}dx = 0$$

$$\lg y + \lg x = c = \lg a, \text{ daher } yx = a.$$

C. Die Integration mittelst Substitution
dritten Veränderlichen ist dann stets möglich, wenn di
Differentialgl. homogen ist, d. h. wenn in allen Gliede
Summe der Exponenten der Veränderlichen dieselbe ist.

1. $\mathbf{xy\,dy + (x^2 + y^2)\,dx = 0.}$ Setze $y = tx$, so ist

$$dy = x\,dt + t\,dx, \text{ daher}$$

$$(x^2 + 2t^2x^2)\,dx + x^3 t \cdot dt = 0$$

$$(1 + 2t^2)\,dx + tx \cdot dt = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{t \cdot dt}{1+2t^2} = 0, \text{ daher durch Integration}$$

$$\lg x + \tfrac{1}{4}\lg(1 + 2t^2) = \lg c \text{ oder}$$

$$\lg x + \tfrac{1}{4}\lg(x^2 + 2y^2) - \tfrac{1}{2}\lg x = \lg c$$

$$\lg x + \tfrac{1}{2}\lg(x^2 + 2y^2) = 2\lg c$$

$$x\sqrt{x^2 + 2y^2} = c^2$$

$$x^4 + 2x^2y^2 = c^4$$

$$x^2y^2 + \tfrac{1}{2}x^4 = a^4.$$

2. $\mathbf{(y - x)\,dy + (y + x)\,dx = 0.}$ Setze $y = tx$, $dy = x\,dt +$
$(tx - x)\,(x\,dt + t\,dx) + (tx + x)\,dx = 0.$

$$\frac{t-1}{t^2+1}dt + \frac{dx}{x} = 0, \text{ daher durch Integration}$$

$$\tfrac{1}{2}\lg(t^2 + 1) - \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = t) + \lg x = \lg a \text{ und dur}$$

dereinfügung von

$$\lg(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} - \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{y}{x}\right) = \lg a.$$

$$\lg \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}{a} = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{y}{x}\right).$$

$\frac{1}{a}\sqrt{x^2+y^2} = e^{\text{arc (tang} = y/x)}$

$y\,dy + 2x\,dx = dx\sqrt{2x^2+y^2}$. Setze $y = tx$, $dy = x\,dt + t\,dx$.

$tx\,dt + (t^2+2)\,dx = dx\sqrt{t^2+2}$

$(t^2+2-\sqrt{t^2+2})\,dx + tx\,dt = 0$

$\frac{dx}{x} + \frac{t\,dt}{t^2+2-\sqrt{t^2+2}} = 0$. Setze $t^2+2 = u^2$

$t\,dt = u\,du$.

$\frac{dx}{x} + \frac{du}{u-1} = 0$, daher $\lg x + \lg(u-1) = c$

$\lg[x(u-1)] = c$, daher auch

$x(u-1) = c$ und durch Wiedereinführung von y:

$\sqrt{y^2+2x^2} = c + x$

$y^2 + x^2 = 2cx + c^2$.

Die Integration mittelst Substitution gelingt auch dann
en, wenn die Differentialgl. nicht homogen ist. Setzt man
i der nicht homogenen Differentialgl.

$(y-x)\,dy - a\,dx = 0$ $\quad y - x = t$ und $dy - dx = dt$, so ist

$t(dt + dx) - a\,dx = 0$, woraus $dx = -\frac{t\cdot dt}{t-a}$, daher

$x = -\int \frac{t}{t-a}\,dt = -\int t \cdot \frac{1}{t-a}\,dt$

$= -t\lg(t-a) + \int \lg(t-a)\,dt$, also nach § 64, 21

$x = -t\lg(t-a) + (t-a)\lg(t-a) - t + a + c$ oder

$x = -a\lg(t-a) + c$

$= -a\lg(y-x-a) + c$.

§ 73. Uebungsaufgaben.

. Diejenige Kurve zu finden, bei welcher die Sub-
te stets gleich der Abscisse ist.

Lösung. Es soll $y \cdot \frac{dx}{dy} = x$ oder $y\,dx - x\,dy = 0$ sein. Durch Sepa-
rgiebt sich $\left(\text{aus } \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0\right)$ $\quad \lg x - \lg y = c = \lg a$.

$\lg y = \lg ax$.

$y = ax$, d. h. eine gerade Linie.

Bei welcher Kurve ist die Subtangente stets gleich
ppelten Abscisse?

Lösung. $y^2 = ax$.

3. Bei welcher Kurve ist das Quadrat der Subt
$= 2x$?

Lösung. $y^2 \frac{dx^2}{dy^2} = 2x$ oder $y\,dx = dy \sqrt{2x}$.

$\frac{dx}{\sqrt{2x}} = \frac{dy}{y}$. Hieraus durch unmittelbare Int

$\frac{1}{\sqrt{2}} \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \lg y$

$\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} + \lg c = \lg y$

$\lg e^{\sqrt{2x}} + \lg c = \lg y$

$y = c \cdot e^{\sqrt{2x}}$.

4. Bei welcher Kurve ist die Subtangente stets =

Lösung. $y \cdot \frac{dx}{dy} = y - x$ oder $y\,dx = (y - x)\,dy$. Setze

$tx \cdot dx = (tx - x)\,(x\,dt + t\,dx)$

$(2tx - t^2)\,dx = x\,(t - 1)\,dt$.

$$\frac{dx}{x} = \frac{(t-1)\,dt}{t\,(2t-1)} = \left(\frac{M}{t} + \frac{N}{2t-1}\right) dt$$

$$= -\frac{\frac{1}{2}}{t}\,dt + \frac{\frac{1}{2}}{2-t}\,dt$$

$$\lg x = -\tfrac{1}{2} \lg t - \tfrac{1}{2} \int \frac{1}{t-2}\,dt$$

$$= -\tfrac{1}{2} \lg t - \tfrac{1}{2} \lg (t-2) + c$$

$$2 \lg x = -\lg \frac{y}{x} - \lg \frac{y-2x}{x} + c$$

$$\lg x^2 + \lg \frac{y\,(y-2x)}{x^2} = c = \lg a^2$$

$$\lg y\,(y - 2x) = \lg a^2$$

$$y^2 - 2xy = a^2.$$

5. Bei welcher Kurve ist die Tangente bis zur Ab
achse stets von konstanter Länge a?

Lösung. $y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = a$ oder $y^2 + y^2 \frac{dx^2}{dy^2} = a^2$

$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} \sqrt{a^2 - y^2}$. Setze $\sqrt{a^2 - y^2} = ty$, also $\frac{

$$x = \int t \cdot dy = yt - \int y\, dt$$
$$= ty - a\int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\, dt,$$
$$= ty - a \lg (t + \sqrt{t^2+1}) + c \text{ oder}$$
$$x = \sqrt{a^2 - y^2} - a \lg \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}\right) + c.$$

Anmerk. Für $c = o$ wird das zu $x = o$ gehörige y gleich a, und steht $x = \sqrt{a^2 - y^2} - a \lg \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}\right)$, die Gl. der „Traktorie".

6. Bei welcher Kurve ist die Tangente stets gleich der Anfangspunkte nach dem Berührungspunkte gezogenen ?

Lösung. $y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$ oder $y\, dx = \pm x\, dy$.

$$y \frac{dx}{dy} = \pm x.$$

$\frac{1}{y} dy - \frac{1}{x} dx = c$ $\qquad$ $\frac{1}{y} dy + \frac{1}{x} dx = c.$

$\lg y - \lg x = \lg a$ $\qquad$ $\lg y + \lg x = \lg a$

$y = ax$ $\qquad$ $y = a/x.$

7. Bei welcher Kurve ist das Loth vom Anfangspunkte die Tangente stets gleich der Abscisse des Berührungs- es?

Lösung. $\left(y \frac{dx}{dy} - x\right) \left(= \frac{x}{\sin \tau}\right) = \frac{x\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}$ oder

$(y\, dx - x\, dy)^2 = x^2 dx^2 + x^2 dy^2$ oder

$(y^2 - x^2)\, dx - 2xy\, dy = o.$ Diese Differentialgl. ist ho- n, daher integrirbar. Es resultirt $y = \sqrt{ax - x^2}$.

8. Bei welcher von A anhebenden Kurve ist die Fläche en Abcisse, Bogen und Ordinate $= \frac{2}{3} xy$?

Lösung. $\int_o^x y\, dx = \frac{2}{3} xy$, daher durch Differentiiren

$y\, dx = \frac{2}{3} y\, dx + \frac{2}{3} x\, dy$ oder

$2x\, dy - y\, dx = o$

$$\frac{2\,dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0$$
$$2 \lg y - \lg x = \lg a$$
$$y^2 = ax.$$

9. Bei welcher Kurve ist das Quadrat jedes von A hebenden Bogens $= ax$?

Lösung. $s^2 = ax$ oder $\int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{ax}$.

Durch Differentiiren: $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x}}$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{a}{4x}\, dx^2$$

$$dy = dx \sqrt{\frac{a - 4x}{4x}}.$$ Setze $\frac{a-4x}{4x} = t^2$, also

$$x = \frac{a}{4(t^2+1)},$$

$$dy = t\, dx$$
$$y = \int t\, dx = tx - \int x\, dt$$
$$= tx - \frac{a}{4}\int \frac{1}{t^2+1}\, dt$$
$$= tx - \frac{a}{4} \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = t) + c.$$

$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{ax - 4x^2} - \frac{a}{4} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \sqrt{\frac{a-4x}{4}}\right) + c^*$$

$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{ax - 4x^2} - \frac{a}{4} \operatorname{arc}\left(\cos = \sqrt{\frac{4x}{a}}\right) + c.$$

Da für $x = 0$ auch $y = 0$ sein muß, so ist

$$0 = -\tfrac{a}{4} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \sqrt{\frac{a}{0}}\right) + c, \text{ daher } c = \tfrac{a}{4}.$$

---

*) Wenn $\operatorname{tang} \varphi = \sqrt{\frac{a-b}{b}}$, so ist $\cos \varphi = \sqrt{\frac{b}{a}}$ daher $\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \sqrt{\frac{a-b}{b}}\right) = \operatorname{arc}\left(\cos = \sqrt{\frac{b}{a}}\right)$.

$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{ax - 4x^2} + \frac{a}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}\left(\cos = \sqrt{\frac{4x}{a}}\right)\right)$$

$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{ax - 4x^2} + \frac{a}{4}\operatorname{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{4x}{a}}\right) \text{ oder}$$

$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{ax - 4x^2} + \frac{a}{4}\operatorname{arc}\left(\cos = \sqrt{\frac{a-4x}{a}}\right).$$

Die gesuchte Kurve ist daher eine Cykloide.

10. Die Trajektorie zu finden, welche alle durch A gehende Geraden unter demselben Winkel ε schneidet. (Trajektorie heißt diejenige Linie, welche ein System von Linien nach einem bestimmten Gesetze schneidet.)

Lösung. Es sei $y = mx$ die Gl. aller durch A gehenden Geraden, daß m für jede dieser Geraden einen andern Werth hat. Ist P ein [illegible] der Trajektorie, $AQ = x$, $PQ = y$, der $\angle$, den die Tangente an die Trajektorie mit der Abscissenachse bildet, $= \psi$, der $\angle PAX = \Theta$, so ist $\varepsilon = \psi - \Theta$, daher

$$\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{\operatorname{tg}\psi - \operatorname{tg}\Theta}{1 + \operatorname{tg}\psi \cdot \operatorname{tg}\Theta}, \text{ worin } \operatorname{tg}\psi = \frac{dy}{dx},$$

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{y}{x}; \text{ daher}$$

$$\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{x\,dy - y\,dx}{x\,dx + y\,dy} \text{ die Differentialgl. der gesuchten Trajek-}$$

Da sie homogen ist, so setze $y = tx$, $dy = x\,dt + t\,dx$.

$$\operatorname{tg}\varepsilon \cdot dx + \operatorname{tg}\varepsilon \cdot t(x\,dt + t\,dx) = x\,dt$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon \cdot dx + t^2 \cdot \operatorname{tg}\varepsilon \cdot dx + t \cdot \operatorname{tg}\varepsilon \cdot x\,dt = x\,dt$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon \frac{dx}{x} + \frac{(t \cdot \operatorname{tg}\varepsilon - 1)\,dt}{t^2 + 1} = 0$$

$$\operatorname{tg}\xi \cdot \lg x + \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\varepsilon \cdot \lg(t^2 + 1) - \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = t) = 0$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon \cdot \lg x + \operatorname{tg}\varepsilon \cdot \lg\sqrt{t^2 + 1} - \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = t) = 0$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon \cdot \lg\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = y/x).$$

Durch Einführung der Polarkoordinaten $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{tg}\Theta = \frac{y}{x}$,

$\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{y}{x}\right) = \Theta$, entsteht

$$\operatorname{tg}\varepsilon \cdot \lg r = \Theta$$

$$\lg r^{\operatorname{tg}\varepsilon} = \Theta, \text{ daher } r^{\operatorname{tg}\varepsilon} = e^{\Theta}.$$

Zusatz. Soll die Trajektorie das durch A gehende Linienſyſtem einem Winkel von 45° ſchneiden, ſo iſt $\lg \sqrt{x^2 + y^2} = \text{arc}\left(\text{tg} = \frac{y}{x}\right)$

$r = e^{\vartheta}$. (Die Exponentialſp

Soll die Trajektorie daſſelbe Linienſyſtem rechtwinklig ſchneiden, da $\text{tg}\,\varepsilon = \infty$, $r^{\infty} = e^{\vartheta}$. Es muß deßhalb auf die Differentialgleichu Trajektorie zurückgegangen werden:

$$\infty = \frac{x\,dy - y\,dx}{x\,dx + y\,dy},$$

$x\,dx + y\,dy = o$, daher $x^2 + y^2 = c$. (Der Kreis).

11. Die Trajektorie zu finden, welche ſämmtliche P beln $y^2 = mx$ unter demſelben Winkel ε ſchneidet.

Löſung. $\text{tang}\,\varepsilon = \frac{\text{tg}\,\psi - \text{tg}\,\Theta}{1 + \text{tg}\,\psi \cdot \text{tg}\,\Theta}$, worin $\text{tg}\,\psi = \frac{dy}{dx}$

$\text{tg}\,\Theta = \frac{y}{2x}$ (= Subt. d.

$\text{tang}\,\varepsilon = \frac{2x\,dy + y\,dx}{2x\,dx + y\,dy}$ die Differentialgl. der geſ. Traje

Zuſatz. Soll das durch A gehende Parabelſyſtem von der Traje rechtwinklig geſchnitten werden, ſo iſt $2x\,dx + y\,dy = o$, daher di der Trajektorie $y^2 + 2x^2 = c$.

12. Die Trajektorie zu finden, welche alle Para $y^2 = mx$ ſo ſchneidet, daß die Fläche zwiſchen dem Par bogen und den Koordinaten des Durchſchnitts konſtant $= a^2$

Löſung. $\frac{2}{3}xy = a^2$, daher die Trajektorie $y = \frac{3\,a^2}{2\,x}$, eine Hyperbel.

13. Die Trajektorie zu finden, welche alle über derſe Abſciſſenachſe konſtruirten koncentriſchen ähnlichen Ellipſen, denen alſo $\frac{b}{a} = \frac{b_{/}}{a_{/}} = \frac{b''}{a''} \ldots$, rechtwinklig ſchneidet.

Löſung. Die Gleichungen des geg. Ellipſenſyſtems ſeien $\frac{x^2}{a_{/}^2} + \frac{y^2}{b_{/}^2}$

und ſämmtliche $\frac{a_{/}}{b_{/}}$ konſtant $= k$.

$$\text{tg}\,\varepsilon = \frac{\text{tg}\,\psi - \text{tg}\,\Theta}{1 + \text{tg}\,\psi \cdot \text{tg}\,\Theta}, \text{ worin } \text{tg}\,\psi = \frac{dy}{dx},$$

$$\text{tg}\,\Theta = -k^2\,\frac{x}{y}.$$

$$\infty = \frac{\frac{dy}{dx} + k^2 \cdot \frac{x}{y}}{1 - k^2 \cdot \frac{x}{y}\frac{dy}{dx}}, \text{ daher}$$

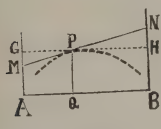
$$1 - k^2 \cdot \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$k^2 \frac{dy}{y} - \frac{1}{x} dx = 0$$

$$\lg y^{(k^2)} = \lg cx \text{ oder}$$

$$y \left(\tfrac{a}{b}\right)^2 = cx.$$

ſatz. Die Trajektorie, welche alle koncentriſchen Kreiſe rechtwinklig t, iſt $y = cx$, alſo eine Gerade durch A.

4. 

Zwiſchen den in den Endpunkten von $AB = 2a$ errichteten Perpendikeln eine ſolche Kurve $y = f_x$ zu finden, daß jede an dieſe gezogene Tangente, MN, zwei Stücke AM und BN von den Perpendikeln abet, deren Produkt konſtant ($= b^2$) iſt.

ſung. Ziehe $GPH \parallel AB$, ſo iſt $\operatorname{tg} NPH = \operatorname{tg} MPG = \frac{dy}{dx}$ und

$$AM = y - x \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$BN = y + (2a - x)\frac{dy}{dx}. \text{ Es ſoll alſo}$$

. . . . $\left(y - x \cdot \frac{dy}{dx}\right)\left(y + 2a\frac{dy}{dx}\right) = b^2$ ſein.

Setze $y - x\frac{dy}{dx} = v$, ſo iſt

$$v^2 + 2a\frac{dy}{dx}v = b^2. \text{ Addire } a^2\frac{dy^2}{dx^2}$$

$$\left(v + \frac{a\,dy}{dx}\right)^2 = b^2 + \frac{a^2 dy^2}{dx^2}$$

$$v = -\frac{a\,dy}{dx} + \sqrt{b^2 + a^2\frac{dy^2}{dx^2}}$$

. . . . $y = x\frac{dy}{dx} - a\frac{dy}{dx} + \sqrt{b^2 + a^2\frac{dy^2}{dx^2}}$. Setze $\frac{dy}{dx} = p$ und differentiire, ſo iſt

$$dy = p\,dx + x\,dp - a\,dp + \frac{a^2 p\,dp}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}}$$

$$o = \left(x - a + \frac{a^2 p}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}}\right) dp.$$

Wird dp gleich o gesetzt, so wird p oder $\frac{dy}{dx}$ konstant, $= c$, also gesuchte Kurve eine gerade Linie. Für sie geht Gl. (2) über in

3) . . . . $y = cx - ca + \sqrt{b^2 + a^2 c^2}$. Daß diese gerade Li Forderung genügt, ist klar, denn für jeden ihrer Punkte (x, y) Tangente an sie mit ihr selbst zusammen, und ist

$$AM = -\,ac + \sqrt{b^2 + a^2 c^2}$$

$$BN = \quad ac + \sqrt{b^2 + a^2 c^2},$$

also $AM \cdot BN = b^2$.

Wird aber $x - a + \frac{a^2 p}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}}$ gleich o gesetzt, so wird mit Hilfe

4) . . . . $y = \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2}$, eine Ellipse, welche ebenfalls den rentialgleichungen (1) und (2) genügt.

Anmerk. Gleichung (3), welche die beliebige Konstante c enthält das „allgemeine oder vollkommene Integral der Gl. (1). A gehen für besondere Werthe, welche c gegeben werden, specielle od sondere Integrale hervor, welche sämmtlich dieselbe Art Linie drücken. Gleichung (4), welche ebenfalls der Differentialgl. (1) genüg welche nicht durch Integration, sondern durch Differentiation gefunden ist, heißt eine „besondere Auflösung" der Gl. (1). Lagrange daß die besonderen Auflösungen einer Differentialgl., die man frü unzulässig hielt, aus dem allgemeinen Integrale abgeleitet werden kö

Vierzehnter Abschnitt.

ndung der Integralrechnung auf die Bestimmung des Schwerpunktes.

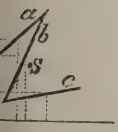
74. Hilfssatz. Das statische Moment des Ganzen ist der Summe der statischen Momente der Theile. (Das mal dem Abstande seines Schwerpunktes von der Abscissen- rdinatenachse ist gleich der Summe der Produkte aus den n und den Abständen ihrer Schwerpunkte.)

A. Schwerpunkt von Linien.

75. Der Schwerpunkt einer Geraden ist ihr Halbi- unkt.

76. Die Koordinaten ξ u. η des Schwerpunktes einer en Theilen a, b, c bestehenden gebrochenen Linie fich aus den Gleichungen

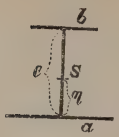
$$(a+b+c)\,\xi = a\xi_1 + b\xi_2 + c\xi_3$$
$$(a+b+c)\,\eta = a\eta_1 + b\eta_2 + c\eta_3, \text{ nämlich}$$



$$\xi = \frac{a\xi_1 + b\xi_2 + c\xi_3}{a+b+c}$$

$$\eta = \frac{a\eta_1 + b\eta_2 + c\eta_3}{a+b+c}$$

§ 77. Für die parallelen Linien a und b, deren Halbi
punkte durch die auf a u. b senkrechte S
verbunden sind, ist, wenn a als Abscis
angesehen wird,



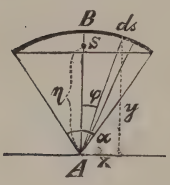
$$(a + b + e)\,\eta = e \cdot \frac{e}{2} + be$$

$$\eta = \frac{e\left(\frac{e}{2} + b\right)}{a + b + e}$$

§ 78. Der **Schwerpunkt eines beliebigen Bog**
der Kurve $x = f_x$ findet sich aus $s \cdot \xi = \int x\,ds$

$$s \cdot \eta = \int y\,ds.$$

Beispiele.



1. Beim Kreisbogen liegt S in de
metrischen Achse BA.

Aus $s \cdot \eta = \int y\,ds$ folgt, da $y = r\cos\varphi$
$ds = r\,d\varphi$
$s = 2\,\alpha\,r$,

$$\alpha r\eta = r^2 \int_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} \cos\varphi\,d\varphi$$

$$\eta = \frac{2r}{\alpha}\sin\alpha/_2$$

Hieraus ergiebt sich $\eta : r =$ **Sehne : Bogen**.

Für den Halbkreis ist daher $\eta = \frac{2r}{\pi}$.

2. Für den in A anhebenden Parabelbogen s i
$s\xi = \int x\,ds$, daher, weil $y^2 = 2ax$, $y\,dy = a\,dx$,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \qquad ds = dx\sqrt{1}$$

$$s\xi = \int x\sqrt{1 + \frac{a}{2x}}\,dx.$$ Ebenso ergiebt sich

$$s\eta = \int \sqrt{a^2 + 2ax}\,dx.$$

3. Für den Bogen s der Viertelellipse ist

$$s\xi = \int \frac{x\,dx}{a^2 y}\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}\ \text{ꝛc.}$$

$$s\eta = \int \frac{dx}{a^2}\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}\ \text{ꝛc.}$$

Für den in A anhebenden Cykloidenbogen ist, da

$$x = a\varphi - a\sin\varphi \text{ und}$$
$$ds = 2a\sin\varphi/_2\, d\varphi,$$

$$s\xi = 2a^2 \int (\varphi - \sin\varphi)\sin\varphi/_2\, d\varphi$$
$$= 2a^2 \int \varphi \sin\varphi/_2\, d\varphi - 8a^2 \int \sin^2\varphi/_2 \cos\varphi/_2\, d\varphi/_2$$
$$= -4a^2\varphi\cos\varphi/_2 - 8a^2\,(\tfrac{1}{3}\sin 3\varphi/_2 - \sin\varphi/_2) + c.$$

Da für $\varphi = 0$ auch $s = 0$, so ist $c = 0$.

Da ferner $s = 2\int a\sin\varphi/_2\, d\varphi$

$$= 4a\int \sin\varphi/_2\, d\varphi/_2$$
$$= -4a\int_0^{\varphi/_2} \cos\varphi/_2$$
$$= 4a\,(1 - \cos\varphi/_2), \text{ so ist}$$

$$\xi = \frac{a\,(-\varphi\cos\varphi/_2 + 2\sin\varphi/_2 - \tfrac{2}{3}\sin^3\varphi/_2)}{1 - \cos\varphi/_2} \text{ also}$$

Bogen der ganzen Cykloide (für welchen $\varphi = 2\pi$) $\xi = a\pi$.

Ferner ist, da $y = a - a\cos\varphi$ und $ds = 2a\sin\varphi/_2\, d\varphi$,

$$s\eta = 4a^2 \int (1 - \cos\varphi)\sin\varphi/_2\, d\varphi/_2$$
$$= -4a^2 \int 2\sin^2\varphi/_2 \cdot \sin\varphi/_2\, d\varphi/_2$$
$$= -8a^2 \int (1 - \cos^2\varphi/_2)\, d\cos\varphi/_2$$
$$= -8a^2\,(\cos\varphi/_2 - \tfrac{1}{3}\cos^3\varphi/_2) + c.$$

Da für $\varphi = 0$ auch $s = 0$, so ist $c = \frac{16}{3}a^2$.

Da ferner $s = 4a\,(1 - \cos\varphi/_2$ so ist

$$\eta = -\frac{2a\,(\cos\varphi/_2 - \tfrac{1}{3}\cos^3\varphi/_2) + \tfrac{4}{3}a}{1 - \cos\varphi/_2}, \text{ also}$$

Bogen der ganzen Cykloide (für welchen $\varphi = 2\pi$) $\eta = \frac{4}{3}a$.

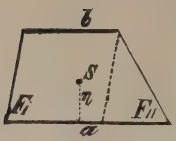
B. Schwerpunkt ebener Flächen.

79. Der Schwerpunkt eines Dreiecks ist der Durch-
ber von den Ecken nach den Gegenseitenmitten gezogenen
erfalen.

80. Der Schwerpunkt eines Parallelogramms ist
agonalendurchschnitt.

81. Der Schwerpunkt eines regelm. Polygons ist
Centrum.

§ 82. Schwerpunkt eines Trapezes.

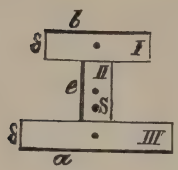


Theilt man die Fläche F des Trapezes i einer Seite Parallele in ein Parallelogram Dreieck $F_{,,}$, so ist

$$F\eta = F_{,}\frac{h}{2} + F_{,,}\frac{h}{3}, \text{ daher}$$

$$\eta = \frac{h\,(a+2b)}{3\,(a+b)}$$

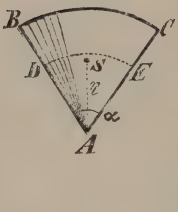
§ 83. Schwerpunkt eines T.



$$F\eta = F_{,}\eta_{,} + F_{,,}\eta_{,,} + F_{,,,}\eta_{,,,}, \text{ daher}$$

$$\eta = \frac{a\cdot\delta/_2 + e\,(e/_2+\delta) + b\,(e+\frac{3}{2}\delta)}{a+b+e}$$

§ 84. Schwerpunkt eines Kreissektors.



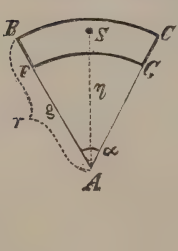
Denkt man den Kreissektor in unendl Sektoren zerlegt, so kann man diese als Dr sehen, deren Schwerpunkte einen Bogen DE welcher dem Bogen BC des gegebenen Sektor ist. Daher ist der Schwerpunkt des geg. identisch mit dem Schwerpunkte des Bogens D § 78, 1 ist $\eta : AD =$ Sehne DE : Bogen DE.

$$\eta : \tfrac{2}{3}r = \tfrac{4}{3}r\sin\alpha/_2 : \tfrac{2}{3}r\alpha$$

$$\eta = \frac{4\,r\sin\alpha/_2}{3\,\alpha}$$

Zusatz. Für $\alpha = \pi$ ergiebt sich für den **Schwerpunkt der Ha fläche** $\eta =$

§ 85. Schwerpunkt eines Kreisringstücks.



Bezeichnen η_1 u. η_2 die Schwerpunktsordi Sektoren ABC u. AFG, so ist

$$ABC\cdot\eta_{,} = \text{Ring.}\ \eta + AFG\cdot\eta_2$$

$$\text{Ring.}\ \eta = ABC\cdot\eta_{,} - AFG\cdot\eta_{,,}$$

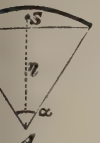
$$(r^2-\varrho^2)\,\alpha\eta = r^2\alpha\eta_{,} - \varrho^2\,\alpha\eta_{,,}.$$

Nach dem vorigen § ist $\eta_{,} = \dfrac{4\,r\sin\alpha/_2}{3\,\alpha}$

$$\eta_{II} = \frac{4\,\varrho \sin \alpha/_2}{3\alpha}, \text{ daher}$$

$$\eta = \frac{4\,(r^3 - \varrho^3)\sin \alpha/_2}{3\,(r^2 - \varrho^2)\,\alpha}.$$

6. Schwerpunkt eines Kreissegments.



Bezeichnen F F, F_{II} die Segmentfläche, die Sektorfläche, die Dreiecksfläche, so ist

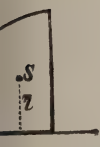
$$F\eta = F_I\eta_I - F_{II}\eta_{II}$$

$$r^2(\alpha - \tfrac{1}{2}\sin\alpha)\eta = \frac{r^2\alpha \cdot 4r\sin\alpha/_2}{3\alpha} - \frac{r^2}{2}\sin\alpha \cdot \frac{2}{3}r\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\eta = \frac{4\,r\sin^3\alpha/_2}{3\,(\alpha - \sin\alpha)}$$

Zusatz. Für $\alpha = \pi$ ergiebt sich, wie in § 84 Zusatz, für den Schwerpunkt der Halbkreisfläche $\eta = \frac{4}{3\pi}r$.

7. Schwerpunkt einer Fläche zwischen einem Kurvenbogen und den Ordinaten der Endpunkte dieses Bogens.



$$F \cdot \xi = \int xy\,dx$$

$$F \cdot \eta = \int \tfrac{1}{2}y^2 dx$$

Beispiele.

1. Für die in A anhebende Parabelfläche zwischen dem Bogen und der x-achse ist

$$\tfrac{2}{3}xy\xi = 1/p \cdot \int x^{\frac{3}{2}}dx$$

$$= \tfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\,1/p + (c = 0)$$

$$\xi = \tfrac{3}{5}x.$$

$\frac{2}{3}xy\eta = \int \frac{1}{2}y^2 dx = \frac{p}{2}\int x\,dx$ ergiebt sich

$$\eta = \tfrac{3}{8}y.$$

Für die Fläche zwischen der Parabel und der ist

$$\tfrac{1}{3}xy\xi = \int \tfrac{1}{2}x^2 dy$$

$$= \tfrac{1}{2}\int \frac{y^4}{p^2}dy = \frac{1}{2p^2}\cdot\frac{1}{5}y^5 + (c = 0)$$

$$\frac{y^3}{3p}\xi = \frac{1}{10p^2}y^5$$

$$\xi = \frac{3y^2}{10p}$$

$$\xi = \frac{3}{10}x.$$

Aus $\frac{1}{3}xy\eta = \int xy\,dy$ ergiebt sich

$$\eta = \frac{3}{4}y$$

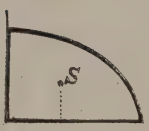
Anmerk. Die so eben gefundenen Resultate für ξ und η erg
auch in folgender Weise:
Da die Fläche zwischen Parabel und y-achse die Differenz
Rechtecke xy und der Fläche zwischen Parabel und x-achse ist,

$$\frac{1}{3}xy\xi = xy \cdot \frac{x}{2} - \frac{2}{3}xy \cdot \frac{3}{5}x, \text{ daher } \xi = \frac{3}{10}x.$$

$$\frac{1}{3}xy\eta = xy \cdot \frac{y}{2} - \frac{2}{3}xy \cdot \frac{1}{2}y, \text{ daher } \eta = \frac{1}{4}y.$$

3. Für den Ellipsenquadranten ist

$$F \cdot \xi = \int xy\,dx$$



$$= -\frac{b}{2a}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} + c.$$

Für $x = o$ ist $F = o$, daher $c =$

$$\frac{1}{4}ab\pi\xi = -\frac{b}{3a}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}a^2b, \text{ woraus}$$

$$\xi = \frac{4}{3\pi}a.$$

Aus $F \cdot \eta = \int \frac{1}{2}y^2 dx = \frac{b^2}{2}\int\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx$

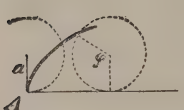
$$= \frac{b^2}{2}\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right) + (c = o) \text{ ergiebt sich}$$

$$\eta = \frac{4}{3\pi}b.$$

Zusatz. Für den Schwerpunkt der halben Ellipsenfläche ist

$$\xi = o,\ \eta = \frac{4}{3b}\pi.$$

4. Für die in A anhebende Cykloidenfläche ist



$$F \cdot \xi = \int xy\,dx \quad \begin{array}{l} x = a(\varphi - \sin\varphi) \\ y = a(1 - \cos\varphi) \\ dx = a(1 - \cos\varphi)\,d\varphi \end{array}$$

$$F \cdot \xi = a^3 \int (\varphi - \sin\varphi)(1 - \cos\varphi)^2\,d\varphi$$

$$= a^3 \int \varphi(1 - \cos\varphi)^2\,d\varphi - a^3 \int \sin\varphi(1 - \cos$$

Setze $(1 - \cos\varphi)^2\,d\varphi = d\psi$,

also $\psi = \frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi$.

$$F \cdot \xi = a^3(\varphi\psi - \int \psi\,d\varphi) - a^3(\psi\sin\varphi - \int \psi\cos$$

$$= a^2[\tfrac{3}{2}\varphi^2 - 2\varphi\sin\varphi + \tfrac{1}{4}\varphi\sin 2\varphi - \tfrac{3}{4}\varphi^2 + 2\cos\varphi + \tfrac{1}{8}$$

$$- \tfrac{1}{3}(1 - \cos\varphi)^3] +$$

r $\varphi = 0$ ist $F = 0$, daher $c = \frac{1}{8}^5\, a^3$, daher

$$F \cdot \xi = a^3\left[\tfrac{3}{2}\varphi^2 - 2\varphi \sin\varphi + \tfrac{1}{4}\varphi \sin 2\varphi - \tfrac{3}{4}\varphi^2 - 2\cos\varphi + \tfrac{1}{8}\cos 2\varphi - \tfrac{1}{3}(1-\cos\varphi)^3\right] + \tfrac{1}{8}^5 a^3.$$

r die **Fläche der ganzen Cykloide** (für welche $\varphi = 2\pi$) ist daher

$3a^2\pi \cdot \xi = = a^3\left[\frac{3}{2} \cdot 4\pi^2 - 3\pi^2 - 2 + \frac{1}{8}\right] + \frac{1}{8}^5 a^3$, woraus

$$\xi = a\pi.$$

ner ist $F \cdot \eta = \int \frac{1}{2} y^2\, dx$ | $y^2 = a^2(1-\cos\varphi)^2$

$dx = a(1-\cos\varphi)\, d\varphi$

$$F \cdot \eta = \frac{a^3}{2}\int (1+\cos\varphi)^3\, d\varphi.$$

$$= \frac{a^3}{2}\left(\varphi - 3\sin\varphi + \tfrac{3}{2}\varphi + \tfrac{3}{4}\sin 2\varphi - \sin\varphi + \tfrac{1}{3}\sin^3\varphi\right)$$

$$= \frac{a^3}{2}\left(\tfrac{5}{2}\varphi - 4\sin\varphi + \tfrac{3}{4}\sin 2\varphi + \tfrac{1}{3}\sin^3\varphi\right).$$

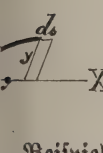
r die **Fläche der ganzen Cykloide** (für welche $\varphi = 2\pi$) ist daher

$3a^2\pi \cdot \eta = \frac{a^3}{2}(5\pi)$, woraus

$$\eta = \tfrac{5}{8}a.$$

C. Schwerpunkt von Rotationsoberflächen.

88. Der Schwerpunkt einer Rotationsoberfläche liegt offenbar in der Rotationsachse, daher, wenn AX die Rotationsachse, $\eta = 0$. Bezeichnet O die Rotationsoberfläche, so ist



$dO = 2\pi y\, ds$, daher $O \cdot \xi = \int 2\pi y\, ds \cdot x$ oder

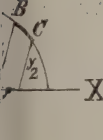
$$O \cdot \xi = 2\pi \int xy\, ds.$$

Beispiele.

Schwerpunkt der Kugelzone.

$O \cdot \xi = 2\pi \int xy\, ds$ | $x^2 + y^2 = r^2$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$



$$ds = \begin{cases} \frac{dx}{y}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{dx}{y}\,r \\ \frac{dy}{x}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{dy}{x}\,r \end{cases}$$

$$O \cdot \xi = 2\pi \int rx\,dx$$
$$= \pi r x^2 + (c = -\pi r y_1^2). \quad \text{Da nun } O = 2r\pi (x_2 - x_1$$
$$\xi = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2).$$

Zusatz. Für die Kalotte ist $\xi = \frac{1}{2}(r + x)$.
Für die Halbkugelfläche ist $\xi = \frac{1}{2} r$.

2. Oberfläche des Rotationsparaboloids.

$$O \cdot \xi = 2\pi \int xy\,ds \quad \left| \begin{array}{l} y^2 = 2ax \\ \frac{dy}{dx} = \frac{a}{y} \\ ds = \frac{dx}{y} \sqrt{a^2 + y^2} \end{array} \right.$$

$$O \cdot \xi = 2\pi \int x\,dx \sqrt{a^2 + 2ax}$$
$$= 2\pi \sqrt{a} \int x\,dx \sqrt{a + 2x}. \quad \text{Setze } \sqrt{a + 2x} = t$$
$$x = \frac{t^2 - a}{2}$$
$$dx = t\,dt$$
$$O \cdot \xi = \pi \sqrt{a} \int (t^2 - a)\, t^2\,dt$$
$$= \pi \sqrt{a} \int t^4 dt - at^2 dt$$
$$= \pi \sqrt{a} \left[\tfrac{1}{5}(a + 2x)^{\frac{5}{2}} - \frac{a}{3}(a + 2x)^{\frac{3}{2}}\right] + (c = \tfrac{2}{15} a^3 \pi).$$

3. Oberfläche des durch Rotation um die Achse entstehenden Ellipsoids.

$$O \cdot \xi = 2\pi \int xy\,ds \quad \left| \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y} \\ ds = \frac{dx}{a^2 y} \sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2} \end{array} \right.$$

$$O \cdot \xi = 2\pi \int \frac{x\,dx}{a^2} \sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}$$
$$= \frac{2b\pi}{a^2} \int x\,dx \sqrt{a^4 - c^2 x^2}$$
$$= -\frac{2b\pi}{3a^2c^2} (a^4 - c^2x^2)^{\frac{3}{2}} + \left(c = \frac{2a^4 b\pi}{3c^2}\right).$$

Für die **Oberfläche des halben Ellipsoids** ist daher

$$\left(b^2\pi + \frac{a^2 b\pi}{c} \arcsin = \frac{c}{a}\right) \cdot \xi = -\frac{2b\pi}{3a^2c^2}(a^4 - a^2c^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2a^4 b\pi}{3c^2}$$
$$= \frac{2ab\pi(a^3 - b^3)}{3c^2}$$
$$\xi = \frac{2a(a^3 - b^3)}{3(c^2 b + a^2 c \arcsin c/a)}.$$

Oberfläche des durch Rotation um die Cykloiden-entstehenden Cykloidoids.

$$O \cdot \xi = 2\pi \int xy\, ds \quad \left| \begin{array}{l} y = a - a\cos\varphi \\ x = a\varphi - a\sin\varphi \\ ds = 4a\sin\varphi/_2\, d\tfrac{\varphi}{2} \end{array} \right.$$

$$= 8a^3\pi \int (\varphi - \sin\varphi)(1-\cos\varphi)\sin\varphi/_2\, d\tfrac{\varphi}{2}$$

$$= 8a^3\pi \left[\int \varphi(1-\cos\varphi)\sin\varphi/_2\, d\tfrac{\varphi}{2} - \int \sin\varphi\,(1-\cos\varphi)\sin\varphi/_2\, d\tfrac{\varphi}{2}\right]$$

Setze $(1-\cos\varphi)\sin\varphi/_2\, d\frac{\varphi}{2} = dt$, also

$$t = \int 2\sin^2\varphi/_2 \cdot \sin\varphi/_2\, d\tfrac{\varphi}{2}$$

$$= -2\int \sin^2\varphi/_2\, d\cos\varphi/_2$$

$$= -2\int (1-\cos^2\varphi/_2)\, d\cos\varphi/_2$$

$$= -2\cos\varphi/_2 + \tfrac{2}{3}\cos^3\varphi/_2$$

$$O \cdot \xi = 8a^3\pi \begin{cases} -2\varphi\cos\varphi/_2 + \frac{2}{3}\varphi\cos^3\varphi/_2 \\ -2\int(-\cos\varphi/_2\, d\varphi + \frac{2}{3}\cos^3\varphi/_2\, d\varphi) \\ -\int 4\sin^4\varphi/_2\cos\varphi/_2\, d\frac{\varphi}{2} \end{cases}$$

Nun ist $\int(-\cos\varphi/_2\, d\varphi + \frac{2}{3}\cos^3\varphi/_2\, d\varphi)$

$$= \int -2\cos\varphi/_2 + \tfrac{4}{3}\cos^3\varphi/_2\, d\tfrac{\varphi}{2}$$

$$= -2\sin\varphi/_2 + \tfrac{4}{3}\int(1-\sin^2\varphi/_2)\cos\varphi/_2 d\tfrac{\varphi}{2}$$

$$= -2\sin\varphi/_2 + \tfrac{4}{3}(\sin\varphi/_2 - \tfrac{1}{3}\sin^3\varphi/_2)$$

$$= -\tfrac{2}{3}\sin\varphi/_2 - \tfrac{4}{9}\sin^3\varphi/_2.$$

Ferner ist $\int 4\sin^4\varphi/_2\cos\varphi/_2\, d\varphi/_2$

$$= 4\int \sin^4\varphi/_2\, d\sin\varphi/_2$$

$$= \tfrac{4}{5}\sin^5\varphi/_2, \text{ daher}$$

$$O \cdot \xi = 8a^3\pi \left[-2\varphi(\cos\varphi/_2 - \tfrac{1}{3}\cos^3\varphi/_2) + \tfrac{4}{3}\sin\varphi/_2 + \tfrac{2}{9}\sin^3\varphi/_2 - \tfrac{4}{5}\sin^5\varphi/_2\right]$$

$$= 16a^3\pi \left[-\varphi(\cos\varphi/_2 - \tfrac{1}{3}\cos^3\varphi/_2) + \tfrac{2}{3}\sin\varphi/_2 + \tfrac{4}{9}\sin^3\varphi/_2 - \tfrac{2}{5}\sin^5\varphi/_2\right]$$

D. Schwerpunkt von Rotationskörpern.

§ 89. Vorbemerkung. Der Schwerpunkt eines Körpers mit einer ietralebene liegt in dieser; der eines Körpers mit zwei Symmetral- liegt in deren Durchschnittslinie; der eines Körpers mit drei Sym-ebenen ist der Durchschnittspunkt dieser drei Ebenen.

§ 90. Ist ein Rotationskörper durch Drehung um die se entstanden, so ist für seinen Schwerpunkt $\eta = 0$. Be-iet V den Inhalt dieses Rotationskörpers, so ist

$$dV = y^2\pi dx, \text{ daher } \quad \mathbf{V \cdot \xi = \int y^2 \pi\, x\, dx.}$$

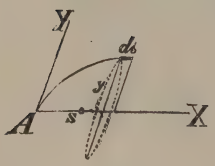
Beispiele.

1. Halbkugel.

$$V \cdot \xi = \int (r^2 - x^2)\,\pi\, x\, dx$$
$$= \frac{\pi r^2}{2} x^2 - \frac{\pi}{4} x^2 + (c = 0)\,.$$

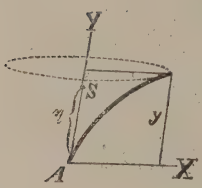
Für die Halbkugel ist $V = \frac{2}{3} r^3 \pi$, $x = r$, daher
$$\xi = \tfrac{3}{8} r.$$

2. Paraboloid.



a) $V \cdot \xi = \int y^2 \pi\, x\, dx$
$= 2a\pi \int x^2\, dx$
$= \frac{2}{3} a\pi x^3 + (c=0)$ | $V = \int \pi y^2\, dx = 2$
$= 2a\,\pi \cdot \frac{x^2}{2}$
$= \frac{y^2 \pi x}{2}$

$$\xi = \tfrac{3}{8} x.$$



b) $V \cdot \eta = \int x^2 \pi\, y\, dy$
$= \pi \int \frac{y^5}{5a^2}\, dy$
$= \frac{\pi}{5a^2} \cdot \frac{1}{6} y^6 + (c = 0).$ $V = \frac{\pi}{5}$ x
$\eta = \frac{5}{6} y.$

3. Cykloidoid.

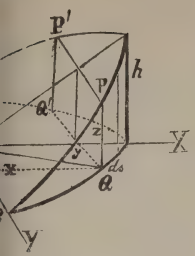
$V \cdot \xi = \int y^2 \pi\, x\, dx$ | $x = a\varphi - a \sin \varphi$
$y = a - a \cos \varphi$
$dx = (a - a \cos \varphi)\, d\varphi.$

$V \cdot \xi = a^4 \pi \int (\varphi - \sin \varphi)\,(1 - \cos \varphi)^3\, d\varphi$
$= a^4 \pi \int \varphi\,(1 - \cos \varphi)^3\, d\varphi - a^4 \pi \int \sin \varphi\,(1 - \cos \varphi)^3$

Setze $(1 - \cos \varphi)^3\, d\varphi = dt$, also
$t = \int (1 - 3 \cos \varphi + 3 \cos^2 \varphi - \cos^3$
$= \frac{5}{2}\varphi - 4 \sin \varphi + \frac{3}{4} \sin 2\varphi + \frac{1}{3} \sin$

$V \cdot \xi = a^4 \pi$ { $\varphi\,(\frac{5}{2}\varphi - 4 \sin \varphi + \frac{3}{4} \sin 2\varphi + \frac{1}{3} \sin^3 \varphi)$
$- \frac{1}{4}(1 - \cos \varphi)^4 - \int (\frac{5}{2}\varphi - 4 \sin \varphi + \frac{3}{4} \sin 2\varphi$
$+ (c = 0).$ $[+ \frac{1}{3} \sin^3$

91. Hilfsaufgabe. Mantel und Volumen des Klauen
en.



Lösung 1. s. Deter, Stereometrie pg. 43.

Lösung 2. Bezeichne M den Theil des Klauenmantels zwischen B u. PQ, so ist

$$dM = z\,ds$$

$$M = \int z\,ds \;\Big|\; \begin{array}{l} ds = r\,d\varphi \\ z : h = x : r \text{ u. } x = r\sin\varphi, \text{ dah.} \\ z = h\sin\varphi \text{ und} \end{array}$$

$$M = rh\int \sin\varphi\,d\varphi$$

$$= -rh\cos\varphi + (c = rh)$$

$$= rh\,(1 - \cos\varphi).$$

ber, für $\varphi = \pi$, **der ganze Klauenmantel** $= 2\,rh$.

eichnet V den Theil des Klauen zwischen BA u. PQQ'P', so ist

$$dV = 2y\,dx \cdot z$$

$$V = 2\int yz\,dx \;\Big|\; \begin{array}{l} z = h\sin\varphi \\ y = r\cos\varphi \\ x = r\sin\varphi,\ dx = r\cos\varphi\,d\varphi. \end{array}$$

$$V = 2r^2h\int \sin\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi$$

$$= -2r^2h\int \cos^2\varphi \cdot d\cos\varphi$$

$$= -\tfrac{2}{3}r^2h\cos^3\varphi + (c = \tfrac{2}{3}r^2h)$$

$$= \tfrac{2}{3}r^2h\,(1 - \cos^3\varphi).$$

her für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ der **ganze Klaueninhalt** $= \frac{2}{3}\,r^2h$.

92. Aufgabe. Den Schwerpunkt des Klauenmantels
s Klauen zu bestimmen.

ung. $M \cdot \xi = \int z\,ds \cdot x \;\Big|\; \begin{array}{l} ds = r\,d\varphi \\ x = r\sin\varphi \\ z = h\sin\varphi \end{array}$

$$M \cdot \xi = r^2h\int \sin^2\varphi\,d\varphi.$$

$$= r^2h\int \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}\,d\varphi$$

$$= \frac{r^2h}{2}\int \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}\,d\,2\varphi$$

$$= \frac{r^2h}{2}\int \frac{1}{2}\,d\,2\varphi - \frac{r^2h}{2}\int \frac{-\cos 2\varphi}{2}\,d\,2\varphi$$

$$= \frac{r^2h}{2}\varphi - \frac{r^2h}{4}\sin 2\varphi + (c = 0).$$

Für $\varphi = \pi$ ist $M = 2rh$

$$\xi = \tfrac{1}{4} r\pi$$

$$M \cdot \eta = \int z \, ds \cdot y = r^2 h \int \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{r^2 h}{2} \sin^2\varphi + (c = o).$$

Für $\varphi = \pi$ ist $M = 2rh$

$$\eta = 0.$$

$$M \cdot \zeta = \int z \, ds \cdot z$$

$$= rh^2 \int \sin^2\varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{rh^2}{2} \int (1 - \cos 2\varphi) \, d\varphi$$

$$= \frac{rh^2}{2} \varphi - \frac{rh^2}{4} \sin 2\varphi + (c = o).$$

Für $\varphi = \pi$ ist $M = 2rh$

$$\zeta = \tfrac{1}{4} h\pi.$$

Bezeichnet V den Theil des Klauen zwischen BA u. PQQ'Q', so

$dV = 2\, z \cdot y \, dx$, daher $V = 2 \int z\, y \, dx$ und

$$V \cdot \xi = 2 \int z\, y \, dx \cdot x = 2r^3 h \int \sin^2\varphi \cos^2\varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{r^3 h}{4} \int \sin^2 2\varphi \, d\, 2\varphi$$

$$= \frac{r^3 h}{16} \int (1 - \cos 4\varphi) \, d\, 4\varphi.$$

$$= \frac{r^3 h}{16} (4\varphi - \sin 4\varphi) + (c = o)$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist $V = \frac{2}{3} r^2 h$,

$$\xi = \frac{3}{16} r\pi.$$

$\eta = o$ folgt aus der Natur des Klauen, da Oh eine Sym ebene ist.

$$V = 2 \int z \cdot y \, dx$$

$$V \cdot \zeta = 2 \int z\, y \, dx \cdot z = 2r^2 h^2 \int \cos^2\varphi \sin^2\varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{r^2 h^2}{4} \int \sin^2 2\varphi \, d\, 2\varphi$$

$$= \frac{r^2 h^2}{16} (4\varphi - \sin 4\varphi)$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist $V = \frac{2}{3} r^2 h$,

$$\zeta = \frac{3}{16} h\pi.$$

93. Guldinische Regel.

Die Oberfläche eines Rotationskörpers ist gleich dem erzeugenden Bogen mal dem Wege seines Schwerpunktes.

Das Volumen eines Rotationskörpers ist gleich der erzeugenden Fläche mal dem Wege ihres Schwerpunktes.

$$\begin{aligned} O &= \int 2x\pi \, ds \\ &= 2\pi \int x \, ds \\ &= 2\pi \, s \, \xi \\ &= s \cdot 2\xi\pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dV &= 2x\pi \cdot dF \\ &= 2\pi \int x \, dF \\ &= 2\pi F\xi \\ &= F \cdot 2\xi\pi. \end{aligned}$$

Beispiel. Kuppel, die durch Rotation eines Kreisbogens α^0 entsteht.

$$O = AB \cdot 2\xi\pi = \tfrac{2}{3} r \xi \pi^2$$

$$\frac{r}{2} + \xi = \eta \quad \text{(s. S. des Kreisb.)}$$

$$\eta : r = \text{Sehne} : \text{Bogen}$$

$$\left(\frac{r}{2} + \xi\right) : r = r\sqrt{3} : \tfrac{1}{3} r\pi.$$

$$\xi = \frac{r}{2}\left(\frac{3}{\pi}\sqrt{3} - 1\right)$$

$$O = r^2\pi\sqrt{3} - \tfrac{1}{3} r^2\pi^2.$$

$$= \widehat{ABD} \cdot 2\,\xi\pi = \left(\frac{r^2\pi}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{8}\right) \cdot 2\xi\pi$$

$$\eta = \tfrac{2}{3} r \cdot \frac{\sin^3 \alpha}{\alpha - \sin\alpha \cos\alpha}$$

$$\xi = \eta - r/_2$$

$$\xi = \frac{2r \sin^3 \alpha}{3(\alpha - \sin\alpha \cos\alpha)}$$

oder, da $\alpha = \frac{\pi}{3}$,

$$\xi = \frac{3r\sqrt{3}}{4\pi - 3\sqrt{3}} - \frac{r}{2}$$

$$= (4\pi - 3\sqrt{3}) \left(\frac{3\sqrt{3}}{4\pi - 3\sqrt{3}} - \tfrac{1}{2}\right) \frac{r^3\pi}{12}$$

$$= \left(3\sqrt{3} - \frac{1}{8\pi - 6\sqrt{3}}\right) \frac{r^3\pi}{12}.$$

Inhalt.

I.	Abschnitt.	Ableitung der Differentialformeln	
II.	„	Höhere Differentiale. Maclaurinscher und Taylorscher Satz	
III.	„	Bestimmung der wahren Werthe ꝛc.	
IV.	„	Maxima und Minima	
V.	„	Konkavität und Konvexität	
VI.	„	Differentiation verwickelter Funktionen	
VII.	„	A. Differentiation der Funktionen mehrerer absolut Ver änderlichen	
		B. Maxima und Minima dieser Funktionen . . .	
		C. Maxima und Minima mit Nebenbedingungen .	
VIII.	„	Tangenten und Krümmung der Kurven . . .	
IX.	„	Evolventen und Evoluten	
X.	„	Die wichtigsten Sätze der Integralrechnung . .	
XI.	„	Rektifikation und Quadratur der Kurven . . .	
XII.	„	Komplanation und Kubatur der Revolutionskörper	
XIII.	„	Integration der Differentialgleichungen	
XIV.	„	Schwerpunktsbestimmungen	

Druck von Gebr. Unger (Th. Grimm) in Berlin, Schönebergerstr. 17 a.

Städtische Oberrealschule zu Halle a. S.

Einführung in die Differentialrechnung und Anwendung derselben auf Maxima, Minima, unendliche Reihen und Quotienten in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$.

Von

Professor Dr. Max Diesing.

Beilage des Osterprogramms 1911.

Halle a. S.
Druck von Gebauer-Schwetschke Druckerei u. Verlag m. b. H.
1911.

911. Progr. Nr. 370.

Der folgende Lehrgang der Differentialrechnung ist aus der Praxis hervorgegangen und zwar in den der Unterprima eingereiht. Bei seinem Aufbau sind demnach nur die bis zu dieser Klasse bekannten Gebiete der Mathematik berücksichtigt. Vor allem ist vorausgesetzt, daß den Schülern schon aus den früheren Klassen der Funktionsbegriff geläufig geworden ist und sie auch in der graphischen Darstellung der Funktionen geübt sind. Die §§ 8—14 sind als eine erst in Oberprima zu behandelnde Fortsetzung und Erweiterung der Differentialrechnung gedacht.

§ 1.

Bestimmung und Bedeutung des Differentialquotienten.

Aufgabe 1. Einer Kugel mit dem Radius $r = 5\,\text{cm}$ ist ein gerader Kegel einbeschrieben; es ist der Inhalt desselben als Funktion der Höhe h zu bestimmen.

Lösung. Der Radius des Grundkreises des Kegels sei ϱ, es ist dann der Inhalt

$$v = \frac{1}{3}\pi\varrho^2 h.$$

ϱ ist die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Kathetenprojektionen h und $2r - h$ sind, folglich

$$\varrho^2 = h(2r - h)$$

$$v = \frac{1}{3}\pi h^2(2r - h)$$

$$v = \frac{1}{3}\pi h^2(10 - h).$$

Aufgabe 2. Es soll das Steigen bzw. Fallen des Inhaltes des Kegels festgestellt werden, wenn die Höhe h alle möglichen Werte nacheinander durchläuft.

Lösung. Es sei $h = 6\,\text{cm}$, für diesen Wert ist $v = 144 \cdot \left(\frac{\pi}{3}\right)\text{ccm}$. Es soll nun diese Höhe um Δh vergrößert werden, der Zuwachs des Volumens werde mit Δv bezeichnet.

$$v + \Delta v = \frac{1}{3}\pi(6 + \Delta h)^2(10 - 6 - \Delta h)$$

$$144 \cdot \frac{\pi}{3} + \Delta v = \frac{\pi}{3}(144 + 12(\Delta h) - 8(\Delta h)^2 - (\Delta h)^3)$$

$$\Delta v = \frac{\pi}{3}(12(\Delta h) - 8(\Delta h)^2 - (\Delta h)^3).$$

Ein positives Δv bedeutet eine Zunahme, ein negatives Δv eine Abnahme des Inhaltes.

Es sei $\Delta h = 2$ cm; $\Delta v_2 = -16 \cdot \frac{\pi}{3}$ ccm, d. h. bei einer Vergrößerung der Höhe um 2 cm ist der Inhalt um $16 \cdot \frac{\pi}{3}$ ccm kleiner geworden. Hier läßt sich nun die Frage aufstellen, ob bei allmählicher Vergrößerung der Höhe von 6 cm auf 8 cm ein dauerndes Abnehmen des Inhaltes vorhanden ist. Aus obigem Werte für Δv_2 kann dies nicht geschlossen werden, denn $\Delta h = 1$ cm gibt $\Delta v_1 = 3 \cdot \frac{\pi}{3}$ ccm, d. h. bei einer Vergrößerung der Höhe von 6 cm aus um 1 cm ist der Inhalt des Kegels um $3 \cdot \frac{\pi}{3}$ ccm größer geworden, bei weiterer Vergrößerung der Höhe um 1 cm ist er um $\Delta v_2 - \Delta v_1 = 19 \cdot \frac{\pi}{3}$ ccm gefallen. Obgleich aus

$$\Delta v = \frac{\pi}{3}(12(\Delta h) - 8(\Delta h)^2 - (\Delta h)^3)$$

sich ergibt, daß für jedes $\Delta h < 1$ der Wert für Δv positiv ist, so läßt sich daraus nicht der Schluß ziehen, daß der Inhalt dauernd zunimmt, wenn die Höhe von 6 cm auf 7 cm wächst, es folgt vielmehr nur, daß der Inhalt für $h = 7$ cm um $3 \cdot \frac{\pi}{3}$ ccm größer ist als derjenige für $h = 6$ cm. Die Feststellung, ob v fortwährend zunimmt, ist nur zu ermöglichen, wenn man für sämtliche Werte von Δh (zwischen 0 und 1) die zugehörigen Zunahmen Δv berechnet und jede derselben mit der vorhergehenden vergleicht. Es kommt somit darauf an, die Veränderung des Inhaltes zu bestimmen, wenn die Höhe um eine außerordentlich kleine Größe vermehrt wird. Mit beliebiger Verkleinerung von Δh wird auch Δv immer kleiner; dividieren wir beiderseits durch Δh, so folgt

$$\frac{\Delta v}{\Delta h} = \frac{\pi}{3}(12 - 8(\Delta h) - (\Delta h)^2).$$

Aus dieser Gleichung erkennen wir, daß der Quotient $\frac{\Delta v}{\Delta h}$ mit abnehmenden Δh sich immer mehr dem Werte $12 \cdot \frac{\pi}{3}$ nähert. (Man setze $\Delta h = \frac{1}{10^6}$ cm; $\frac{1}{10^{10}}$ cm; usw. Läßt man Δh unendlich klein werden, d. h. kleiner als jede noch so kleine Zahl, die man sich denken kann, so hat der Quotient den Wert $12 \cdot \frac{\pi}{3}$. $\frac{\Delta v}{\Delta h}$ wird dann durch $\frac{dv}{dh}$ ersetzt, so daß also

$$\frac{dv}{dh} = 12 \cdot \frac{\pi}{3}$$

ist. dv und dh sind abgekürzte Bezeichnungen für unendlich kleine Zunahmen des Inhaltes und der Höhe. Der Quotient $\frac{dv}{dh}$, der nach obigem einen ganz bestimmten Wert hat, heißt der Differentialquotient des Inhaltes gebildet nach der Höhe. Für

lie Höhe 6 cm ist $\frac{dv}{dh} = 12 \cdot \frac{\pi}{3}$ also positiv, d. h. das Volumen nimmt zu, sobald die Höhe 6 cm um ein unendlich kleines Stück vergrößert wird.

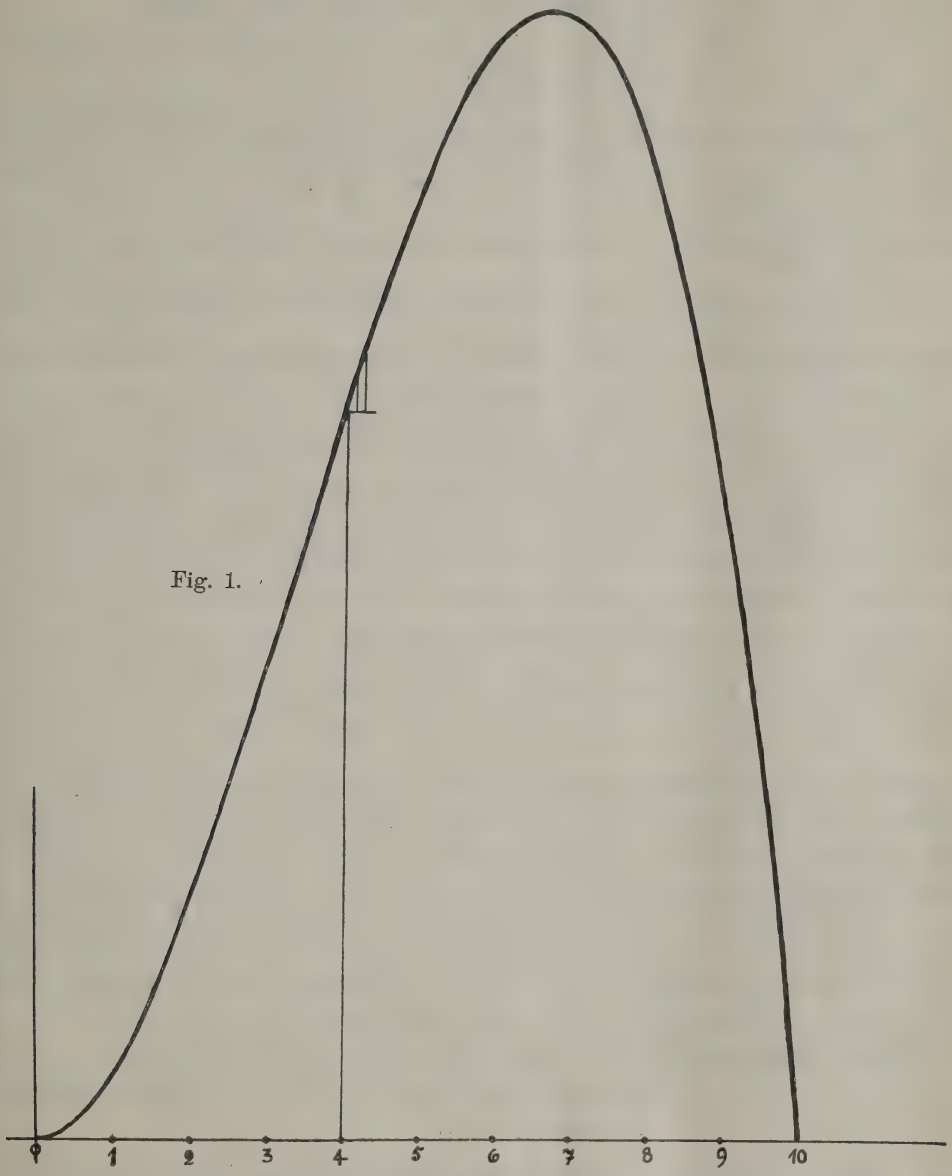


Fig. 1.

In gleicher Weise wird der Differentialquotient für eine beliebige Höhe gebildet:

$$v + \Delta v = \frac{1}{3}(h + \Delta h)^2(10 - h - \Delta h),$$

$$v + \Delta v = \frac{1}{3}\pi h^2(10 - h) + [h(\Delta h)(20 - 3h) + (\Delta h)^2(10 - 3h) - (\Delta h)^3] \cdot \frac{\pi}{3},$$

$$v = \frac{1}{3}\pi h^2(10 - h),$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta h} = \frac{1}{3}\pi[h(20 - 3h) + (\Delta h)(10 - 3h) - (\Delta h)^2],$$

$$\frac{dv}{dh} = \frac{1}{3}\pi h(20 - 3h).$$

Jetzt läßt sich obige Frage beantworten. Der Inhalt nimmt so lange zu, a $\frac{dv}{dh}$ positiv ist, d. h. $20 > 3h$ oder $h < 6\frac{2}{3}$ cm. Für Werte von h, die größer a $6\frac{2}{3}$ cm sind, ist $\frac{dv}{dh}$ negativ, d. h. der Inhalt des Kegels nimmt mit wachsender Hö ab. Für $h = 6\frac{2}{3}$ cm wird $\frac{dv}{dh} = 0$. An dieser Stelle geht der Differentialquotient v positiven zu negativen Werten über, oder der Inhalt geht aus dem Steigen ins Fall über, d. h. er muß für $h = 6\frac{2}{3}$ cm seinen größten Wert erreichen.

Der Differentialquotient läßt erkennen: erstens durch sein Vorzeichen, ob d abhängig Veränderliche (v) mit wachsenden Werten der willkürlich Veränderlich (h) zu- oder abnimmt, zweitens durch seine Größe, wievielmal so stark das Wachsen (A nehmen = neg. Wachsen) der abhängig Veränderlichen als das der willkürlich Veränd lichen ist. Anschaulich läßt sich dieses durch die graphische Darstellung (Fig. 1) mach Die Werte für h werden als Abszissen in cm, die für v als Ordinaten abgetrag (1 ccm sei als 1 mm dargestellt, wobei der einfachen Rechnung wegen $\frac{1}{3} \cdot \pi = 1$ g setzt ist.) Die Kurve stellt den Zusammenhang zwischen v und h dar. Für $h =$ cm ist $v = 96$ mm und $\frac{dv}{dh} = 4(20 - 12) = 32$. $dh = 1$ mm gibt $dv = 3{,}2$ m (= 3,2 ccm). Durch Nachmessen an der Figur findet man dv sehr wenig von 3,2 m verschieden. $dh = 2$ mm gibt $dv = 6{,}4$ mm (= 6,4 ccm). Hier ist die Abweichu von der wahren Zunahme im Verhältnis größer. Würden nämlich bei gleichmäßige Wachsen von h ($dh = 1$ mm, 2 mm, 3 mm usw.) auch die Zunahmen von v gleic mäßig sein ($dv = 3{,}2$ mm; 6,4 mm; 9,6 mm usw.), so würde die Kurve, wie aus d Umkehrung des Proportionalansatzes folgt, eine gerade Linie sein. In unserm Fa ist die Linie für v gekrümmt, daher die Abweichungen der berechneten Werte von den wahren. (Über die Lage der Geraden zur Kurve vgl. § 2.)

Weitere Beispiele: Einer Kugel ist ein Zylinder einbeschrieben;
Einem geraden Kegel (r, h) ist ein gerader Zylinder ei beschrieben usw.

§ 2.

Die geometrische Bedeutung des Differentialquotienten bei Kurven.

A und B seien zwei Punkte der Kurve $y = f(x)$ [bestimmtes Beispiel y $x^2(10 - x)$]. Die Koordinaten von A seien $x_1 \mid y_1$, die von B $x_2 \mid y_1$. Letztere könn

it $x_1 + \Delta x \,|\, y_1 + \Delta y$ bezeichnet werden. In dem Dreieck ABC ist dann $BC = \Delta y$, $C = \Delta x$, folglich

$$\operatorname{tg} BAC = \operatorname{tg} ADx = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Bewegt sich der Punkt B auf A zu, so nähert sich die Sehne AB der Tangente AE. Für Δy und Δx endlich klein wird die Sehne zur Tangente in A, und r Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ wird der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$; also

$$\operatorname{tg} AEx = \frac{dy}{dx}.$$

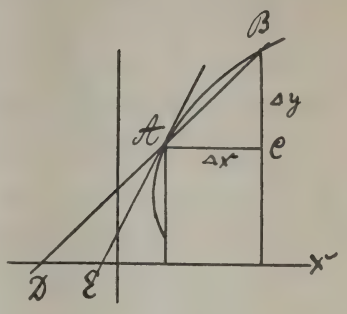


Fig. 2.

Um den Winkel in E zu bestimmen, ist in $\frac{dy}{dx}$ r Wert der Abszisse x_1 des Punktes A zu setzen, z. B. $y = x^2(10 - x)$ $\frac{dy}{dx} = x(20 - 3x)$.

Die Abszisse von A sei 4, also

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} AEx = 4 \cdot 8 = 32, \quad \widehat{AEx} = 88^0\,12'\,36''.$$

Bei Kurven ist somit der Differentialquotient gleich dem tangens des Winkels, n die Berührende mit der positiven Richtung der x-Achse bildet. Ist $\frac{dy}{dx}$ positiv, steigt die Kurve, negativ, so fällt dieselbe. Ist für einen Wert von x der Differntialquotient gleich 0, so ist die Tangente parallel der x-Achse. Für diesen Wert n x erreicht die Kurve in bezug auf ihre nächste Umgebung ihren höchsten bzw. edrigsten Wert, je nachdem $\frac{dy}{dx}$ von positiven zu negativen Werten bzw. umkehrt übergeht.

Würde von einer Stelle der Kurve aus statt des veränderlichen Wachsens ein eichmäßiges eintreten, so würde die Kurve in die Tangente an dieser Stelle überhen (vgl. § 1 Schluß).

Folgende Kurven sind zu zeichnen und dann das Steigen bzw. Fallen sowie re höchsten und tiefsten Punkte zu bestimmen.

1) $y = x^3 - 7x + 6$,

2) $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{35}{4}x + \frac{319}{24}$,

3) $y = x^3 - 12x + 16$.

§ 3.

Maxima und Minima.

Durchläuft in der Funktion $y = x^2(10 - x)$ die willkürlich Veränderliche x e möglichen Werte, so erkennt man, daß y bis zu einem bestimmten Werte von x ächst, bei weiterer Zunahme von x sich jedoch verkleinert. Die graphische Darellung läßt sich deutlicher erkennen. In dem Punkte, in welchem die abhängig

Veränderliche vom Steigen ins Fallen übergeht, wird sie einen größten We (Maximum) in bezug auf ihre unmittelbar vorhergehenden und nachfolgenden Wer angenommen haben. Nun gibt der Differentialquotient nach § 1 durch sein Vo zeichen an, ob eine Funktion steigt oder fällt. Für die angegebene Funktion ist d Differentialquotient $\frac{dy}{dx} = x(20 - 3x)$. Solange x kleiner ist als $6\frac{2}{3}$, ist $\frac{dy}{dx}$ positiv, d abhängig Veränderliche also im Zunehmen begriffen; sobald aber x größer als 6 ist $\frac{dy}{dx}$ negativ, daher y im Abnehmen begriffen. Für $x = 6\frac{2}{3}$ wird $\frac{dy}{dx} = 0$, an dies Stelle geht der Differentialquotient von positiven zu negativen Werten über, d. h. d Funktion vom Wachsen ins Abnehmen. Sie muß demnach für diesen Wert der w kürlich Veränderlichen einen größten Wert erreichen. Wir erkennen daraus, d derjenige Wert der willkürlich Veränderlichen, für welchen eine Funktion derselb ein Maximum wird, die Gleichung erfüllen muß:

$$\frac{dy}{dx} = 0.$$

Wenn dagegen eine Funktion bis zu einem gewissen Punkt der willkürli Veränderlichen abgenommen hat und ist dann ins Wachsen übergegangen, so hat in diesem Punkte relativ zu unmittelbar vorhergehenden und nachfolgenden Wer einen kleinsten Wert (Minimum) angenommen. Betrachten wir die Funkti $y = \frac{x^2}{x - 2r}$ (das Volumen y des einer Kugel (r) umbeschriebenen Kegels mit d Höhe x wird berechnet durch $y = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \frac{x^2}{x - 2r}$) und lassen x alle Werte von $2r$ durchlaufen (graphisch darstellen). Aus dem Differentialquotienten $\frac{dy}{dx} = \frac{x(x -$ ersehen wir, daß y abnimmt, solange $x < 4r$ ist, dagegen zunimmt, sobald $x > 4r$ Für $x = 4r$ wird $\frac{dy}{dx} = 0$, an dieser Stelle geht der Differentialquotient von negati zu positiven Werten über, die Funktion also vom Abnehmen ins Wachsen. Sie m demnach für $x = 4r$ einen kleinsten Wert annehmen. Auch hier folgt, daß derjen Wert der willkürlich Veränderlichen, für welchen eine Funktion derselben Minimum wird, die Gleichung erfüllen muß:

$$\frac{dy}{dx} = 0.$$

Nach § 2 ist bei Kurven $\frac{dy}{dx}$ gleich dem tangens des Winkels, den die rührende in einem Kurvenpunkte mit der positiven Richtung der x-Achse bil Aus den Darlegungen in diesem Paragraphen folgt, daß in dem Punkte der Ku in welchem eine Funktion ihr Maximum oder Minimum erreicht, die Tangente para der x-Achse sein muß, also $\frac{dy}{dx} = 0$.

In dem Punkte, für welchen die abhängig Veränderliche ein Maximum reicht, geht der Differentialquotient, der ja selbst wieder eine Funktion von x

on positiven zu negativen Werten über, er hat also für zunehmende x abgenommen. ach § 1 ist das Fallen einer Funktion daran zu erkennen, daß der Differential- uotient dieser Funktion negativ ist.

Es muß daher der Differentialquotient des Differentialquotienten, d. h. der zweite ifferentialquotient für diesen Wert von x, der das Maximum gibt, negativ sein. In eicher Weise folgt, daß der zweite Differentialquotient für den Wert von x, der as Minimum gibt, positiv ist.

Wenn jedoch für einen Wert von x auch der zweite Differentialquotient den ert Null annimmt, so ist (wenn von den höheren Differentialquotienten abgesehen ird) zu untersuchen, ob $\frac{dy}{dx}$ in diesem Falle sein Vorzeichen wechselt oder nicht. itt der erste Fall ein, so hat die Funktion (Kurve) ein Maximum, wenn $\frac{dy}{dx}$ von + —, ein Minimum, wenn $\frac{dy}{dx}$ von — zu + übergeht.

Beispiel. Gegeben $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 2$; $\frac{dy}{dx} = 4(x-1)^3$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ $12(x-1)^2$ erhalten für $x = 1$ den Wert Null. In dem Punkte $x = 1$ wechselt der ste Differentialquotient sein Vorzeichen und geht von negativen zu positiven Werten er; die Funktion (Kurve) hat in dem Punkte $x = 1$ ein Minimum (Fig. 3)*).

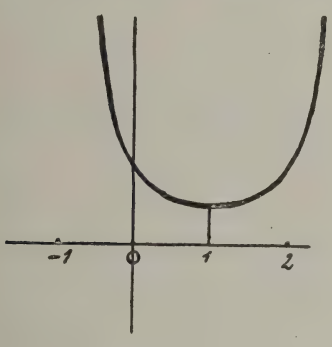


Fig. 3.

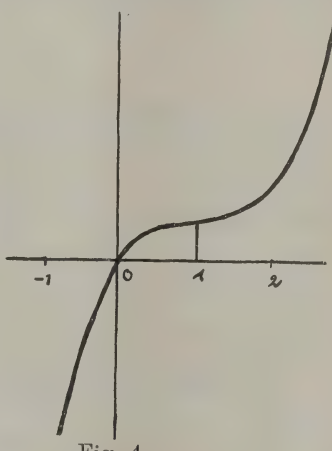


Fig. 4.

Tritt der zweite Fall ein, daß der erste Differentialquotient das Zeichen nicht chselt, so verharrt eine Funktion (Kurve) im Steigen bzw. im Fallen, nachdem die lkürlich Veränderliche den Punkt, für welchen $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, überschritten hat. In sem Falle kann also weder Maximum noch Minimum eintreten.

Beispiel. $y = x^3 - 3x^2 + 3x$; $\frac{dy}{dx} = 3(x-1)^2$ ist stets positiv (Fig. 4.*).

Über die Bedeutung von $\frac{d^2y}{dx^2}$ bei Kurven vgl. § 16.

*) In Fig. 3 und 4 sind x in cm, y in halben cm abgetragen.

§ 4.

Bestimmung der Differentialquotienten einer Konstanten und der einfachen Funktionen x^n, $\sin x$, $\cos x$.

Nach § 1 wird der Differentialquotient der Funktion $y = f(x)$ dadurch bestimmt, daß die willkürlich Veränderliche x um Δx vermehrt, dann der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ berechnet und schließlich zur Grenze Δx unendlich klein (d. h. rechnerisch in Vergleich zu endlichen Größen $= 0$) übergegangen wird. Mithin:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x),$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y = f(x + \Delta x) - f(x),$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right].$$

Der Differentialquotient der Funktion $y = f(x)$ wird entweder mit y' oder mit $f'(x)$ bezeichnet.

1) $$y = a$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \left[\frac{a - a}{\Delta x}\right] = 0,$$ d. h. der Differentialquotient einer Konstanten gleich Null.

2) $$y = x^n$$

α) n sei eine positive ganze Zahl,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \left[\frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}\right] = \lim_{\Delta x = 0} \left[\frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{(x + \Delta x) - x}\right].$$

Nach Ausführung der Division folgt

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \left[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} x + (x + \Delta x)^{n-3} x^2 + \cdots + x^{n-1}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = n x^{n-1}.$$

β) n sei eine negative ganze Zahl; $n = -k$

$$y = x^{-k} = \frac{1}{x^k},$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \left[\frac{\frac{1}{(x + \Delta x)^k} - \frac{1}{x^k}}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x = 0} \left[\frac{x^k - (x + \Delta x)^k}{\Delta x \cdot x^k \cdot (x + \Delta x)^k}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x = 0} \left[-\frac{1}{x^k \cdot (x + \Delta x)^k} \cdot \frac{(x + \Delta x)^k - x^k}{\Delta x}\right]$$

$$= -\frac{1}{x^{2k}} \cdot k x^{k-1} = -k x^{-k-1}.$$

Setzt man für $-k$ wieder n, so erhält man $\frac{dy}{dx} = n x^{n-1}$.

γ) n sei eine gebroche Zahl; $n = \frac{p}{q}$,

$$y = x^{\frac{p}{q}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x=0}\left[\frac{(x+\Delta x)^{\frac{p}{q}} - x^{\frac{p}{q}}}{\Delta x}\right].$$

Es werde $x^{\frac{1}{q}} = u$ gesetzt. $x = u^q$; folglich $y = u^p$

$$x + \Delta x = (u + \Delta u)^q,$$

$$\Delta x = (u + \Delta u)^q - u^q. \quad \text{Mithin}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x=0}\left[\frac{(u+\Delta u)^p - u^p}{(u+\Delta u)^q - u^q}\right].$$

Zähler und Nenner der rechten Seite werden durch Δu dividiert; für $\Delta x = 0$ ird auch $\Delta u = 0$, demnach ist

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta u=0}\left[\frac{\frac{(u+\Delta u)^p - u^p}{\Delta u}}{\frac{(u+\Delta u)^q - u^q}{\Delta u}}\right]$$

$$= \frac{pu^{p-1}}{qu^{q-1}} = \frac{p}{q}u^{p-q} = \frac{p}{q}\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p-q} = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = n \cdot x^{n-1}.$$

Der Differentialquotient der Funktion x^n ist also für jedes beliebige n

$$nx^{n-1}.$$

3) $$y = \sin x,$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x=0}\left[\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}\right].$$

Der Zähler der rechten Seite ist die Differenz zweier sin, der sinus ist aber s Verhältnis einer bestimmten Strecke im Kreis zum Radius; der Nenner Δx ist n Winkel, ist also bisher in Grad, Minuten und Sekunden angegeben. Bei einem uotienten müssen Zähler und Nenner dieselbe Benennung haben. Es muß demnach ebenfalls als Quotient zweier Längen bestimmt werden, nämlich als Verhältnis des m Winkel gehörenden Bogens und des Radius. Wird der Radius des Kreises eich 1 gesetzt, so kann die Länge des Lotes als sinus, der Bogen muß dann mit x zeichnet werden. Man sagt dann, x ist im Bogenmaß ausgedrückt, z. B. $x = 60^0$; $^0 = \frac{\pi}{3}$; $y = \sin\frac{\pi}{3} = \sin 1{,}0472$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x=0}\left[\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x=0}\left[\frac{2\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\right].$$

Für $\Delta x = 0$ erhält die rechte Seite die Form $\frac{0}{0}$, da sowohl $\sin\frac{\Delta x}{2}$ als auch Δ

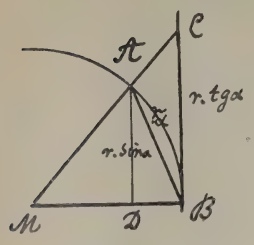


Fig. 5.

Null werden. Es ist demnach zu untersuchen, welchem Wert sich der Quotient $\frac{\alpha}{\sin\alpha}$ nähert, wenn $\alpha = 0$ wird. Es ist

$$\triangle MBA < \text{Sekt. } MBA < \triangle MBC \quad \text{oder}$$

$$\frac{r \cdot AD}{2} < \frac{r \cdot \text{Bog. } AB}{2} < \frac{r \cdot BC}{2} \quad \text{oder}$$

$$\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha.$$

Nach Division durch $\sin\alpha$ e

hält man $1 < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha}$. Nähert sich α der Null,

nähert sich $\frac{1}{\cos\alpha}$ dem Werte 1. Die beiden Grenzen 1 und $\frac{1}{\cos\alpha}$, zwischen dene

$\frac{\alpha}{\sin\alpha}$ liegt, erhalten für $\alpha = 0$ denselben Wert 1, folglich muß $\frac{\alpha}{\sin\alpha}$ für $\alpha = 0$ gleic

1 sein.

$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x=0}\left[\frac{2\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\right]$. Nach dem vorigen ist $\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$, also

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x=0}\left[\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\,\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right],$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x.$$

4) $y = \cos x,$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x=0}\left[\frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x=0}\left[\frac{-2\sin\frac{2x+\Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\right],$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x.$$

§ 5.

Differentialquotienten von Summen, Differenzen, Produkten, Quotienten von Funktionen.

1) Differentialquotient der Summe bzw. Differenz von Funktionen.

$y = f(x) \pm \varphi(x) \pm \psi(x) \pm \cdots,$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x=0}\left[\frac{f(x+\Delta x) \pm \varphi(x+\Delta x) \pm \psi(x+\Delta x) \pm \cdots - f(x) \mp \varphi(x) \mp \psi(x) \mp \cdots}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x=0}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \pm \frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x} \pm \frac{\psi(x+\Delta x)-\psi(x)}{\Delta x} \pm \cdots\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \pm \varphi'(x) \pm \psi'(x) \pm \cdots.$$

Der Differentialquotient der Summe von Funktionen ist gleich der Summe Differentialquotienten der Funktionen.

2) Differentialquotient des Produktes aus einer Funktion und einer Konstanten.

$y = af(x)$,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x=0}\left[\frac{af(x+\Delta x)-af(x)}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x=0} a\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right],$$

$$\frac{dy}{dx} = af'(x).$$

3) Differentialquotient des Produktes zweier Funktionen.

$$y = f(x)\cdot\varphi(x),$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x=0}\left[\frac{f(x+\Delta x)\cdot\varphi(x+\Delta x)-f(x)\cdot\varphi(x)}{\Delta x}\right].$$

Die rechte Seite bleibt ungeändert, wenn im Zähler

$-f(x)\cdot\varphi(x+\Delta x)+f(x)\varphi(x+\Delta x)$ hinzugefügt wird.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x=0}\left[\frac{f(x+\Delta x)\cdot\varphi(x+\Delta x)-f(x)\cdot\varphi(x+\Delta x)+f(x)\varphi(x+\Delta x)-f(x)\cdot\varphi(x)}{\Delta x}\right].$$

$$= \lim_{\Delta x=0}\left[\varphi(x+\Delta x)\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} + f(x)\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}\right],$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)\cdot\varphi(x) + \varphi'(x)\cdot f(x).$$

4) Differentialquotient des Quotienten zweier Funktionen.

$$y = \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x=0}\left[\frac{\dfrac{f(x+\Delta x)}{\varphi(x+\Delta x)} - \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x=0}\left[\frac{f(x+\Delta x)\cdot\varphi(x)-f(x)\cdot\varphi(x+\Delta x)}{\varphi(x+\Delta x)\cdot\varphi(x)\cdot\Delta x}\right]$$

$$\lim_{\Delta x=0}\left[\frac{f(x+\Delta x)\cdot\varphi(x)-f(x)\cdot\varphi(x)+f(x)\cdot\varphi(x)-f(x)\cdot\varphi(x+\Delta x)}{\Delta x\cdot\varphi(x+\Delta x)\cdot\varphi(x)}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x=0}\left\{\frac{1}{\varphi(x+\Delta x)\varphi(x)}\cdot\left[\varphi(x)\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} - f(x)\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}\right]\right\},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)\cdot\varphi(x)-\varphi'(x)\cdot f(x)}{[\varphi(x)]^2}.$$

Beispiel. $y = \operatorname{tang} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{d\sin x}{dx}\cdot\cos x - \dfrac{d\cos x}{dx}\sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x\cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x},$$

$$\frac{d\operatorname{tang} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$y = \operatorname{cotg} x$. In derselben Weise erhält man

$$\frac{d\operatorname{cotg} x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

§ 6.

Differentialquotient zusammengesetzter Funktionen.

1) Die Basis einer Potenz mit konstanten Exponenten ist eine Funktion v x; z. B.

$$y = (x^2+3)^n.$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x=0}\left[\frac{\{(x+\Delta x)^2+3\}^n - (x^2+3)^n}{\Delta x}\right].$$

Es sei $x^2+3 = z$ und $(x+\Delta x)^2+3 = z+\Delta z$, mithin

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x=0}\left[\frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta x}\right]\cdot$$ Die rechte Seite wird mit Δz erweitert.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x=0}\left[\frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta x}\right],$$

$$\frac{dy}{dx} = nz^{n-1}\cdot\frac{dz}{dx} \qquad (\S\ 3)$$

$$= n(x^2+3)^{n-1}\cdot\frac{d(x^2+3)}{dx}$$

$$= n(x^2+3)^{n-1}\cdot 2x.$$

Der hier angegebene Weg führt zur Bestimmung des Differentialquotien der Funktion $y = [f(x)]^n$.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x=0}\left[\frac{[f(x+\Delta x)]^n - [f(x)]^n}{\Delta x}\right],$$

$f(x) = z$, $f(x+\Delta x) = z+\Delta z$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x=0}\left[\frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta x}\right]\cdot$$

$$= \lim_{\Delta x=0}\left[\frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta x}\right]$$

$$= nz^{n-1}\frac{dz}{dx} = n[f(x)]^{n-1}\cdot\frac{df(x)}{dx}$$

$$= n[f(x)]^{n-1}\cdot f'(x).$$

2) Der Bogen einer Kreisfunktion ist eine Funktion von x; z. B.

$$y = \sin(x^2 + 3),$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x=0}\left[\frac{\sin[(x+\Delta x)^2+3] - \sin(x^2+3)}{\Delta x}\right].$$

Es sei $x^2 + 3 = z$; $(x+\Delta x)^2 + 3 = z + \Delta z$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x=0}\left[\frac{2\cos\frac{2z+\Delta z}{2}\sin\frac{\Delta z}{2}}{\Delta x}\right].$$

Nach § 3 ist der Grenzwert des Quotienten aus dem sinus und seinem gen gleich 1, folglich muß die rechte Seite mit $\frac{\Delta z}{2}$ erweitert werden.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x=0}\left[\frac{2\cos\frac{2z+\Delta z}{2}\sin\frac{\Delta z}{2}}{\frac{\Delta z}{2}}\cdot\frac{\Delta z}{2\Delta x}\right] = \lim_{\Delta x=0}\left[\frac{\cos\frac{2z+\Delta z}{2}\sin\frac{\Delta z}{2}}{\frac{\Delta z}{2}}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta x}\right],$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos z \cdot \frac{dz}{dx} = \cos(x^2+3)\frac{d(x^2+3)}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x^2+3)\cdot 2x.$$

Es sei $y = \sin[f(x)]$,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x=0}\left[\frac{\sin[f(x+\Delta x)] - \sin f(x)}{\Delta x}\right].$$

Es sei $f(x) = z$; $f(x+\Delta x) = z + \Delta z$

$$= \lim_{\Delta x=0}\left[\frac{\sin(z+\Delta z) - \sin z}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x=0}\left[\frac{\sin(z+\Delta z) - \sin z}{\Delta z}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta x}\right]$$

$$= \cos z \cdot \frac{dz}{dx} = \cos[f(x)[\cdot\frac{df(x)}{dx}$$

$$= \cos[f(x)]\cdot f'(x).$$

3) Bestimmung des Differentialquotienten der Funktion

$$y = f[\varphi(x)],$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x=0}\left\{\frac{f[\varphi(x+\Delta x)] - f[\varphi(x)]}{\Delta x}\right\};\quad \varphi(x) = z;\quad \varphi(x+\Delta x) = z + \Delta z.$$

$$= \lim_{\Delta x=0}\left\{\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta x}\right\}$$

$$= f'(z)\cdot\frac{dz}{dx}$$

$$= f'[\varphi(x)]\cdot\frac{d\varphi(x)}{dx},$$

$$\frac{dy}{dx} = f'[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x).$$

§ 7.

Differentialquotient unentwickelter Funktionen.

Nach dem im vorigen Paragraphen angegebenen Verfahren lassen sich Differentialquotienten unentwickelter Funktionen bestimmen.

Beispiel 1. $f(x, y) = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$

Man bilde die Ableitung sämtlicher Summanden:

$$\frac{d(b^2x^2)}{dx} + \frac{d(a^2y^2)}{dx} - \frac{d(a^2b^2)}{dx} = 0,$$

$$\frac{d(b^2x^2)}{dx} = 2b^2x; \quad \frac{d(a^2y^2)}{dx} = \frac{d(a^2y^2)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 2a^2y \cdot \frac{dy}{dx}; \quad \text{mithin}$$

$$2b^2x + 2a^2y\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

Beispiel 2. $f(x, y) = a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 + a_3x + a_4y + a_5 = 0.$

$$\frac{d(a_0x^2)}{dx} + \frac{d(a_1xy)}{dx} + \frac{d(a_2y^3)}{dx} + \frac{d(a_3x)}{dx} + \frac{d(a_4y)}{dx} + \frac{da_5}{dx} = 0,$$

$$\frac{d(a_0x^2)}{dx} = 2a_0x; \quad \frac{d(a_1xy)}{dx} = a_1\left(\frac{dx}{dx} \cdot y + \frac{dy}{dx} \cdot x\right) = a_1y + a_1x\frac{dy}{dx};$$

$$\frac{da_2y^2}{dx} = 2a_2y\frac{dy}{dx}; \quad \frac{d(a_3x)}{dx} = a_3; \quad \frac{d(a_4y)}{dx} = a_4\frac{dy}{dx}; \quad \frac{da_5}{dx} = 0; \quad \text{mithin:}$$

$$2a_0x + a_1y + a_1x\frac{dy}{dx} + 2a_2y\frac{dy}{dx} + a_3 + a_4\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2a_0x + a_1y + a_3}{a_1x + 2a_2y + a_4}.$$

Beispiel 3. $y\sin x + x\cos y = 0.$

$$\frac{d(y\sin x)}{dx} + \frac{d(x\cos y)}{dx} = 0,$$

$$\frac{d(y\sin x)}{dx} = \frac{dy}{dx}\sin x + y\cos x; \quad \frac{d(x\cos y)}{dx} = \cos y - x\sin y\frac{dy}{dx}; \quad \text{mithin:}$$

$$\frac{dy}{dx}\sin x + y\cos x + \cos y - x\sin y\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\cos x + \cos y}{x\sin y - \sin x}.$$

Entwickelung der Funktionen in Reihen*).

§ 8.

Die binomische Reihe.

Die Potenz $(1+x)^n$, in welcher n eine beliebige Zahl ist, soll in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickelt werden.

Es sei

$$(1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_kx^k + \cdots; \quad x = 0 \text{ gibt } a_0 = 1.$$

Ich bilde beiderseits die Ableitung nach x und erhalte

$$n(1+x)^{n-1} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + k \cdot a_kx^{k-1} + \cdots; \quad x = 0 \text{ gibt } a_1 = n.$$

Die 2te Ableitung liefert

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = 2a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3x + \cdots + (k-1) \cdot ka_kx^{k-2} + \cdots;$$

$$x = 0 \text{ gibt } a_2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Die k^{te} Ableitung:

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1)) \cdot (1+x)^{n-k} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-1) \cdot ka_k + 2 \cdot 3 \cdots (k)(k+1)a_{k+1} \cdot x + \cdots;$$

$x = 0$ gibt $a_k = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}$. Die rechte Seite werde mit $\binom{n}{k}$ bezeichnet.

$$a_k = \binom{n}{k}.$$

Es ist somit

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \cdots + \binom{n}{k}x^k + \cdots.$$

Wenn n eine positive ganze Zahl ist, so hat die Reihe eine endliche Anzahl Glieder und schließt mit x^n (bin. Lehrsatz). Für jeden anderen Wert von n hat die Reihe unendlich viel Glieder.

Die Konvergenz wird bestimmt, indem man den Grenzwert untersucht, den der Quotient des $(k+1)^{\text{ten}}$ und des k^{ten} Gliedes für $k = \infty$ annimmt.

$$q = \lim_{k=\infty}\left[\frac{\binom{n}{k+1}x^{k+1}}{\binom{n}{k}x^k}\right] = \lim_{k=\infty}\left[\frac{n-k}{k+1} \cdot x\right] = \lim_{k=\infty}\left[\frac{\frac{n}{k}-1}{1+\frac{1}{k}}x\right] = -x.$$

Die binomische Reihe ist demnach konvergent für $x < 1$ (absolut genommen)**).

Für $x = \dfrac{b}{a}$ erhält man

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\left(\frac{b}{a}\right) + \binom{n}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \cdots + \binom{n}{k}\left(\frac{b}{a}\right)^k + \cdots$$

*) Der Beweis der Möglichkeit einer solchen Entwickelung ist übergangen. Die Methode der unbestimmten Koeffizienten und die einfachsten Sätze über Konvergenz und Divergenz der unendlichen Reihen sind als bekannt vorausgesetzt.

**) Die Feststellung der Konvergenz für $n = \pm 1$ ist übergangen, weil sie für Schüler im allgemeinen zu schwierig ist.

$$\frac{(a+b)^n}{a^n} = 1 + \binom{n}{1}\frac{b}{a} + \binom{n}{2}\frac{b^2}{a^2} + \cdots + \binom{n}{k}\frac{b^k}{a^k} + \cdots$$

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots.$$

Nach dem vorhergehenden folgt, daß diese Reihe konvergiert, wenn $b <$ (absolut genommen) ist.

§ 9.

Die Exponentialreihe.

Es ist $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ nach der binomischen Reihe zu entwickeln und der Grenzwert dieser Potenz für $n = \infty$ festzustellen.

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{x}{n} + \binom{n}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2 + \cdots + \binom{n}{k}\left(\frac{x}{n}\right)^k + \cdots$$

$$= 1 + \frac{x}{1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{x^2}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}\frac{x^k}{n^k} + \cdot$$

$$= 1 + \frac{x}{1} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1\cdot 2}x^2 + \cdots \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot x^k +}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}$$

Für $n = \infty$ erhält man

1) $$\lim_{n=\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right] = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots.$$

Da diese Reihe aus der binomischen Reihe entstanden ist, konvergiert unter derselben Bedingung wie die binomische, also $\frac{x}{n} < 1$ oder $x < n$. Da $n =$ ist, konvergiert die Reihe für jedes endliche x.

Direkter Nachweis: Der Grenzwert des Quotienten des $(k+1)^{\text{ten}}$ und des k Gliedes für $k = \infty$ ist.

$$q = \lim_{k=\infty}\left[\frac{\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{x^k}{k!}}\right] = \lim_{k=\infty}\left[\frac{x}{k+1}\right] = 0.$$

Die Reihe konvergiert für jedes x.

Für Werte von x, die größer als 1 sind, nähert sich $\frac{x^k}{k!}$ mit wachsendem einem Bruche von der Form $\frac{\infty}{\infty}$. Es könnte somit $\lim_{k=\infty}\left[\frac{x^k}{k!}\right]$ fraglich werden. W r eine positive ganze Zahl und (absolut genommen) größer als x ist, so ist

$$\frac{x^k}{k!} = \frac{x^r}{r!}\cdot\frac{x^{k-r}}{(r+1)(r+2)\cdots k}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} r+1 &> r,\\ r+2 &> r,\\ &\vdots\\ k &> r; \quad \text{folglich } (r+1)\cdot(r+2)\cdots k > r^{k-r} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{(r+1)(r+2)\cdots k} < \frac{1}{r^{k-r}}, \text{ mithin}$$

$$\frac{x^k}{k!} < \frac{x^r}{r!}\left(\frac{x}{r}\right)^{k-r};$$

$\frac{x}{r}$ ein echter Bruch ist, so wird $\left(\frac{x}{r}\right)^{k-r}$ mit wachsendem k immer kleiner, für $= \infty$ wird $\left(\frac{x}{r}\right)^{k-r} = 0$, demnach ist

$$\lim_{k=\infty}\left[\frac{x^k}{k!}\right] = 0.$$

Für $x = 1$ geht Reihe 1) über in:

$$\lim_{n=\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots.$$

Die Summe dieser Reihe wird mit e bezeichnet.

$$\lim_{n=\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots.$$

Ferner $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{\left(\frac{n}{x}\right)}\right)^{\frac{n}{x}\cdot x} = \left[\left(1+\frac{1}{\left(\frac{n}{x}\right)}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x$, folglich

$$\lim_{n=\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right] = e^x, \quad \text{demnach}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots.$$

Diese Reihe heißt die natürliche Exponentialreihe.

Es sei $S_k = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!}$, $k > x$.

α) x positiv:

$$e^x = S_k + \frac{x^{k+1}}{(k+2)!} + \frac{x^{k+2}}{(k+2)!} + \cdots$$

$$S_k + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\left(1 + \frac{x}{k+2} + \frac{x^2}{(k+2)(k+3)} + \cdots\right).$$

Es ist $k+2 > k+1$, mithin $\frac{1}{k+2} < \frac{1}{k+1}$,

$k+3 > k+1$, „ $\frac{1}{(k+2)(k+3)} < \frac{1}{(k+1)^2}$ usw., mithin

$e^x < S_k + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\left(1 + \frac{x}{k+1} + \left(\frac{x}{k+1}\right)^2 + \cdots\right)$. Da $\frac{x}{k+1} < 1$ ist, folgt

$$e^x < S_k + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{k+1}},$$

$$< S_k + \frac{x^{k+1}}{k!} \cdot \frac{1}{k+1-x}; \text{ demnach}$$

$$S_k < e^x < S_k + \frac{x^{k+1}}{k!(k+1-x)}.$$

Nimmt man die ersten $(k+1)$ Glieder, so ist der Fehler, den man dur Fortlassen der übrigen Glieder begeht, kleiner als $\frac{x^{k+1}}{k!(k+1-x)}$.

Für $x = 1$ erhält man

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} < e < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \frac{1}{k! \cdot k}.$$ $k = 11$ gibt

$$2{,}718\,28\,18\,28\,26 < e < 2{,}718\,28\,18\,28\,44.$$

β) x negativ.

a) k eine ungerade Zahl:

$$e^x = S_k + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} - \frac{x^{k+2}}{k+2} + - \cdots$$

$$e^x = S_k + \left(\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} - \frac{x^{k+2}}{(k+2)!}\right) + \left(\frac{x^{k+3}}{(k+3)!} - \frac{x^{k+4}}{(k+4)!}\right) + \cdots$$

$$\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} > \frac{x^{k+2}}{(k+2)!} > \frac{x^{k+3}}{(k+3)!} > \cdots, \text{ mithin}$$

$$e^x > S_k.$$

Ferner ist

$$e^x = S_{k+1} - \frac{x^{k+2}}{(k+2)!} + \frac{x^{k+3}}{(k+3)!} - \cdots,$$

$$= S_{k+1} - \left(\frac{x^{k+2}}{(k+2)!} - \frac{x^{k+3}}{(k+3)!}\right) - \left(\frac{x^{k+4}}{(k+4)!} - \frac{x^{k+5}}{(k+5)!}\right) - \cdots,$$

mithin $e^x < S_{k+1}$ und

$$S_k < e^x < S_{k+1}.$$

b) k eine gerade Zahl:

In gleicher Weise erhält man

$$S_k > e^x > S_{k+1}.$$

Ist in der Exponentialfunktion der Exponent eine negative Zahl, so liegt für $x < k$ zwischen der Summe der ersten $(k+1)$ und der ersten $(k+2)$ Glied

Nimmt man e als Basis eines Logarithmensystems (die Log. für diese Ba mögen mit l bezeichnet werden), so läßt sich jede beliebige Potenz mit konstant Basis und veränderlichem Exponenten in eine Reihe entwickeln.

Es ist $a^x = (e^{la})^x = e^{xla} = 1 + \frac{xla}{1!} + \frac{(xla)^2}{2!} + \frac{(xla)^3}{3!} + \cdots + \frac{(xla)^k}{k!} + \cdots$ (a gemeine Exponentialreihe).

Für $x = 1$ erhält man $a = 1 + \frac{la}{1!} + \frac{(la)^2}{2!} + \cdots + \frac{(la)^k}{k!} + \cdots$. (Berechnung des merus aus seinem natürlichen Logarithmus.)

Differentialquotent der Exponentialfunktion:

1) $$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots,$$

$$\frac{de^x}{dx} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{x^k}{k!} + \cdots$$

$$= e^x.$$

Die Exponentialfunktion ist also diejenige Funktion, deren Ableitungen ihr ıtlich gleich sind.

2) $$a^x = 1 + \frac{xla}{1!} + \frac{(xla)^2}{2!} + \cdots + \frac{(xla)^k}{k!} + \cdots,$$

$$\frac{da^x}{dx} = la + \frac{x(la)^2}{1!} + \frac{x^2(la)^3}{2!} + \cdots + \frac{x^{k-1}(la)^k}{(k-1)!} + \frac{x^k(la)^{k+1}}{k!} + \cdots,$$

$$= la\left(1 + \frac{(xla)}{1!} + \frac{(xla)^2}{2!} + \cdots + \frac{(xla)^k}{k!} + \cdots\right)$$

$$= a^x \cdot la.$$

§ 10.

Die Logarithmische Reihe.

1. Für die Basis *e*.

Differentialquotient von lx.

$y = lx$ oder $x = e^y$, mithin

$$1 = e^y \frac{dy}{dx} \qquad (\S\ 9 \text{ und } 6).$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x},$$

$$\frac{d(lx)}{dx} = \frac{1}{x}.$$

lx kann in keine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickelt wer-ı, da das absolute Glied $= l0 = -\infty$ ist, dagegen $l(1+x)$.

Es sei $l(1+x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k + \cdots$. $x = 0$ gibt $a_0 = l1 = 0$.

Nach der ersten Ableitung erhält man:

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = a_1 + 2a_2x + \cdots + ka_kx^{k-1} + \cdots,$$

ch der k^{ten}:

$(-1)(-2)(-3)\cdots(-(k-1))(1+x)^{-k} = k!\,a_k + (k+1)\cdot k \cdots 3 \cdot 2 \cdot a_{k+1}x + \cdots,$

$= 0$ gibt $(-1)^{k-1} \cdot (k-1)! = k!\,a_k,$

$$a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k}, \quad \text{folglich}$$

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \cdots \pm \frac{x^k}{k} + \cdots .$$

Zweite Herleitung. Nach der ersten Differentiation erhält man

$$(1+x)^{-1} = a_1 + 2a_2x + \cdots + ka_kx^{k-1} + \cdots .$$

Die linke Seite wird nach der binomischen Reihe entwickelt.

$$1 + \binom{-1}{1}x + \binom{-1}{2}x^2 + \cdots \binom{-1}{k-1}x^{k-1} + \cdots = a_1 + 2a_2x + \cdots + ka_kx^{k-1}$$

folglich

$$k \cdot a_k = \binom{-1}{k-1}$$

$$= \frac{(-1)(-2)\cdots(-1-(k-2))}{(k-1)!}$$

$$= (-1)^{k-1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdots (k-1)}{k!} = (-1)^{k-1}$$

$$a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Der Grenzwert des Quotienten des $(k+1)^{\text{ten}}$ und des k^{ten} Gliedes für $k = \infty$

$$q = \lim_{k=\infty}\left[-\frac{x \cdot k}{k+1}\right] = \lim_{k=\infty}\left[\frac{x}{\frac{1}{k}+1}\right] = -x.$$

Die Log. Reihe ist somit konvergent für $x < 1$.

Auch für $x = 1$ ist die Reihe konvergent. Es ist

$$l2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + - \cdots .$$

Es sei $S_{2k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots - \frac{1}{2k}$,

$$l2 = S_{2k} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+1} + - \cdots$$

$$= S_{2k} + \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}\right) + \left(\frac{1}{2k+3} - \frac{1}{2k+4}\right) + \cdots ,$$

mithin $l2 > S_{2k}$.

$$S_{2k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots + \frac{1}{2k+1},$$

$$l2 = S_{2k+1} - \frac{1}{2k+2} + \frac{1}{2k+3} - + \cdots$$

$$= S_{2k+1} - \left(\frac{1}{2k+2} - \frac{1}{2k+3}\right) - \left(\frac{1}{2k+4} - \frac{1}{2k+5}\right) - \cdots ,$$

mithin $l2 < S_{2k+1}$; folglich

$$S_{2k} < l2 < S_{2k+1},$$

d. h. die Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots$ ist konvergent.

(Zur Berechnung von $l2$ eignet sich diese Reihe nicht, da sie sehr schwa
konvergiert.)

Für $x = -1$ wird dagegen die Reihe divergent.

$$l0 = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \cdots$$

$$= -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots\right).$$

Die in Klammern

ende Reihe heißt die harmonische.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{32}\right) \text{ usw.}$$

Nun ist

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8},$$

$$\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16} > \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16} \quad \text{usw.}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = \infty.$$

Die Reihe für $l(1 + x)$ ist somit konvergent, wenn $-1 < x \leqq +1$ ist.
Setzt man in diese Reihe $-x$ an Stelle von x, so folgt

$$l(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^k}{k} - \cdots \quad -1 \leqq x < 1.$$

Durch Subtraktion der Reihen für $l(1 + x)$ und $l(1 - x)$ erhält man

$$l(1 + x) - l(1 - x) = l\frac{1 + x}{1 - x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{x^{2k+1}}{2k + 1} + \cdots\right).$$

$$-1 < x < 1.$$

Es sei $S_{2k+1} = \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2k+1}}{2k + 1}\right)$, mithin

$$l\frac{1 + x}{1 - x} = 2\left[S_{2k+1} + \left(\frac{x^{2k+3}}{2k + 3} + \frac{x^{2k+5}}{2k + 5} + \cdots\right)\right].$$

Es ist

$$\frac{1}{2k + 5} < \frac{1}{2k + 3},$$

$$\frac{1}{2k + 7} < \frac{1}{2k + 3} \text{ usw., mithin}$$

$$l\frac{1 + x}{1 - x} < 2\left[S_{2k+1} + \left(\frac{x^{2k+3}}{2k + 3} + \frac{x^{2k+5}}{2k + 3} + \frac{x^{2k+7}}{2k + 3} + \cdots\right)\right] \text{ und, da } x < 1 \text{ ist,}$$

$$l\frac{1 + x}{1 - x} < 2\left(S_{2k+1} + \frac{x^{2k+3}}{2k + 3} \cdot \frac{1}{1 - x^2}\right), \text{ also}$$

$$2S_{2k+1} < l\frac{1 + x}{1 - x} < 2\left(S_{2k+1} + \frac{x^{2k+3}}{(2k + 3)(1 - x^2)}\right).$$

Mit Hilfe der Reihe für $l\frac{1+x}{1-x}$ können die Logarithmen sämtlicher positiv Zahlen berechnet werden. Berechnung von ln:

Es ist $n=\frac{1+x}{1-x}$; $x=\frac{n-1}{n+1}$; folglich, da x stets kleiner als 1 ist,

$$ln=2\left(\frac{n-1}{n+1}+\frac{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^3}{3}+\frac{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^5}{5}+\cdots\right).$$

Beispiel. $$l2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{3}+\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5}{5}+\cdots\right).$$

$k=4$ gibt

$$2\cdot 0{,}346\,573\,023\,7 < l2 < 2\cdot 0{,}346\,573\,601\,0,$$

$$l2=0{,}69\,315.$$

In gleicher Weise findet man $l3=1{,}098\,61$. Es sind jedoch mehr Glie zur Berechnung notwendig als bei $l2$. Je mehr sich x dem Werte 1 nähert, um langsamer konvergiert die Log.-Reihe. Kürzer gelangt man unter Benutzung von zu dem Werte für $l3$. Es ist $l3=l\left(2\cdot\frac{3}{2}\right)=l2+l\left(\frac{3}{2}\right)$.

$$\frac{3}{2}=\frac{1+x}{1-x},\quad x=\frac{1}{5},$$

$$l\frac{3}{2}=2\left(\frac{1}{5}+\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^3}{3}+\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^5}{5}+\cdots\right).$$

$k=3$ gibt

$$2\cdot 0{,}202\,732\,495\,3 < l\frac{3}{2} < 2\cdot 0{,}202\,732\,552\,5,$$

$$l\frac{3}{2}=0{,}405\,46 \quad \text{und}$$

$$l3=0{,}693\,15+0{,}405\,46=1{,}098\,61.$$

In ähnlicher Weise können die Logarithmen der anderen Zahlen berech werden.

2. Für eine beliebige Basis b.

Differentialquotient von ${}^b\log x$.

$y={}^b\log x$ oder $x=b^y$, mithin

$$1=b^y lb\cdot\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{b^y lb}=\frac{1}{x\,lb}.$$

In gleicher Weise wie in 1) findet man

$${}^b\log x\,\frac{1+x}{1-x}=\frac{2}{lb}\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+\cdots\right).$$

Die Logarithmen für eine beliebige Basis lassen sich, wie aus der obigen he hervorgeht, demnach nicht ohne Abhängigkeit von den Logarithmen für die is e herstellen. Die letzteren, die nach 1) ohne weiteres berechnet werden können, ßen deshalb „natürliche Logarithmen".

In der obigen Reihe ist nach 1)

$$2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \cdots\right) = l\frac{1+x}{1-x}, \text{ mithin}$$

$$^b\log\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{lb} \cdot l\frac{1+x}{1-x} \text{ oder}$$

$$^b\log a = \frac{1}{lb} \cdot la^*).$$

Um $^b\log a$ zu erhalten, ist der natürliche Logarithmus von a mit $\frac{1}{lb}$ zu multi- eren. $\frac{1}{lb}$ heißt der Modulus des Systems für Basis b. Für das Briggsche System der Modulus $\frac{1}{l10} = 0{,}434\,29$, z. B. $\log 2 = 0{,}434\,29 \cdot l2 = 0{,}301\,03$.

§ 11.

Die goniometrischen Reihen.

1. Die Sinusreihe.

Da $\sin 0 = 0$, kann man setzen

$$\sin x = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \cdots + a_{2k}x^{2k} + a_{2k+1}x^{2k+1} + \cdots.$$

Der erste Differentialquotient ist $\cos x$,
„ zweite „ „ „ $-\sin x$,
„ dritte „ „ „ $-\cos x$,
„ vierte „ „ „ $\sin x$,
„ $(2k)^{\text{te}}$ „ „ „ $(-1)^k \sin x$,
„ $(2k+1)^{\text{te}}$ „ „ „ $(-1)^k \cos x$.

Bildet man in der obigen Reihe auf jeder Seite den $2k^{\text{ten}}$ Differential- ienten, so folgt

$(-1)^k \sin x = 2k!\,a_{2k} + (2k+1)2k \cdots 3 \cdot 2a_{2k+1}x + \cdots$; $x = 0$ gibt $a_{2k} = 0$.

Der $(2k+1)$ Differentialquotient lautet

$(-1)^k \cos x = (2k+1)!\,a_{2k+1} + (2k+2)(2k+1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot a_{2k+2}x + \cdots$.

$x = 0$ gibt $a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$, mithin

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots.$$

*) Diese Gleichung läßt sich auch folgendermaßen ableiten. Es ist $b\,^b\log a = a$. Durch rithmieren nach dem natürlichen Systeme folgt $^b\log a \cdot lb = la$, demnach $^b\log a = \frac{1}{lb} \cdot la$.

Der Quotient des $(2k+1)^{\text{ten}}$ und des $(2k-1)^{\text{ten}}$ Gliedes für $k=\infty$ ist

$$q=\lim_{k=\infty}\left[-\frac{x^2}{2k(2k+1)}\right]=0,$$ d. h. die Sinusreihe konvergiert für jedes

Es sei $S_{2k+1}=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+-\cdots+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ und $(2k+1)>$

α) k eine gerade Zahl.

$$\sin x=S_{2k+1}-\frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!}+\frac{x^{2k+5}}{(2k+5)!}-+\cdots$$

$$\frac{x^{2k+5}}{(2k+5)!}=\frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!}\cdot\frac{x^2}{(2k+4)(2k+5)}.$$ Da $x<(2k+1)$

folgt $$\frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!}>\frac{x^{2k+5}}{(2k+5)!}>\frac{x^{2k+7}}{(2k+7)!}>\cdots,$$

$$\sin x=S_{2k+1}-\left(\frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!}-\frac{x^{2k+5}}{(2k+5)!}\right)-\left(\frac{x^{2k+7}}{(2k+7)!}-\frac{x^{2k+9}}{(2k+9)!}\right)-\cdots;$$

demnach $$\sin x>S_{2k+1}.$$

Ferner ist

$$\sin x=S_{2k+3}+\frac{x^{2k+5}}{(2k+5)!}-\frac{x^{2k+7}}{(2k+7)!}+-\cdots$$

$$=S_{2k+3}+\left(\frac{x^{2k+5}}{(2k+5)!}-\frac{x^{2k+7}}{(2k+7)!}\right)+\left(\frac{x^{2k+9}}{(2k+9)!}-\frac{x^{2k+11}}{(2k+11)!}\right)+\cdots;$$

demnach $$\sin x<S_{2k+1};$$ mithin

$$S_{2k+1}<\sin x<S_{2k+3}.$$

β) k eine ungerade Zahl.

In gleicher Weise erhält man

$$S_{2k+1}>\sin x>S_{2k+3}.$$

Folglich: Ist $x<2k+1$, so liegt $\sin x$ zwischen der Summe der ersten $(k+$ und der Summe der ersten $(k+2)$ Glieder.

2. Die Kosinusreihe.

Da $\cos 0=1$, kann man setzen

$$\cos x=1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots+a_{2k}x^{2k}+a_{2k+1}x^{2k+1}+\cdots.$$

Der $(2k)^{\text{te}}$ Differentialquotient von $\cos x$ ist $(-1)^k\cos x$, folglich

$$(-1)^k\cos x=(2k)!\,a_{2k}+(2k+2)(2k+1)\cdots4\cdot3a_{2k+2}x^2+\cdots;$$

$$x=0 \text{ gibt } a_{2k}=\frac{(-1)^k}{(2k)!}.$$

Der $(2k+1)^{\text{te}}$ Differentialquotient ist $(-1)^k\sin x$, mithin

$$(-1)^k\sin x=(2k+1)!\,a_{2k+1}+(2k+2)(2k+1)\cdots3\cdot2a_{2k+2}x+\cdots;$$

$$x=0 \text{ gibt } a_{2k+1}=0.$$

Die Kosinusreihe lautet

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+-\cdots+\frac{(-1)^kx^{2k}}{(2k)!}+\cdots$$

Die Reihe konvergiert für jedes x. In entsprechender Weise wie bei der usreihe findet man, daß, falls $x < 2k$ ist, $\cos x$ zwischen der Summe der ersten - 1) und der ersten $(k+2)$ Glieder liegt.

3. Die Tangens- und die Kotangensreihe.

Diese Reihen lassen sich durch Division der Reihen für sinus und cosinus stellen. Man erhält

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots,$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \cdots.$$

Das Gesetz, nach welchem die Koeffizienten gebildet werden, ist bei dieser eitung nicht ersichtlich, daher sind die Konvergenzgrenzen aus denselben nicht bestimmen. Die Aufstellung des allgemeinen Gliedes dürfte für Schüler zu weitrend sein; daher ist von der Bildung desselben abgesehen. Die tg-Reihe kongiert für $x < \frac{\pi}{2}$, die cotg-Reihe für $x < \pi$ (absolut genommen).

§ 12.

Die Arcus-Reihen.

Diese Funktionen lassen sich als inverse aus den goniometrischen dadurch eiten, daß bei einer der letzteren der Funktionswert zuerst gegeben ist, der gen erscheint alsdann als abhängig Veränderliche.

1. Die arctg-Reihe.

Bestimmung des Differentialquotienten von $y = \operatorname{arctg} x$:

$$y = \operatorname{arctg} x \quad \text{oder} \quad x = \operatorname{tg} y.$$

Nach § 3 ist $1 = \frac{1}{\cos^2 y}\frac{dy}{dx}$; $\frac{dy}{dx} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}$

$$\frac{d(\operatorname{arctg} x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Da $\operatorname{arctg} 0 = 0$, kann man setzen

$$\operatorname{arctg} x = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots + a_{2k+1} x^{2k+1} + \cdots.$$

Durch Differentiieren erhält man

$$\frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \cdots + 2ka_{2k} x^{2k-1} + (2k+1)a_{2k+1} x^{2k} + \cdots.$$

Die linke Seite wird nach der binomischen Reihe entwickelt

$$1 + \binom{-1}{1} x^2 + \binom{-1}{2} (x^2)^2 + \cdots + \binom{-1}{k} (x^2)^k + \cdots$$

$$= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \cdots + 2ka_{2k} x^{2k-1} + (2k+1)a_{2k+1} x^{2k} + \cdots,$$

hin

$$2ka_{2k} = 0,$$

$$(2k+1)a_{2k+1} = \binom{-1}{k} = (-1)^k;$$

$a_{2k} = 0$ und $a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{a_{2k+1}}$. Die Reihe lautet somit

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \cdots + \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + \cdots .$$

Sie konvergiert für $x \leqq 1$ (absolut genommen).

Ähnlich wie bei der Sinusreihe läßt sich nachweisen, daß $\operatorname{arc\,tg} x$ zwisch der Summe der ersten k und der Summe der ersten $(k+1)$ Glieder liegt. Die Re liefert den kleinsten Bogen, dessen Tangente gleich x ist, also den Bogen im ers Quadranten.

Zu der Reihe für $\operatorname{arctg} x$, die für $x > 1$ konvergiert, gelangt man du folgende Betrachtung. Es ist $\operatorname{tg} AB = x$ und, falls Bogen $AC = \frac{\pi}{2}$ ist,

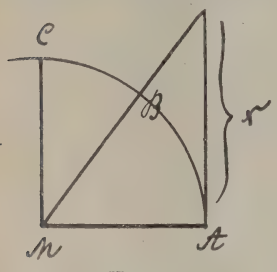


Fig. 6.

$\operatorname{cotg} BC = x$ oder $\operatorname{tg} BC = \frac{1}{x}$, folglich

$AB = \operatorname{arctg} x$ und

$BC = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$. Durch Addition folgt

$$AB + BC = \frac{\pi}{2} = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x},$$

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x},$$

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{x} - \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^5}{5} - \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^7}{7} + - \cdots \right),$$

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{7x^7} + - \cdots \right)^{*)}; \quad x \geqq 1$$

2. Die arccotg-Reihe.

Es ist $\operatorname{tg} AB = x$ und $\operatorname{cotg} AC = x$, mithin

$$AB + BC = \frac{\pi}{2} = \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,cotg} x,$$

$$\operatorname{arc\,cotg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x; \quad \text{demnach}$$

$$\operatorname{arc\,cotg} x = \frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + \cdots \right)^{*)}; \quad x \leqq 1,$$

und $$\operatorname{arc\,cotg} x = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{7x^7} + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)x^{2k+1}} + \cdots; \quad x \geqq 1.$$

Zweite (direkte) Ableitung wie die der arctg-Reihe. Es ist

$$\frac{d \operatorname{arc\,cotg} x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2} \quad \text{und} \quad \operatorname{arc\,cotg} 0 = \frac{\pi}{2}.$$

---

*) Für negative Werte von x liefert diese Reihe einen Bogen, der größer als $\frac{\pi}{2}$ ist.

3. Die arcsin-Reihe.

Bestimmung des Differentialquotienten von $y = \arcsin x$:

$$y = \arcsin x \quad \text{oder} \quad x = \sin y,$$

$$1 = \cos y \cdot \frac{dy}{dx}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\frac{d(\arcsin x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Da $\arcsin 0 = 0$ ist, kann man setzen

$$\arcsin x = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_{2k} x^{2k} + a_{2k+1} x^{2k+1} + \cdots.$$

Durch Differentiation erhält man

$$(1 - x2)^{-\frac{1}{2}} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + 2k a_{2k} x^{2k-1} + (2k+1) a_{2k+1} x^{2k} + \cdots.$$

Durch Entwickelung der linken Seite nach der binomischen Reihe folgt

$$-\binom{-\frac{1}{2}}{1} x^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{2} (x^2)^2 + \cdots + (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} (x^2)^k + \cdots = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots$$

$$2k a_{2k} x^{2k-1} + (2k+1) a_{2k+1} x^{2k} + \cdots,$$

hin

$$2k \cdot a_{2k} = 0,$$

$$(2k+1) a_{2k+1} = \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k-1)}{2^k \cdot k!}$$

$\cdot k! = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2^k \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k)$

$$a_{2k+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k} \cdot \frac{1}{2k+1}.$$

Die Reihe lautet somit

$$\text{rc}\sin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k} \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \cdots; \; x \leqq 1.$$

Es sei $S_{2k-1} = \frac{x}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k-2)} \cdot \frac{x^{2k-1}}{2k-1}$,

an ist

$$\text{arc}\sin x = S_{2k-1} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k} \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k+2)} \cdot \frac{x^{2k+3}}{2k+3} + \cdots.$$

Es ist $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k} \cdot \frac{1}{2k+1} > \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k+2)} \cdot \frac{1}{2k+3} > \cdots,$

$$\arcsin x < S_{2k-1} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k} \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1} (1 + x^2 + x^4 + \cdots),$$

$$< S_{2k-1} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k} \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \cdot \frac{1}{1 - x^2};$$

hin

$$S_{2k-1} < \arcsin x < S_{2k-1} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k} \cdot \frac{x_2^{k+1}}{(2k+1)(1 - x^2)}.$$

4. Die arccos-Reihe.

Mit Hilfe der Gleichung $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$ erhält man die Rei für $\arccos x$.

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x,$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{x}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2k}\cdot\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \cdots\right).$$

Zweite (direkte) Ableitung wie die der arcsin-Reihe. Es ist

$$\frac{d(\arccos x)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{und} \quad \arccos 0 = \frac{\pi}{2}.$$

5. Reihen für π.

Die arc-Reihen lassen sich zur Berechnung von π benutzen.

Es ist $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, also $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1$; mithin

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots. \quad \text{(Leibnizsche Reihe.)}$$

Zur Berechnung von π eignet sich diese Reihe wegen der zu schwach Konvergenz nicht. Eine bessere Reihe erhält man durch $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

$$\frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{1}{3}}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + - \cdots\right). \quad \text{(Lagnysche Reihe.)}$$

Oder man setzt $\frac{\pi}{4}$ aus mehreren stark konvergierenden Reihen zusamm

Wenn $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$, so ist $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = 1$ und $\operatorname{tg}\beta = \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha}$;

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ gibt $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$. Mithin

$$\frac{\pi}{4} = \begin{cases} \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{7\cdot 2^7} + - \cdots \\ + \frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} - \frac{1}{7\cdot 3^7} + \cdots. \end{cases} \quad \text{(Eulersche Reih}$$

Andere Reihe für $\frac{\pi}{4}$ vgl. Wrobel, Arithmetik u. Algebra II und Baltzer, Elem

Aus $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ folgt

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5\cdot 2^5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7\cdot 2^7} + \cdots.$$

§ 13*).

Entwickelung einer beliebigen Funktion in eine Reihe.

Es ist $f(a+x)$ in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe zu entwickeln. Es sei $f(a+x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_kx^k + \cdots$.

Nach der k^{ten} Ableitung erhält man

$f^k(a+x) = k!a_k + (k+1)k \cdots 3 \cdot 2a_{k+1}x + \cdots$; $x = 0$ gibt $f^k(a) = k!a_k$,

$$a_k = \frac{f^k(a)}{k!}.$$

Setzt man $k = 0$, so erhält a_0 die Form $\frac{f^0(a)}{0!}$, $f^0(a) = f(a)$. Für jede ganze Zahl n, die größer als 1 ist, gilt das Gesetz $\frac{n!}{n} = (n-1)!$. Läßt man dieses Gesetz auch für $n = 1$ gelten, so erhält man $\frac{1!}{1} = (1-1)! = 0!$. Nun ist $\frac{1!}{1} = 1$, also muß daher 0! der Wert 1 verstanden werden, folglich $a_0 = f(a)$. Man erhält

1) $$f(a+x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}x + \frac{f''(a)}{2!} + \cdots + \frac{f^k(a)}{k!}x^k + \cdots.$$

(Nach dieser Reihe sind entwickelt $(1+x)^n$, $l(1 \pm x)$.

Setzt man x an Stelle von $a+x$, so folgt

2) $$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^n + \cdots + \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots.$$

Setzt man in 1) oder 2) $a = 0$, so folgt

3) $$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^k(0)}{k!}x^k + \cdots.$$

(Nach dieser Reihe sind $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\arcsin x$ entwickelt.)

Die unendlichen Reihen können aber nur innerhalb der Konvergenzgrenzen an Stelle der Funktionen gesetzt werden.

§ 14.

e^{ix}.

Setzt man in die Reihe für e^x an Stelle von x das imaginäre Argument ix, so erhält man

$$= 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^3x^3}{3!} + \cdots = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + i\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots\right)$$

$$= \cos x + i\sin x.$$

Nun ist, wenn k eine beliebige ganze Zahl ist,

$$\cos x + i\sin x = \cos(x + 2k\pi) + i\sin(x + 2k\pi), \quad \text{folglich}$$

$$e^{ix} = e^{i(x+2k\pi)}, \text{ d. h. die Funktion } e^{ix} \text{ ist im Vergleich zu } e^x,$$

welche mit x gleichzeitig wächst oder fällt, periodisch mit der Periode $2k\pi$.

*) Dieser Paragraph kann vor § 10 gestellt werden; die hier entwickelten Reihen können auch zur Herleitung der in den §§ 10 bis 12 aufgestellten Reihen verwendet werden.

Es ist $e^{ix} = \cos x + i \sin x$,

$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$, mithin

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}; \quad \sin x = -\frac{i(e^{ix} - e^{-ix})}{2},$$

$$\operatorname{tg} x = -i \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}.$$ Aus der letzten Gleichung folgt

$$e^{2ix} = \frac{1 + i\operatorname{tg} x}{1 - i\operatorname{tg} x} \quad \text{und} \quad 2ix = l\frac{1 + i\operatorname{tg} x}{1 - i\operatorname{tg} x}.$$ (Entwickelt man d

rechte Seite dieser Gleichung nach der log-Reihe, so folgt

$$2ix = 2i\left(\operatorname{tg} x - \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} - + \cdots\right),$$

oder, wenn $\operatorname{tg} x = z$, d. h. $x = \operatorname{arctg} z$ gesetzt wird,

$$\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - + \cdots\Big).$$

Es ist $e^{i(0+2k\pi)} = \cos(0 + 2k\pi) + i \sin(0 + 2k\pi)$,

$e^{2k\pi i} = 1$,

$e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} = i$,

$e^{i(\pi + 2k\pi)} = -1$,

$e^{i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} = -i$.

Aus $i = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}$ folgt $i^i = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}$ (somit vieldeutig).

Für jede positive Zahl a gibt es eine reelle Zahl α, daß

$$e^{\alpha} = a \quad \text{ist.}$$

Aus $e^{\alpha} = a$ und $e^{2k\pi i} = 1$ folgt durch Multiplikation $e^{\alpha + 2k\pi i} = a$, mithin la $\alpha + 2k\pi i$; la ist somit vieldeutig, $k = 0$ gibt den reellen Wert $la = \alpha$. In ähnlich Weise erhält man

$$l(-a) = \alpha + (2k + 1)\pi i,$$

$$l(ai) = \alpha + \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i,$$

$$l(-ai) = \alpha + \left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi i.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} a + bi &= r(\cos\varphi + i \sin\varphi) \\ &= e^{lr} \cdot e^{i\varphi} \quad (\text{mithin } l(a + bi) = lr + i\varphi) \\ &= e^{lr + i\varphi}; \quad \text{folglich} \\ (a + bi)^{c+di} &= e^{(lr + i\varphi)(c + di)} \\ &= e^{c \cdot lr - d\varphi + i(c\varphi + dlr)} \\ &= R(\cos(c \cdot \varphi + d \cdot lr) + i \sin(c\varphi + d \cdot lr)) \\ &= A + Bi. \end{aligned}$$

Jede Rechenoperation, der man eine komplexe Zahl unterwirft, führt imm wieder auf eine komplexe Zahl, es gibt somit keine allgemeinere Zahl als die komple

Es ist $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, mithin
$e^{inx} = (\cos x + i \sin x)^n$. Da $e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$ ist, folgt
$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$ (Moivrescher Satz).

§ 15.

Quotienten in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$.

Setzt man in die Funktionen

$y_1 = 6x - 15$ und
$y_2 = 2x - 5$ für die willkürlich Veränderliche x
selben Werte ein (z. B. 0; 1; 2; ...) und bildet den Quotienten der abhängig Ver-
derlichen, so erhält man stets $\frac{y_1}{y_2} = 3$. Für $x = 2\frac{1}{2}$ werden beide Funktionen gleich
der Quotient $\frac{y_1}{y_2}$ erscheint in der Form $\frac{0}{0}$. Gibt man x Werte, die sich der Zahl
immer mehr nähern, also 2,49; 2,499; 2,4999; ... oder 2,51; 2,501; usw., so erhält
n ebenfalls $\frac{y_1}{y_2} = 3$. Für $x = 2\frac{1}{2} + \delta$ erhält man

$\frac{y_1}{y_2} = \frac{6\delta}{2\delta} = 3$. Der Quotient gilt für jedes δ (ab-
ut), also auch für ein unendlich kleines δ, d. h. der Quotient $\frac{y_1}{y_2}$ ist für den Wert
für welchen er die Form $\frac{0}{0}$ erhält, gleich 3.

Sind allgemein y_1 und y_2 Funktionen ersten Grades von x, welche für den-
ben Wert von $x = a$ verschwinden, also

$y_1 = m_1(x - a)$,
$y_2 = m_2(x - a)$, so ist für jeden Wert von x, auch
$x = a$, der Quotient $\frac{y_1}{y_2} = \frac{m_1}{m_2}$.

Da m_1 und m_2 beliebig sind für verschiedene Paare von y_1, y_2, so folgt,
s der Quotient $\frac{0}{0}$ jeden Wert annehmen kann, zum Unterschied von jeder von 0
rschiedenen Zahl z, für welche der Quotient $\frac{z}{z}$ stets gleich 1 ist.

Es sei $y_1 = x + 2x^2 - 45$,
$y_2 = 19x - 2x^2 - 45$.

Der Quotient $\frac{y_1}{y_2}$ ist bei diesen Funktionen nicht konstant, sondern abhängig
n x. Den Werten 0; 1; 2; 3; 4; ... für x entsprechen die Werte 1; $\frac{3}{2}$; $\frac{7}{3}$; 4; 9 ...
$\frac{y_1}{y_2}$. $x = 4\frac{1}{2}$ läßt den Quotienten $\frac{y_1}{y_2}$ in der Form $\frac{0}{0}$ erscheinen. Für $x = 4\frac{1}{2} + \delta$
ält man $\frac{y_1}{y_2} = \frac{19 + 2\delta}{1 - 2\delta}$. Läßt man δ kleiner und kleiner werden, so nähert sich
Quotient immer mehr dem Wert 19. Wird δ unendlich klein, so ist $\frac{y_1}{y_2} = 19$.

Der bei den angegebenen Beispielen eingeschlagene Weg zur Bestimmu des Quotienten gilt für alle Funktionen. Es ergibt sich somit der Satz:

Nimmt der Quotient zweier Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ für ein bestimmtes die Form $\frac{0}{0}$ an, so erhält man die Größe dieses Quotienten durch den Grenzwer

$$\lim_{\delta=0}\left[\frac{f(x_1+\delta)}{\varphi(x_1+\delta)}\right].$$

Nach § 13 ist

$$\frac{f(x_1+\delta)}{\varphi(x_1+\delta)}=\frac{f(x_1)+\delta f'(x_1)+\frac{\delta^2}{1\cdot 2}f''(x_1)+\cdots}{\varphi(x_1)+\delta\varphi'(x_1)+\frac{\delta^2}{1\cdot 2}\varphi''(x_1)+\cdots}$$ oder, da $f(x_1)=\varphi(x_1)=0$

$$=\frac{f'(x_1)+\frac{\delta}{1\cdot 2}f''(x_1)+\cdots}{\varphi'(x_1)+\frac{\delta}{1\cdot 2}\varphi''(x_1)+\cdots};\quad \text{mithin}$$

$$\frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)}=\lim_{\delta=0}\left[\frac{f(x_1+\delta)}{\varphi(x_1+\delta)}\right]=\frac{f'(x_1)}{\varphi'(x_1)}.$$

Werden $f'(x_1)$ und $\varphi'(x_1)$ ferner $f''(x_1)$ und $\varphi''(x_1)$ usw. gleich Null und s $f^k(x_1)$ und $\varphi^k(x_1)$ die ersten, welche nicht zugleich verschwinden, so folgt

$$\frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)}=\frac{f^k(x_1)}{\varphi^k(x_1)}.$$

Anmerkung.

Bestimmung des Quotienten $\frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)}$ ohne Anwendung der Differentialrechnung.

I. $f(x)$ und $\varphi(x)$ sind ganze rationale Funktionen. Da beide für $x=x_1$ verschwinden lassen sie sich durch $x-x_1$ dividieren. Nach Ausführung der Division und Einsetzung von x_1 hält man den Wert des gesuchten Quotienten.

Beispiel: $\frac{2x^2+x-45}{-2x^2+19x-45}$ hat für $x=4\frac{1}{2}$ die Form $\frac{0}{0}$. Nach Division durch $2x-9$ f

$$\frac{2x^2+x-45}{-2x^2+19x-45}=\frac{x+5}{-x+5};\ \text{mithin}\ \left|\frac{2x^2+x-45}{-2x^2+19x-45}\right|_{x=4\frac{1}{2}}=\frac{5\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2})}=19.$$

II. $f(x)$ und $\varphi(x)$ oder eine von beiden sind gebrochene Funktionen. Durch geeignetes weitern läßt sich dieser Fall auf den vorigen zurückführen.

Als **Beispiel** gelte $\frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x^2-4}$. Der Bruch erhält für $x=2$ die Form $\frac{0}{0}$. Nach Er tern mit $\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2\sqrt[3]{(x+2)}+4$ folgt

$$\frac{3x+2-8}{(x^2-4)(\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2\sqrt[3]{3x+2}+4)}=\frac{3}{(x+2)(\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2\sqrt[3]{3x+2}+4)}.$$

Für $x=2$ erhält man $\left|\frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x^2-4}\right|_{x=2}=\frac{1}{16}$.

III. $f(x)$ und $\varphi(x)$ sind goniometrische, logarithmische usw. Funktionen. Dieselben we durch ihre unendlichen Reihen ersetzt, nach Fortheben des gemeinschaftlichen Faktors und setzen von x_1 erhält man den gesuchten Wert des Quotienten.

§ 16.

Anhang.

Geometrische Bedeutung des zweiten Differentialquotienten bei Kurven.

Die Gleichung der Kurve sei $y = f(x)$. In einem Punkte A $(x_1 | y_1)$ der Kurve de die Tangente gelegt, ihre Gleichung ist $y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$.

Die Abszisse eines beliebigen Punktes C der Tangente $x_1 + \Delta x$, es ist

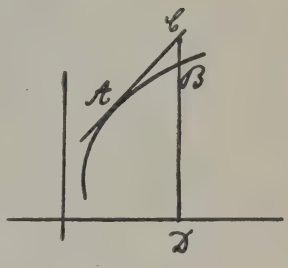


Fig. 7.

1) $CD - y_1 = f'(x_1)(x_1 + \Delta x - x_1)$

$$CD = f'(x_1) \cdot \Delta x + y_1 = f'(x_1) \cdot \Delta x + f(x_1).$$

Der Schnittpunkt von CD und der Kurve sei B, es ist

$$BD = f(x_1 + \Delta x) \quad \text{oder nach § 13}$$

$$2)\ BD = f(x_1) + \frac{f'(x_1)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x_1)}{2!}(\Delta x)^2 + \cdots.$$

Durch Subtraktion folgt aus 2) und 1)

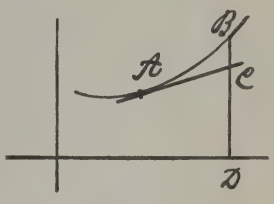


Fig. 8.

$$BC = \frac{f''(x_1)}{2!}(\Delta x)^2 + \frac{f'''(x_1)}{3!}(\Delta x)^3 + \cdots.$$

$$\frac{BC}{(\Delta x)^2} = \frac{f''(x_1)}{2!} + \frac{f'''(x_1)}{3!} \cdot \Delta x + \cdots.$$

Für Δx unendlich klein folgt

$$\left| \frac{BC}{(\Delta x)^2} \right|_{\Delta x = 0} = \frac{f''(x_1)}{2!}.$$

Ist $f''(x_1)$ positiv, so liegt in der Nähe des Punktes A die Kurve „oberhalb“ Tangente, die Kurve kehrt ihre konvexe Seite der x-Achse zu — konvexe ümmung (Fig. 8). Ist $f''(x_1)$ negativ, so liegt die Kurve „unterhalb“ der Tangente kehrt ihre konkave Seite der x-Achse zu — konkave Krümmung (Fig. 7).

Ist $f''(x_1) = 0$, so fällt im Punkte A die Kurve mit der Tangente zusammen ist für ein unendlich kleines Stück geradlinig. Wechselt in diesem Falle $f''(x)$ Vorzeichen, so schneidet die Tangente die Kurve. Ein solcher Punkt heißt ndepunkt, die Tangente in ihm Wendetangente der Kurve. Wechselt $f''(x)$ in dem kte x_1 sein Vorzeichen nicht, so liegt die Kurve in der Nähe des Punktes A auf selben Seite der Tangente, behält demnach ihre Krümmung bei.

Jahresbericht

über das

ymnasium zu Mühlhausen,

womit

zu den Prüfungen am 13. April 1848

ehrerbietigst und ergebenst einladet

der Director

Dr. Christian Wilhelm Haun,

Ritter des rothen Adlerordens vierter Klasse.

Angefügt ist eine Abhandlung:

orismen aus der Differential- und Integralrechnung mit Rücksicht auf die Lehre von den Kurven

von

Dr. Carl Albert August Dilling,

Subconrector.

Mühlhausen.

Druck von W. Rode.

Gymn. Mühlhausen
956. 12

Schulnachrichten

über das Gymnasium zu Mühlhausen

von Ostern 1847 bis 1848.

I. Chronik des Gymnasiums.

dem verflossenen Schuljahre erfreute sich das Gymnasium wieder einer gründlichen Kenntme der vorgesetzten höhern Behörde, indem der Provinzial-Schulrath Herr Dr. Schaub . Juni zu einer Revision hier eintraf, und in den nächsten Tagen nicht nur den en aller Classen, sondern auch der gewöhnlichen Sonnabends-Conferenz beiwohnte, da einige Schüler zu derselben bestellt waren, um so auch von dem Gange der Unterg und der Art der Behandlung der Sache, so wie der Belehrung, Ermahnung oder Beg genauere Kenntniß zu nehmen. Nach Beendigung der vorliegenden Gegenstände wurann von ihm mit dem Kollegio noch allgemeine die Doctrin und Disciplin betreffende genheiten besprochen. War die Anwesenheit des umsichtigen und wohlwollenden Vorn schon in dieser Beziehung für Lehrer und Schüler erfreuend und anregend gewesen; de die Freude später noch erhöht durch das von E. Königl. Provinzial-Schul-Kollegio dem 26. Juni 1847 ausgefertigte huldreiche Rescript über jene Revision. In Bezug auf elegentliche Anempfehlung der Erhöhung der Lehrerbesoldungen bleibt die hierin liegende mung für uns erfreuend, wenn auch nach der Lage der Umstände die nöthige Hülfe ch allein nicht in naher Aussicht zu denken sein dürfte.

Die **Schulfeierlichkeiten** in diesem Jahre waren die herkömmlichen, nämlich:

1) Das Stiftungsfest am 17. Mai 1847, dessen öffentlicher Rede-Actus folgender war:

mnus: Der Mächtige, den wir erheben ꝛc., comp. von Mozart.

hlingstrost, Ode von dem Primaner und Seminaristen Gustav Göhring von hier.

einische Rede: De exercitationum gymnasticarum dignitate atque utilitate, von t Primaner Rudolf Haun aus Merseburg.

utsche Rede: „Wie in den Grußformen sich der Charakter der Völker ausspricht," von n Primaner Rudolph Klauer von hier.

nzösische Rede: La forêt de Thuringe, von dem Primaner August Lorentz von hier.

:trag des Subconrector Recke: Ueber Erziehung und Unterricht der Jugend bei den n Römern.

rtheilung der von der Familie Lutteroth für Schüler des Gymnasiums gestifteten Legate.

hlußchor aus dem Oratorium: die Schöpfung von Haydn.

Zwischen diesen von den Primanern selbst gearbeiteten Vorträgen traten folgende mit Declamationen auf: Eduard Sorhagen, Secundaner: Des Odysseus Theilna den Kampfspielen, aus Homer's Odyssee, deutsch und griechisch. — Otto v. Rhein u Hasenbein, Tertianer: Französisches Gespräch. — Ernst Bockerodt und Theodor Rö Quartaner: Colloquium de conjugationum latinarum paradigmatis. — Wilhelm necke, Quintaner: Wie Alles lernet. — Karl Burghardt, aus Classe 1 der Bürg Bitte um Gottes Erndtesegen. — Gottfried Demme, aus Classe 2 der Bürgerschul Lied vom Samenkorn. — Johannes Fleischer, aus Classe 2 der Bürgerschule: „S Vögel unter dem Himmel." — Karl Haun, aus Classe 4 der Bürgerschule: Die Kn Theodor Schollmeyer, aus Classe 5 der Bürgerschule: Das Vöglein und der Kn Christian Bregazzi, aus Classe 6 der Bürgerschule: Das Böcklein.

2) Das Popperöder Schüler-Brunnenfest am 21. Juni 1847, bei welchem d Schul- und Volksfeste der Gymnasial-Director Dr. Haun mit Beziehung auf die h größer als anderwärts gewesene, aber mit Gottes Hülfe glücklich überstandene Noth Theuerung in der zu dem versammelten zahlreichen Zuhörerkreis gehaltenen Rede d Evangelium Matthäi Cap. 5, v. 6 zum Grunde legte, und daher „über die unv baren Quellen der Seligkeiten beider, der Reichen und der Armen, hungert und dürstet nach der Gerechtigkeit" sprach, insofern die Noth der Z die weisen und wohlthätigen Einrichtungen der Stadtbehörden und mehrerer freiwilliger eben so sehr gemildert, als von den Bedrängten in würdiger Weise getragen worden w

In dem hiesigen gemeinnützigen Unterhaltungsblatte von 1847 ist die Rede in abgedruckt enthalten.

3) Die Feier des Geburtstages Sr. Majestät des Königs am 15. Octobe deren öffentlicher Rede-Actus folgender war:

a) Hymnus: Preis dir, Gottheit! ꝛc., von Mozart.
b) Gebet für den König, deutsch und ins Hebräische übersetzt: Primaner Otto Fleck aus
c) Scene aus Voltaire's Tragödie „Mahomet": Dialogue entre Zopire, Schéri Mecque, et Omar, Lieutenant de Mahomet: Primaner Albert Erff aus Kö Karl Lutteroth von hier.
d) Fürsprache des Cicero bei Cäsar für den König Dejotarus aus Cicero orat. p Dejotaro Cap. XIV., deutsch und lateinisch: Primaner Adolph Becherer von hie
e) Dialog zwischen dem König Menelaus und dem Bogenschützen Teukros aus der „Ajax" von Sophokles, deutsch, und der letzte Wortwechsel auch griechisch: Prim helm Schreiber aus Thamsbrück und August Lorentz von hier.
f) Borussia, Preußischer Volksgesang von Spontini.

Zwischen diesen Vorträgen declamirten noch: Rudolph Gerlach, Secundaner: eleg. II. 2. auf des Königs Geburtstag angewendet, lateinisch und deutsch. — Augus Secundaner: Größe der Macht des Zeus, aus Homer's Ilias VIII. 1—29., deutsch chisch. — Karl Eyßel, Tertianer: Des Königs Goldschatz. — Heinrich v. R Herrmann Leineweber, Quartaner: Französisches Gespräch. — Theodor Fürer pold Neumann, Quintaner: Lateinisches Gespräch über die Schulfeier des Geburt Königs. — Friedrich Walter, aus Classe 1 der Bürgerschule: Die Leipziger Sc

ried Kahlert, aus Classe 2 der Bürgerschule: Die drei Gesellen. — Gottfried Wey- aus Classe 3 der Bürgerschule: Der kleine Hydriot. — Benjamin Rowolt, aus Classe Bürgerschule: Friedrich Barbarossa. — Theodor Becker, aus Classe 5 der Bürger- : Das Hütchen. — Georg Döring, aus Classe 6a der Bürgerschule: Das Büblein em Eis. — Louis Hefter, aus Classe 6b der Bürgerschule: Wunsch des Knäbchens.

4) Bei den Abiturienten-Entlassungsfeierlichkeiten am Schlusse der Schulprüfungen ſtern und Michaelis 1847 hielten sowohl die 3 zu Ostern und die 2 zu Michaelis abge- n, als der Erste der dableibenden Schüler Vorträge in griechischer, lateinischer, französischer eutscher Sprache in Prosa und Poesie, nach denen der Director noch über die besondern ltnisse der Scheidenden sprach und ihnen dann die Zeugnisse der Reife mit geeigneter Hin- ng auf die in denselben geäußerten Hoffnungen und Wünsche durch den Commissarius des nats, Herrn Bürgermeister Gier, aushändigen ließ, welcher ebenfalls noch belebende an die Empfänger der Zeugnisse sowohl, als an die Schüler überhaupt richtete.

5) Zu der zweimaligen kirchlichen Feier des heiligen Abendmahls wurden die Schüler Tage vorher in einer der kirchlichen Beichthandlung unmittelbar vorhergehenden religiösen feier durch einen Vortrag des Directors vorbereitet.

II. Lehrverfassung.

Wegen des dem Collaborator Bierwirth für das Sommerhalbjahr 1847 zu einer enreise nach Berlin bewilligten Urlaubs mußten seine Lectionen unter die übrigen Kollegen ilt werden, welches in der nachher bei den Lehrpensen angegebenen Weise geschah.

An die Stelle des zu Michael 1847 abgegangenen Zeichenlehrers, Herrn John, trat chen provisorisch der Lehrer an der zweiten Volks- und Armenschule, Herr Dreiheller, er jedoch durch das Winterhalbjahr hindurch nur 4 Stunden wöchentlich ertheilen konnte, jede Classe, da Prima und Secunda für diesen Gegenstand combinirt sind, wöchentlich ine Stunde Zeichenunterricht genoß und in den übrigen Stunden anderweit beschäftigt wurde.

In der Mitte Februar 1848 machte es der leidende Zustand des Conrector Dr. Mühl- nöthig, ihn von sieben Lectionen, die er in Secunda zu ertheilen hatte, auf unbestimmte u entbinden. Von diesen übernahm der Director die 2 der lateinischen Dichterlectüre, und ollaborator Bierwirth die 2 für griechische Grammatik und Stil, so wie die 3 für en Stil, Lectüre, Vortrag und Poetik.

A) Vollendete Lehrpensa.

Prima. Classen-Ordinarius: Director Dr. Haun.

1) Sprachen: a) Hebräisch: 2 Stunden Formenlehre und Syntax, nach Gesenius Ewald, schriftliche Uebungen im Uebersetzen ins Hebräische, nach Uhlemann's Anleitung, 2. 3. Analyse in lateinischer Sprache. Lectüre, statarisch: auserlesene Psalmen, cursorisch: n aus dem 2ten Buche der Könige, das Buch Ruth und die Klagelieder des Jeremias.

Ueberdieß monatlich eine extemporane Uebersetzungsübung ohne Präparation aus dem 1. S
Mosis: Conrector Dr. Mühlberg. — b) Griechisch: 2 Stunden statarisch Sopl
Oedip. Colon. et Antigona: Director Dr. Haun. — 1 Stunde Grammatik, nach
Extemporalien, Exercitien in Uebersetzungen aus Livius und in Argumenten Sophokleischer Tra
bestehend, Versübungen. 3 Stunden Lectüre, theils öffentlich statarisch und cursorisch, theil
trole der Privatlectüre: Thucydid. II, 47 — IV. Euripid. Tragoed. (12 S
Aeschyl. Pers.: Professor Dr. Ameis. — c) Lateinisch: 2 Stunden Cicero d
bus bonorum et malorum. Taciti Annal. I. — 2 St. Horat. Od. II. und Epistola ad
nes. — 2 Stunden Stilübungen in freien Aufsätzen: Director Dr. Haun. — 2 S
Exercitien, nach Nägelsbach, Extemporalien, metrische Versuche und Disputationsübungen
tentheils über zusammenhängende Stellen aus den griech. Tragikern. Lateinische Sprechübunge
6 Bücher aus Livius: Professor Dr. Ameis. — d) Deutsch: 2 Stunden Stilü
in freien Aufsätzen und in freiem Vortrage, Erläuterung deutscher Classiker: Directo
Haun. — e) Französisch: 2 Stunden Ideler und Nolte, 3. Theil. Lemonte
Lacretelle. Mde. Staël-Holstein. Daru. Fourier. Cuvier. In französischer S
wurde das Leben der Schriftsteller und der Inhalt der Stellen besprochen, sowie auch U
im Disputiren über freie Arbeiten und Thesen angestellt. Ferner Stilübungen in Exercit
Extemporalien: Dr. Weigand.

2) Wissenschaften: a) Religionslehre: 2 Stunden (combinirt mit Se
Beleuchtung des apostolischen Symbolums aus den Stellen des Grundtextes des A. und
auf denen seine Sätze beruhen, und Würdigung der Entwickelungen, die sie in den versc
Confessionen der christlichen Kirche erfahren haben: Director Dr. Haun. — b) M
matik: 2 Stunden Arithmetik: Zusammengesetztere Gleichungen des 1. und 2. Gra
einer und mehreren Unbekannten; Proportionen, Progressionen; Combinationslehre. 2 S
Geometrie: Ebene Trigonometrie; Repetition der ganzen Planimetrie, nebst Uebu
Auflösen planimetrischer Aufgaben. Monatlich zwei schriftliche Arbeiten: Subrector Har
c) Physik: 2 Stunden Allgemeine Naturlehre, Mechanik, Optik: Subrector Har
d) Geschichte und Geographie: 2 Stunden neuere Geschichte von 1660 bis 178
Schmidt's Grundriß, 3. Abtheilung, und Wiederholung einzelner Partien der alten G
und Geographie: Professor Dr. Ameis. — e) Geschichte der Nationa
ratur: 1 Stunde Vom Anfang bis zum Zeitalter der Reformation, nach Pischo
faden §. 1 — 66: Director Dr. Haun. — f) Philosophische Propädeu
Stunde Empirische Psychologie und Logik, nach Beck's Grundriß: Director Dr. Ha

3) Fertigkeiten: Zeichnen: 2 Stunden combinirt mit Secunda, Köpf
schaften, Figuren- und Thierzeichnungen, in genauer Ausführung mit Bleistift, Kreide,
im Sommer: Zeichenlehrer John; im Winter 1 Stunde: Lehrer Dreiheller.

Secunda. Classen-Ordinarius: Prorector Professor Dr. Ameis.

1) Sprachen: a) Hebräisch: 2 Stunden Formenlehre, nach Gesenius, mi
lichen Flexions- und Analysirübungen (die 2te Abtheilung außerdem in einer besonder
Unterricht in den Anfangsgründen). Lectüre in Gesenius Lesebuche. Uebungen im U
ins Hebräische aus dem 1. Cursus von Uhlemann's Anleitung: Conrector Dr. Mühl

iechisch: 4 Stunden Lectüre: Aus Herodot die Freiheitskriege und acht Biographien des Plu- Homeri Ilias.: Professor Dr. Ameis. — 2 Stunden Grammatik, nach Rost; Er- alien und Exercitien theils aus Rost und Wüstemann, 3 — 4. Cursus, theils nach la- en Dictaten: Conrector Dr. Mühlberg. — c) Lateinisch: 3 Stunden Grammatik, ien, Extemporalien und metrisch Uebungen. 5 Stunden Lectüre, theils öffentlich, theils ovision der Privatlectüre: Cicero oratt. de imperio Pompeji, pro Murena, pro Mi- Livii histor. V — X und XXI. Vier Stücke des Terenz und Einzelnes aus Vir- Georgic.: Professor Dr. Ameis. — 2 Stunden Virgil. Aen. V und VI curso- Virgil. Georg. I. statarisch: Conrector Dr. Mühlberg. — d) Deutsch: 3 Stun- hetorik und Poetik (nach Eschenburg, von Pinder). Declamationen, Recitationen und nen zur Uebung im freien Vortrage; Stilübung in freien Aufsätzen: Conrector Dr. erg. — e) Französisch: 2 Stunden Ideler und Nolte, 1. Theil: Fléchier. Fénélon. Vertot. Saint-Réal. D'Aguesseau. Der Inhalt in französischer Sprache besprochen. natik, nach Hirzel. Cap. 13 — 18, mit schriftlichen Uebungen; Extemporalien und rift derselben. Memoriren der Gallicismen, Uebungen im Erzählen in französischer e: Dr. Weigand.

2) Wissenschaften: a) Religionslehre: 2 Stunden combinirt mit Prima. (siehe 2. a.) — b) Mathematik: 2 Stunden. Arithmetik: Logarithmen und ihre dung; Leichtere Gleichungen des 1. und 2. Grades mit einer und mehreren Unbekann- Stunden Geometrie: Kreislehre, Aehnlichkeit und Gleichheit der Figuren. Wöchentlich usliche Arbeit: Subrector Hartrodt. — c) Physik: 1 Stunde Allgemeine Natur- Mechanik, Optik: Subrector Hartrodt. — d) Geschichte und Geographie: nden. Die ältesten Reiche; Griechische Geschichte bis auf Philipp von Macedonien, n darauf bezüglichen Abschnitten aus der alten Geographie, nach Schmidt's Grundriß, eilung: Professor Dr. Ameis.

3) Fertigkeiten: Zeichnen: 2 Stunden mit Prima combinirt.

Tertia. Classen-Ordinarius: Subconrector Recke.

1) Sprachen: a) Griechisch: Im Sommerhalbjahre: 2 Stunden. Xenoph. I. 1 Stunde Homer Odyss. I. 2 Stunden Grammatik, nach Rost. Exercitien und ralien, nach Rost und Wüstemann. Metrische Uebungen im Herameter: Dr. Wei- — Im Winterhalbjahre: 2 St. Xenoph. Anab. II — III. 2 St. Hom. II—III statarisch, XII—XX stellenweis und cursorisch. 2 St. Repetition der Formen- d Hauptregeln der Syntaxis, Stil- und metrische Uebungen: Collaborator Bierwirth. — einisch: 2 St. Caesar bell. gallic. I—III statarisch. 1 St. Justin. I—XIII stellen- d cursorisch. 2 St. Ovid. Metam. I und XI statarisch, VII—X stellenweis und cursorisch. den Grammatik nach Zumpt (besonders die Lehre über die Casus, Tempora und Modi). 3 n Exercitien und Extemporalien: Subconrector Recke. — c) Deutsch: 2 Stunden ur der freien Aufsätze, der Disponir- und Versübungen; Erläuterung von Gedichten; ation und Uebung im mündlichen Referiren über historisch wichtige Ereignisse und Per- Subconrector Recke. — d) Französisch: 2 Stunden Pierre le Grand, par re. Chap. X — XIX. Grammatik, nach Hirzel Chap. X — XII. mit wöchentlichen

schriftlichen Pensen, Extemporalien, Memoriren von Vokabeln, Sprechübungen: Weigand.

2) Wissenschaften: a) Religionslehre: Erklärung evangelischer Abschnit alttestamentlicher Hauptstellen, Erläuterung der Glaubens- und Sittenlehre: Pastor ordinarius Sauerbrey. — b) Mathematik. Arithmetik: Wiederholung der Buch rechnung, Bildung der Quadrat- und Cubikzahlen, Ausziehung der Quadrat- und wurzel aus besondern und allgemeinen Zahlengrößen, Wurzelrechnung, Lehre von den meinen Proportionen, Gleichungen des 1. Grades mit einer und mehreren Unbekannten. metrie: Wiederholung der Elemente des 1. Buches des Euclid, Anwendung der Sä Beweisführung vieler andern geometrischen Sätze und zur Lösung mannigfacher Aufgabe Dreieck und Viereck; das 2. Buch des Euclid und Anwendung desselben auf die Bere der einzelnen Stücke des Dreiecks und Vierecks oder die sogenannte rechnende Geometr wöchentlichen häuslichen Arbeiten (3 Stunden auf beide Gegenstände vertheilt): Su rector Dr. Dilling. — c) Naturbeschreibung: 2 Stunden Botanik und Mine Subconrector Dr. Dilling. — d) Geschichte und Geographie. Im So halbjahr: 3 Stunden Begebenheiten des Mittelalters bis auf die Hohenstaufen Schmidt's Grundriß. 2. Abtheilung; Geographie, nach Volger's vergleichender Erdbeschr Conrector Dr. Mühlberg. — Im Winterhalbjahre: 3 Stunden Geschichte der Zeit von der Entdeckung Amerika's an bis zur französischen Revolution 1789 nebst Geo der Schauplätze, nach Schmidt's Grundriß. 3. Abtheil.: Collaborator Bierwirth.

3) Fertigkeiten: a) Zeichnen: 2 Stunden Körperglieder, Landschaften, und Thierzeichnungen, meist auf dem Reißbrete mit Bleistift, Kreide und Tusche skiz ausgeführt: Lehrer wie in Prima. b) Gesang: 1 Stunde zwei- und dreistimmige Arien und Lieder: Musikdirector Thierfelder.

Quarta. Classen-Ordinarius: Subrector Hartrodt.

1) Sprachen: a) Griechisch: 2 Stunden Grammatik, nach Rost 3 Lectüre in Jacob's Elementarbuch 1 — 2. Cursus. 1 Stunde Exercitien und Extem Subconrector Recke. — b) Lateinisch: 3 Stunden Cornel. Nepos. 2 Stunden dri fabulae. 2 Stunden Exercitien und Extemporalien. 2 Stunden Grammatik, nach Subrector Hartrodt. — c) Deutsch: 2 Stunden Correctur der schriftlichen Uebungen im Declamiren, Orthographische Uebungen, Grammatik, nach Götzinger: Su Hartrodt. — d) Französisch: 2 Stunden Lectüre in Liesen's Lesebuche. Formenl Drell mit Einschluß der wichtigsten unregelmäßigen Verba, schriftliche wöchentliche der Conjugationen und Reinschriften der Extemporalien, Memoriren von Vocabeln u sen für die Conversation, Anfänge im Sprechen über den Inhalt des Gelesenen: Dr. W

2) Wissenschaften: a) Religionslehre: 2 Stunden Biblische Gesch Erklärung des Lutherischen Katechismus, verbunden mit Memoriren der bezüglichen Bibelst Kernlieder: Subconrector Recke. — b) Mathematik: 2 Stunden Arithme 4 Grundoperationen der Buchstabenrechnung, Wiederholung der Lehre von den Decim Bildung der Quadratzahlen, Ausziehung der Quadratwurzel, Lehre von den al arithmetischen und geometrischen Proportionen, Elemente der Gleichung, die zusammen

ngen des bürgerlichen Lebens. 1 Stunde Geometrie: Von den Linien, Winkeln und
en, Congruenz und Gleichheit des Dreiecks, vom Vierecke und Parallelogramme, leichtere
sche Aufgaben, wöchentliche häusliche Arbeiten: Subconrector Dr. Dilling. —
turbeschreibung: 2 Stunden allgemeine Uebersicht und Eintheilung der ganzen
elt, spezielle Beschreibung der Vögel und übersichtliche der kaltblütigen Rückgratsthiere:
nrector Dr. Dilling. — d) Geschichte und Geographie: 2 Stunden Geschichte
lands und brandenburgisch-preußische Geschichte, Geographie von Europa: Subcon-
Dr. Dilling.

3) Fertigkeiten: a) Zeichnen: 2 Stunden Körperzeichnen, schattirtes und aus-
s Zeichnen nach Vorlegeblättern: Lehrer wie in Prima. — b) Gesang: 1 Stunde
mmige Choräle, mehrstimmige Lieder aus Erk's Liederkranz: Musikdirector Thier-
— Schönschreiben: 2 Stunden nach Vorschriften von Weiß ꝛc., im Sommerhalb-
Schulamtscandidat Busse; im Winterhalbjahre: Subconrector Recke.

Quinta. Classen-Ordinarius: Subconrector Dr. Dilling.

1) Sprachen: a) Lateinisch: 3 Stunden Grammatik, nach Putsche, Formenlehre
nothwendigsten Regeln der Syntax mit Memoriren der Grundregeln und einfacher Sätze
malbeispiele für die Regeln. 4 Stunden Lectüre in Jacobs und Dörings Elementarbuche.
mündliche und schriftliche Uebersetzungsübungen ins Lateinische, aus August's practischen
ngen: Subconr. Dr. Dilling. — b) Deutsch: 4 St. Lehre von den Redetheilen und
lexion, Zergliederung des einfachen Satzes, orthographische Uebungen; schriftliche Aufsätze,
hes Erzählen und Declamiren, im Sommerhalbjahre: Subconrector Recke; im Win-
ahre: Collaborator Bierwirth. — c) Französisch: 2 Stunden Orell's Formen-
s zur 1. Conjugation, Leseübungen, schriftliche Uebungen nach Orell, Lectüre der Erzäh-
in der Grammatik, grammatische Analyse in französischer Sprache: Dr. Weigand.

Wissenschaften: a) Religionslehre: 2 Stunden Bibelkunde, Biblische Geschichte
T. und Geburt und Jugendgeschichte Jesu, Einübung der Hauptstücke des Katechismus
elsprüchen und Kernliedern, im Sommerhalbjahre: Pastor extraordin. Sauerbrey; im
albjahre: Collaborator Bierwirth. — b) Rechnen: 4 Stunden Rechnen mit
benannten Zahlen, gemeine Brüche, Decimalbrüche, Proportionsrechnung, Reesische Regel,
und Repartitionsrechnung, Vermischungsrechnung: Subconrector Dr. Dilling. —
turbeschreibung: 2 Stunden Naturlehre und Naturbeschreibung, nach Nicolai, mit
ng von Helmuths Naturlehre, Gabriels Zoologie und Goldfuß naturhistorischem Atlas:
ctor Dr. Mühlberg. — d) Geschichte, 3 St. nach Volger's Grundriß, in biographischem
er. Geographie nach Selten, das Allgemeinste aus der mathematischen und physischen
phie, allgemeine Umrisse, insbesondere Europa, Deutschland, Preußen, Provinz Sachsen,
ungen im Kartenzeichnen und Entwerfen von Tabellen: Conrector Dr. Mühlberg.

Fertigkeiten: a) Zeichnen: 2 Stunden Körperzeichnen, nach Peter Schmidt, in
n und schattirt, Zeichnen nach Vorlegeblättern: Lehrer wie in Prima. — b) Gesang:
den: Erklärung der musikalischen Wandtafeln von Haitzinger und Gaßner, zweistimmige

Choräle und Arien aus Erk's Liederkranz: Musikdirector Thierfelder. — c) Schreiben: 2 Stunden nach Vorschriften von Weiß ꝛc, im Sommerhalbjahr: Schulcandidat Busse; im Winterhalbjahr: Subconrector Recke.

B) Die in den **freien Aufsätzen** bearbeiteten Themata waren folgende:

I. Themata für die lateinischen Arbeiten: Prima: 1) Cur Athenien Paulo Apostolo (Act. Apostolor. XVII, 22) recte dici potuerint omnino religio 2) Quod Hirtio teste (bell. Alexandr. cap. XXVI) Alexandrini viderunt, Ro et rebus secundis confirmari, et adversis incitari solere, id quibus potissimu rei publicae temporibus factum sit, inquiratur. 3) De exercitationum gymn rum dignitate atque utilitate. 4) Examinetur judicium de L. Cornelia Sulla cerone (de offic. II, 3) his verbis factum: „In illo secuta est honestam causa honesta victoria.“ 5) Quam aptis argumentis Antigone (in Sophocl. Oedip. v. 1176—1197) usa sit ad persuadendum patri, ut Polynicem filium supplic mitteret. 6) Carmina Horatii I, 36 ad Plotium Numidam et II, 7 ad Pompej inter se comparentur, ut similia et disparia bene discernantur. 7) Eadem com instituatur inter carmina Horatii II, 3 ad Dellium et II, 14 ad Postumum 8) Cur (quod apud Ciceronem de oratore II, 25 §. 106 relatum legimus) Cajus qui tribunus plebis aegre tulerat, quod P. Cornelius Africanus ipsi interroga sponderat, Tib. Gracchum sibi jure caesum videri, tamen postea consul fact suerit, jure et pro salute patriae factum esse, ut Caj. Gracchus occisus sit. putatio trium discipulorum de summo scholarum bono, quod primus in doctr puerilium et bonorum morum laude atque honore, alter in utilitate, tertius fectibus ponendum esse censet. 10) De varia indole ac consilio auctorum Niciae, Niceratis filii, describentium 11) Exponatur, quatenus, quae ap dium in Heroid, IX, 23 Herculi objiciuntur his verbis:

„Coepisti melius, quam desinis. Ultima primis Cedunt“

eadem in Hannibalem contra Romanos bellum gerentem cadere videantur.

Secunda: Quae sint maxime memorabilia in Vejorum obsidione, Li exponitur. 2) Vita Themistoclis duce Plutarcho ita enarretur, ut simul appa quibus rebus Plutarchus discedat a Cornelio Nepote. 3) Nexus eorun libro III Georgicon Virgilii continentur, declarandus. 4) Argumentum Terentianae, quae Heautontimorumenos inscripta est. 5) Quomodo singula Iliadis carmina se excipiant.

III. Themata für die deutschen Arbeiten. Prima: Vergleichung der Jun Orleans im Schillerschen Schauspiele mit der Kamilla in Virgil's Aeneide (Buch 11) ber die Bedeutsamkeit der Grußformen bei den Hebräern, Griechen, Römern, Deu Franzosen für die Bestimmung des Charakters dieser Völker. 3) Der seinen Lebenslau

chüler schildert hauptsächlich die seine Entwickelung bisher hemmenden und fördernden Um-
4) Wie die Klage des Hugo in Müllners Tragödie „die Schuld", in den Worten:

— — — — „Auswendig lernen
Kann der Mensch, was er nur will,
Mosis Bücher, die Propheten,
Und die ganze heilge Schrift.
Aber, was er will vergessen,
Wär's auch eine Silbe nur,
Das steht nicht in seiner Macht"

natürlichere und richtigere Auffassungsweise des Themistocleischen Wunsches („er würde hen, wenn man vergessen lernen könnte, was man wolle") hinleite, als die von Cicero tore II, 84) gegebene erscheint. 5) Welche weise Anwendung hat der in die Welt Jüngling von dem Worte Göthe's zu machen:

„Die Menschen fürchtet nur, wer sie nicht kennt,
Und wer sie meidet, wird sie bald verkennen."

en und Lernen, jedes ein Säen und zugleich ein Ernten, und daher beides wie verschie- dem Säen und Ernten des Landmanns! 7) Charakterisirung der Anfechtungen, welche in der Bürgschaft als zur Bewährung der Treue des Möros zu besiegende aufgestellt Wie dem Oedipus in Kolonos in der Sophokleischen Tragödie bei den Anfechtungen, die er dem letzten Gange zur Ruhe erfährt, doch um seines größern Gehorsams willen nun größere Theil wird. 9) Wenn man dem studirenden Jünglinge auch die Kunst zu entbehren anempfiehlt, int man wohl damit? 10) Warum muß die gewissenhafte Vorbereitung des Jünglings auf Beruf für die beste Bethätigung seiner Vaterlandsliebe gehalten werden?

Secunda: 1) Die Freuden des Jünglingsalters verglichen mit denen des Greisenalters ic. de senectute.) 2) Die Hoffnung als Hauptquelle der Freudigkeit eines guten Men- 3) Die Lustreise im Mai. 4) Ueber das Siegesfest von Schiller. 5) Streit des Nep- dem Aeolus, poetische Nachbildung von Virgil. Aen. V, 125 sqq. 6) Vertheidigungs- Psammetich gegen seine Unterthanen. 7) Die Theilnahme des Schülers an der Feier ntedankfestes. 8) Die Vaterlandsliebe, eine Pflicht der Dankbarkeit. 9) Beschreibung der lt, dichterische Nachbildung von Virgil. Aen. IV. 265—295. 10) Ueber die Achtungs- eit derjenigen, welche auf unsere Achtung Anspruch machen.

Tertia: 1) Karls des Großen Leben und Thaten. 2) Die Vortheile des Frühaufstehens. forderung und Bitte an einen wohlhabenden Freund um Unterstützung der Armen in der Noth. 4) Briefliche Berichterstattung über die Feier des Mühlhäuser Brunnenfestes. r Kaiser Heinrich I., genannt der Finkler. 6) Wie ehrt man das Andenken an ver- lle Männer am besten? 7) Deucalion und Pyrrha, nach Ovid. Metamorph. I., 15. 8) Hoher Werth der Arbeitsamkeit. 9) Hannibal's Thaten, nach Cornelius Nepos. schreibung einer Winterlandschaft. 11) Die Zunge als das wohlthätigste und verderb- lied des Menschen. 12) Der Undankbare, eine Charakterschilderung, nach einem mit- n Probestücke.

C) Zu der **Nebenabtheilung für Seminar-Unterricht** gehörten überhaupt aller, nämlich 1 in Prima und 2 in Secunda, die im Gymnasio nur an den 16 Stun- heil nahmen, in denen deutsche und französische Sprache, Religionslehre, Mathematik und Geschichte und Geographie gelehrt und das Zeichnen geübt wird, außerdem aber von dem hrer für den Seminar-Unterricht, Herrn Pastor Barlösius, Unterricht in Religionslehre (nach

Sickel), biblischer Geschichte, Bibelkunde und Erklärung, allgemeiner und besonderer Me und vom Musikdirector Thierfelder im Generalbaß, Gesang und Orgelspiel erhielten.

D) Die Theilnahme an den **gymnastischen Uebungen** stimmte sich in der flossenen Jahre noch mehr herab. Es ist zu weitläufig, hier auf die Erörterung der Gründe einzugehen, die dazu beigetragen haben mögen, und wenn man auch zugesteher daß die noch nicht streng durchzuführen gewesene nothwendige Anschaffung von Turnk das Vermissen mancher Turngeräthe, der unbequeme und für Erhaltung guter Beschaf der Utensilien ungünstige Aufbewahrungsort derselben, die Beengung der Zeit bei der der öffentlichen Lehrstunden, die liebere Benutzung günstiger Sommerzeiten zum Baden in und zum Schwimmenlernen, und der Winterzeiten zum Schlittschuhfahren, und bei den lern der obern Classen die Befriedigung mit dem bereits Gelernten, welche die Lust am Weite leicht verringert, dazu mitgewirkt haben, so lassen sich doch tiefer liegende Gründe der zeitweilig e den größeren Gleichgültigkeit gegen das Turnen entdecken. So weit jedoch eine lebhaftere The von der Beseitigung obiger Hindernisse, von einer zweckmäßigeren Riegenabtheilung, angeme Disposition der Uebungsarten und Uebungszeiten und der Weckung eines wirklichen I abhängig zu sein scheint, soll im nächsten Sommer das Nöthige dafür versucht werde die Uebungen von denen, für die sie sich als nöthig und nützlich nachweisen lassen, we in der wünschenswerthen Ausdehnung mit dem erforderlichen Fleiße angestellt werden.

E) Die **Arbeitstage** sind in der festgestellten Regel nebst der **Docirstun** Schüler fortgesetzt worden.

III. Verordnungen und Erlasse der vorgesetzten Behör

A) Von E. Hochlöblichen Provinzial-Schul-Collegio.

1) Anfrage, ob die in der Benachrichtigung vom 14. Februar 1846 (cf. P 1846, pag. 10, Nr. 16) in Aussicht gestellte Zusendung von 20 Exemplaren der von gust dem Druck übergebenen schriftlichen Denkmäler aus dem Zeitalter der Reforma Gymnasio zugekommen sei. Magdeburg, den 10. April 1847. (Antwort, daß wir sendung dieser Art nicht erhalten haben).

2) Circular-Verfügung: In allen denjenigen Fällen, in welchen bei der Maturit fung die Reife nach §. 28 C des Reglements zuerkannt wird, soll die Angabe desj Faches, für welches allein die Reife zuerkannt worden ist, außer in der Schlußbemerk schon bei der Ueberschrift zugesetzt werden. Der spätere Uebergang solcher Studir eine andere Facultät bleibt von dem Nachweise der erworbenen Reife ohne deren bi Beschränkung auf ein bestimmtes Fach abhängig. Berlin, den 12. Mai. burg, den 21. Mai 1848.

3) Circular-Verfügung, daß die Quittungen sowohl über die aus öffentlichen gezahlten Stipendien an Studirende, als auch über die den Mitgliedern der academis minarien gewährten Prämien stempelfrei seien. Berlin, den 30. October. Magdeb 9. November 1847.

) Nachricht über die Ertheilung der für den Professor Dr. Ameis nachgesuchten Er- ur Annahme der auf ihn gefallenen Wahl eines Mitgliedes der hiesigen Stadtverord- sammlung. Magdeburg, den 12. Januar 1848.

) Wegen Beitritts der höhern Bürgerschule zu Trier, und der beiden Großherzoglichen urgischen Gymnasien zu Neu-Strelitz nnd Neu-Brandenburg zum allgemeinen Pro- tausche sind künftig 283 Exemplare des Programms einzusenden. Magdeburg, den ember 1847.

) Empfohlen wurde: a) Heydemann's und Mützel's Zeitschrift für das Gymnasialwesen. en 1. März. Magdeburg, den 19. März 1847. b) Die physikalischen und akustischen von Lange in Berlin. Berlin, den 17. Juni. Magdeburg, den 24. Juni 1847. Vogel's Germania, ein vaterländisches Lesebuch. Magdeburg, den 6. August 1847. vom geographischen Institute zu Weimar angefertigten Globen von 12 Zoll Durch- um Aufhängen eingerichtet, à 8 Thlr. Magdeburg, den 4. October 1847.

B) Von E. Wohllöbl. Magistrate, als Patron der Anstalt.

Von den 65 theils zur weiteren Berichterstattung, theils auf eingereichte Eingaben er- n Zufertigungen betrafen 5 das Lehrerpersonal, 3 das neue Lehrer-Pensions-Reglement, Bibliotheks-Einkünfte, 2 die höheren Orts geschehene Anempfehlung der Versicherung der n, Bibliotheken, Apparate und Sammlungen gegen Feuersgefahr, 2 das Examen, 7 die gen, 14 das Schulgeld, 1 Schülerunterstützung, 2 die Programm-Druckkosten, 5 die erlichkeiten, 8 Baulichkeiten, 2 das Turnwesen, 1 die Revaccination, 1 Mittheilung des igiblattes zum Circuliren unter den Lehrer-Collegien.

IV. Statistische Uebersicht des Gymnasiums

von Ostern 1847 bis Ostern 1848.

A) Verhältnisse der Schüler.

1) Zahl der Schüler.

Das Gymnasium zählt gegenwärtig 117 Schüler, von denen 8 in Prima, 26 in Se- 18 in Tertia, 38 in Quarta, 27 in Quinta sitzen.

2) Aufgenommen wurden 24:

zu Ostern 1847:

Tertia 2: Julius Kirchhof, aus Buhla. — Friedrich Wilhelm Schollmeyer, aus ltengottern.

Quarta 4: Heinrich Wilhelm Hugo Clauder, aus Volkerode. — Gustav Emil Wil- elm Jäger, aus Großwelsbach. — Johann Carl Georg Gerlach, aus Sollstedt. — erdinand Wilhelm Sachse aus Großgrabe.

Für Quinta 13: Wilhelm August Theodor Ernst Dilling, aus Erfurt. — Karl Griesbach, von hier. — Albert Theodor Günther, aus Weberstedt. — Rich nig, aus Magdeburg. — Ferdinand Kühmstedt, von hier. — Karl Friedrich Kurzius, aus Rüdigershagen. — Johann Aloisius Albert Mühlberg, von Bernhard Julius Möller, aus Plauen. — Theodor Neubauer aus Katharine Friedrich Gotthelf Herrmann Sachs, aus Langula. — Karl Wilhelm Stepl Kammerforst. — Karl Otto Struensee, aus Aschersleben. — Franz Ka Mellin, aus Zschepplin.

zu Johannis 1847:

Für Quarta 1: Heinrich Ludwig Ernst v. Marschall aus Altengottern.
Für Quinta 3: Otto Julius Theodor v. Marschall, aus Altengottern. — Friedrich von hier. — Hugo Leopold Pohlmann, aus Meseritz.

zu Michaelis 1847:

Für Quinta 1: Bodo Burghardt Kraft Mordian Degenhardt v. Bodenhausen,

3) Abgegangen sind 32:

a) Aus Prima nach bestandener Abiturienten-Prüfung mit dem Zeugnisse der Reif Universität 5:

zu Ostern 1847:

Vor- und Zuname	Alter Jahr	Geburtsort	Stand und Wohnort des Vaters.	Zeit des Schulbesuchs überhaupt Jahr	Zeit des Schulbesuchs in Prima Jahr	Universität	
Adolph Wilhelm Sachse	21 3/4	Felchta	Pfarrer in Großgrabe	9	3	Halle	T
Theodor Gottfried Bader	18 3/4	Mühlhausen	Notar in Mühlhausen.	10	2	Halle	Ph
Ernst Christoph Demme	21	Mühlhausen	Gerbermeister † in Mühlhausen	10	2	Berlin	wi

zu Michaelis 1847:

Rudolf Haun	17 1/2	Merseburg	Gymnasialdirector in Mühlhausen.	8 1/2	2	Halle	Ph T
Rudolph Klauer	17 1/2	Mühlhausen	Apotheker in Mühlhausen	8 1/2	2	Halle	wi

b) Auf eine andere Schule 5:

Aus Tertia 2: Rudolph August v. Berken, von hier. — Gottlieb Ferdinand Me Günzerode.
Aus Quarta 1: Ferdinand Wilhelm Sachse, aus Großgrabe (nach Michaelis 184
Aus Quinta 2: Heinrich Friedrich Wilhelm v. Bodungen, von hier. — Richard aus Magdeburg (Michael 1847).

c) Zu einem andern Berufe 21:

ma 2: August Wilhelm Riemann, von hier. — Johann Eduard Feigenspan, hier.

cunda 7: Wilhelm Ferdinand Meißner, von hier. — Friedrich Gustav Peter, aus igershagen. — Christian Lutteroth, von hier. — Alexander Fink, aus Mün- — Herrmann Christoph Eisenhardt, von hier. — Wilhelm Klauer, von — Robert Friedrich Heinrichshofen, von hier.

tia 6: Franz Karl Friedrich Fröbe, von hier. — Otto Keferstein, aus Kleinen- den. — Heinrich Christoph Karl Hasenbein, von hier. — Karl Christoph Heise, hier. — Philipp Gottlieb Louis Eyßel, vom Ihlefeld. — Gustav Friedrich Alexan- Engelhardt, von hier.

arta 6: Gottfried Wilhelm Führ, von hier. — Berthold Christian Meybrink, hier. — Johann Karl August Friedrich Franke, von hier. — Emanuel Arthur ian v. Bentivegni, aus Berlin. — Richard Adolph Seyfert, aus Langensalza. — itz Magnus Bon, von hier.

d) Gestorben 1:

rtia 1: Johann Adolph Sander aus Bielefeld erlag ungeachtet der aufmerksamsten ge seiner Verwandten dennoch der Macht eines nervösen Fiebers am 19. August 1847 em Alter von 14¼ Jahr. Das Lehrercollegium und die zwei Classen, denen er an- ört hatte, geleiteten ihn zu seiner letzten Ruhestätte, wo zwischen den Trauergesängen der stliche, der in Tertia den Religionsunterricht ertheilt, Herr Pastor extraordinarius uerbrey, Worte religiöser Betrachtung zu der Trauerversammlung sprach.

B) Vermehrung des Lehr-Apparats.

ls Geschenke für die Schulbibliothek und den Festsaal, für welche wir hier- rn Dank abstatten, sind eingegangen:

) Von E. Königl. Hohen Ministerium der geistlichen ꝛc. Angelegenheiten: a) Fir- Völkerstimmen Germaniens. 8. und 9. Lieferung. b) v. Spruner's historisch-geogra- Atlas. 11. Lieferung, oder Atlas der alten Welt. 1. Lieferung.

3) Von Herrn Major v. Bentivegni allhier: Gußeiserne goldbronzirte Büste Fried- helm III. (für den Festsaal).

4) Von Herrn Justizrath Steinbach allhier: Ein Band alter Mühlhäuser Programme.

5) Von Demoiselle Bernigau allhier: a) Stein's chronologisches Taschenbuch der Geschichte von 1789 — 1812. b) Ehrhardt's Ueberlieferungen zur vaterländischen te. 3 Hefte. Magdeburg, 1825.

6) Von dem Herrn Buchhändler Ernst Lambeck in Thorn: Luke's geometrische Auf- ach der Methode der Alten. 1. Theil. Planimetrische Aufgaben mit Lithographien. 1845.

7) Von dem Lehrer-Collegium des Gymnasiums: Jahn's Jahrbücher für
logie. 1846. b) Jahn's Archiv für Philologie. 1846. c) Protocoll über die Sitzun
Gustav-Adolph-Vereins in Berlin.

Die **Schul-Bibliothek** hat sich bei einer Einnahme von 109 Thlr. 5 Sgr., vo
cher Summe aber ein Drittheil schon im Jahre 1846 verausgabt war, um 86 Bände ver
die folgende Werke enthalten: Wannowski antiquitates Romanae e graecis fontibu
plicatae. Lobeckii *Ῥηματικον*, s. verbor. gr. et nomin. verbal. technologia. P
chi vitae, gr. et lat. ed. Döhner, Paris. 1846. Vol. I. Dionis Chrysostomi Ope
rec. Emperii. Bibliotheca scriptor. classic. gr. et lat., ed. Engelmann. Lips.
Waitz Grundlegung der Psychologie. Stephan's neue Stofflieferungen. Viehhoff's Archiv f
Unterricht im Deutschen, 1. und 2. Jahrgang. Weishaupt griech. und röm. Verzierunge
antiken Mustern. Allgemeine Welthistorie der englischen Gelehrten. Halle, 1744—70. (40
in 4.) Neue Bibliothek der schönen Wissenschaften und freien Künste, in 23 Bänden. D
Theater und Kirche. Sämmtliche Tragödien des Sophokles, metrisch übers. von Franz
K. O. Müllers kleine Schriften über Religion, Kunst, Sprache, Literatur und Geschic
Alterthums. Beckers röm. Alterthümer. 2. Bandes 2. Abtheil. Winers bibl. Realwört
1. Band. Eckermanns Lehrbuch der Religionsgeschichte, 3. Band. Otto Reventlow Le
der Mnemotechnik. Prutz Vorlesungen über die neue deutsche Literatur. Hermes Geschi
letzten 25 Jahre, 3. Band. Klemms allgemeine Kulturgeschichte der Menschheit, 6.
Buff's Experimentalphysik, 1—3. Lieferung. Jahns Jahrbücher für Philologie 1847.
Archiv für Philologie, 12 Band. Programmen-Revüe, 2. Band.

An **Programmen** erhielt die Bibliothek durch den Programmentausch 252 S
Gesammtzahl der 5 Sendungen.

Die **Schüler-Lesebibliothek** hatte von den Beiträgen der Schüler eine Ei
von 46 Thlr., und von dem Gymnasial-Antheile am Beidergewandgelde wieder die
von 17 Thlr 25 Sgr., und ist dadurch um 114 Bände vermehrt worden. Diese e
folgende Schriften: Hoffmann's Erzählungen, 5 Bändchen. Held und Corvins illustrirte
geschichte, 2. Band. Ramler's Werke, 2 Bände. Gleim's Werke, 6 Bände. Zacharia
Schriften, 8 Theile. v. Chronegk's Schriften, 2 Th. Gellert's sämmtliche Schriften, 10
Gfrörer Geschichte Gustav Adolphs. Nachträge zu Sulzer's Theorie der schönen Kü
Wissenschaften, oder Charactere der vornehmsten Dichter, 8 Bände. Die 114 Wunder d
Dichtungen von Louise Brachmann, 2 Theile. Faust, eine Trägödie von B. v. B. G
terhaltungen der kleinen Familie Grünthal, 2 Thle. Voß Gedichte, 4 Theile. Amalie
Jugendleben. Caroline Stille moralische Erzählungen. Die Abenteuer des Odysse
Atzerodt. Lehrreiche Unterhaltungen, 3 Bände. Alexander v. Humboldt's Reisen in
Pfahler's historische Skizzen. Erstes Lesebuch, von Hiecke. Fritze Geschichte Roms.
das Wissenswürdigste vom Menschen. Weerth's Haushalt der Natur. Bojesen Hand
griechischen und römischen Antiquitäten. Nieritz Jugendbibliothek, 8. Jahrgang, 6 Thle.
Johann Faust, 2 Thle. H. Müller, Elisabeth von England, Trauerspiel. Greiling's

2 Thle. Anderson's Mährchen. Der kleine Physiker, von Höpfner, 6 Thle. Salz- Himmel auf Erden. Matthisson's Gedichte. Geschichtschreiber der deutschen Vorzeit. Bibliothek der Unterrichts-Lectüre, 4 Thle. Pouqueville Griechenland. Werner's Thea- le. Philipp, der Tod Gustav Adolphs, Königs von Schweden. Buthmann's Erzäh- Cook's letzte Reise. Tittmann über Bestimmung des Gelehrten. Das Trefflichste aus chriften. Die Kinder in der Fremde. Förster, Preußens Helden. Eylert Charakter- drich Wilhelm III., 2. und 3. Band. Sagen und Geschichten des Harzes. Flathe, dolph, König von Schweden.

er historische Leseverein für das Gymnasium hatte von 32 Mitgliedern eine von 32 Thlr., und schaffte davon folgende Werke an: Die Völker des südlichen Rußl ihrer geschichtlichen Entwickelung, von C. J. Neumann. Ranke's Fürsten und Völker pa im 16. und 17. Jahrhundert, 4 Theile. Droysen Vorlesungen über die Freiheits- Theile. Geschichte der letzten zehn Jahre, von L Blanc Vorlesungen über die alte , von Raumer, 2 Theile. Die Politik, von Dahlmann. Neun Bücher preußischer , von Leopold Ranke. Thiers Consulat und Kaiserreich, 5. und 6. Band. Schlesiers ngen an Wilhelm v. Humboldt, 2. Bandes 2 Abtheilung. Deutsche Briefe über den on Quitzmann. — Diese Werke zeugen von dem Bemühen, dem Vereine es an den Erscheinungen von wirklichem historischen Interesse nicht fehlen zu lassen. Der Con- . Mühlberg, welcher den Verein leitet, wünscht auch ferner von den verehrlichen Mit- durch Vorschläge gediegener Werke sich hierin unterstützt zu sehen.

C) Legate, Stiftungen, Geschenke.

Die gewöhnlichen für Lehrer und Schüler sind in den früheren Jahresberichten öfter ge- Von den 20 Thlrn. zu Prämienbüchern wurden im Oster-Examen 1847 an die Schüler aus allen fünf Classen, deren Fleiß und gutes Betragen sie vor den andern ern dieser Auszeichnung vorzüglich werth machte, folgende Werke vertheilt: Eschenburg's h der classischen Literatur. Nägelsbach's lateinische Stilistik. Biblia hebraica Hal. ides, ed. Krüger. Schmalfeld's lateinische Synonymik. Eschenburg's Redekünste. Götterwelt. Gradus ad Parnassum. Crusius homerisches Wörterbuch. Schmidt's e Vaterlandskunde. Petiskus Olymp. Biblische Handconcordanz

Der Schulgeld-Ueberschuß ist wieder zu Remunerationen für die Abhandlung zum gramm 1847 und für andere Mehrarbeiten, so wie für Gratificationen an sämmtliche erwendet worden. Auch erhielt der Collaborator Bierwirth, da sein Besoldungsan- hrend der halbjährlichen Urlaubszeit den seine Stelle vertretenden Lehrern zugewiesen wor- , vom Magistrate die Summe von 25 Thaler als einen außerordentlichen Beitrag Studienreise.

Mit Dank erkennt das Lehrer-Collegium die ihm vom Patrone gewährte Wohlthat an, Lehrern die ihnen bereits bei der Anstellung zugesicherte Pensionirungsweise, wie der Städteordnung den andern städtischen Beamten ohne Beiträge zu einem Pensions- i Theil wird, auch fernerhin belassen worden ist.

V. Ueber die Schulprüfungen.

Zu Michael 1847 fand die gewöhnliche Prüfung aller Classen nebst Censuren-V nur vor dem Schul-Curatorium und Lehrer-Collegium Statt. Die Gegenstände waren folgende: Prima: Horatii Odae: Director Dr. Haun. — Französisch: gand. — Secunda: Griechisch: Professor Dr. Ameis. — Mathematik: Subrector H Hebräisch (mit Prima combinirt): Conrector Dr. Mühlberg. — Tertia: Relig Pastor Sauerbrey. — Jul. Caesar: Subconrector Recke. — Gesang: Musikdirec felder. — Quarta: Griechisch: Subconrector Recke. — Französisch: Dr. We Quinta: Lateinisch: Subconrector Dr. Dilling. — Geschichte: Conrector Dr. Mü Gesang: Musikdirector Thierfelder.

In der öffentlichen Prüfung zu Ostern d. J. werden die Ausarbeitungen un in den verschiedenen Sprachen und Wissenschaften, so wie die Zeichnungen, Schreibebüch von allen Classen vorliegen. Die Prüfung wird in folgender Weise gehalten:

1) Im Gymnasium Donnerstags den 13. April, Vormittags von 8—11 Uh und Secunda, von 11 — 12 Uhr Tertia, Nachmittags von 2 — 4 Uhr Qu Quinta.

Prima: Sophoclis Antigone: Director Dr. Haun. — Französisch: Dr. W Hebräisch: Conrector Dr. Mühlberg

Secunda: Cicer. oratt.: Professor Dr. Ameis. — Mathematik: Subrector — Hebräisch: Conrector Dr. Mühlberg.

Tertia: Jul. Caesar: Subconrector Recke. — Homeri Odyssea: C Bierwirth. — Gesang: Musikdirector Thierfelder.

Quarta: Griechisch: Subconrector Recke. — Mathematik: Subconrector ling. — Gesang: Musikdirector Thierfelder.

Quinta: Religionslehre: Collaborator Bierwirth. — Französisch: Dr. W Gesang: Musikdirector Thierfelder.

2) Im Nebenseminar Donnerstags den 13. April, Nachmittags von 4 Uh und Neu-Testamentliche Exegese, Kirchengeschichte, Geographie: Hauptlehrer Pastor B Generalbaß und Orgelspiel: Musikdirector Thierfelder.

Zu diesen beiden Prüfungen den 13. April werden hiermit ganz ergebenst Der verehrliche Patron, die Stadt-Schul-Commission, die Königlichen Militär- so wie die städtischen Behörden, die Herren Stadtverordneten, die Herren Geis Lehrer der Stadt und der Vorstädte, die Eltern unserer Zöglinge, und alle Gönner u des Schulwesens.

Die Vertheilung der Prämienbücher, der Censuren, so wie die Versetzung üler und die feierliche Entlassung der Abiturienten findet Sonnabends den 15. Vormittags 10 Uhr, nur vor dem Schul-Curatorium und Lehrer-Collegium Statt.

Der Sommercursus beginnt Donnerstags den 27. April.

Mühlhausen, den 10. April 1848.

Dr. Haun, Director.

der statistischen Verhältnisse des Gymnasiums zu Mühlhausen im Schuljahre Ostern 1847 bis 1848.

I. Lehrer.

Director Dr. Haun.
Prof. Professs. Dr. Ameis, erster Oberlehrer.
Conr. Dr. Mühlberg, zweiter Oberlehrer.
Subrector Hartrodt, dritter Oberlehrer.
Subconr. I Recke.
Subc. II Dr. Dilling.
Dr. Weigand, Lehrer der franz. Sprache.
Collabor. Bierwirth.
Musikdir. Thierfelder.
Pastor extraord. Sauerbrey, interim. Religions-Lehrer.
Zeichenlehrer Dreiheller.
Turnlehrer Rindfleisch.

Pastor Barlösius, Hauptlehrer am Neben-Seminar.

II. Allgemeiner Lehrplan.

Unterrichts-Gegenstände.	Stundenzahl. I	II	III	IV	V	S
a) Sprachen:						
Hebräisch	2	2	—	—	—	4
Griechisch	6	6	6	6	—	24
Lateinisch	8	10	10	9	10	47
Deutsch	2	3	2	2	4	13
Französisch	2	2	2	2	2	10
b) Wissenschaften:						
Religionslehre	2	2	2	2	2	10
Mathematik	4	4	3	3	—	14
Rechnen	—	—	—	—	4	4
Physik	2	1	—	—	—	3
Naturbeschreibung	—	—	2	2	2	6
Gesch. u. Geograph.	2	2	3	2	3	12
National-Literatur	1	—	—	—	—	1
Philos. Propädeutik	1	—	—	—	—	1
c) Fertigkeiten:						
Zeichnen	1	1	2	2	2	8
Singen	—	—	1	1	2	4
Schönschreiben	—	—	—	2	2	4
d) Gymnastische Uebungen.	33	33	33	33	33	165
	—	—	—	—	—	4
						169

III. a) Verhältnisse der Schüler.

In Classe	waren zu Ostern 1847	entlassen durch Abgang	entlassen durch Versetzung	Summa	aufgenommen durch Reception	aufgenommen durch Versetzung	Summa	sind jetzt zu Ostern 1848
I	12	7	—	7	—	3	3	8
II	22	7	3	10	—	14	14	26
III	24	9	14	23	2	15	17	18
IV	34	7	15	22	5	21	26	38
V	33	2	21	23	17	—	17	27
Sma.	125	32			24			117

III. b) Verhältnisse der Abiturienten.

sind entlassen	Zahl	studiren wo?	Zahl	studiren was?	Zahl
zu Ostern 1846	3	in Berlin	1	Theologie	1
				Rechtswissenschaft	3
zu Michael 1847	2	in Halle	4	Philologie und Theologie	1
Summa	5		5		5

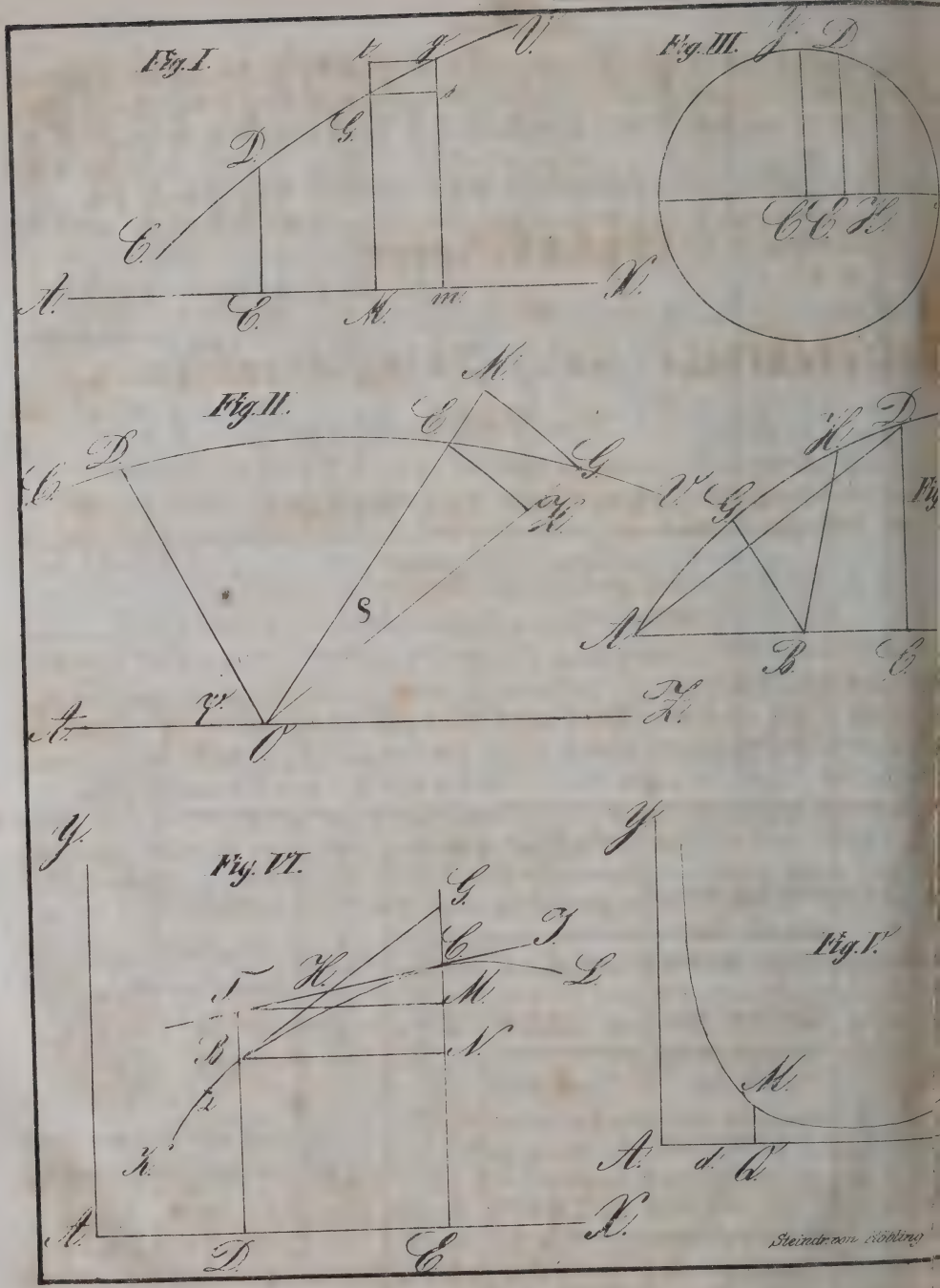


Fig. I.
Fig. II.
Fig. III.
Fig. IV.
Fig. V.
Fig. VI.
Steindr. von Löbling

Aphorismen

aus der

ifferential- und Integralrechnung,

mit Rücksicht

auf

die Lehre von den Kurven,

vom

Subconrector Dr. Dilling.

---

n nicht meine Absicht sein, die zahlreichen Anwendungen der Differential- und Integral- auf die höhere Geometrie einzeln anzuführen, auch würde der für die Abhandlung Raum dieses nicht möglich werden lassen. Ich begnüge mich daher damit, die Anwen- r auf die Quadratur und Rektifikation der Kurven hier durchzuführen.

an theilt bekanntlich die Kurven ein in Kurven einfacher und in Kurven doppelter g. Erstere werden durch zwei, letztere durch drei Koordinaten bestimmt. Unter der e einer Kurve einfacher Krümmung versteht man im Allgemeinen die Bestimmung der derjenigen ebenen Fläche, welche auf der einen Seite durch die Kurve selbst, und auf Seite durch die Koordinaten oder Theile derselben begrenzt ist. Bedient man sich rechtwinkeligen Koordinatensystems und bezeichnet CV (Fig. 1.) irgend eine Kurve, bscissenaxe, DE und GM zwei rechtwinkelige Ordinaten, so ist hier die Aufgabe, den Fläche DEMG zu bestimmen. Wendet man dagegen die Winkelkoordinaten an, d. h. die Lage der verschiedenen Punkte der Kurve durch ihre Entfernung von einem ge- unkte O (Fig. 2) und durch den Winkel, welchen diese Linie mit einer festen Linie AZ so ist alsdann die Aufgabe, den Inhalt der Fläche DEO zu bestimmen.

sei (Fig. 1.) CV irgend eine Kurve gegeben durch die Gleichung $y=\varphi(x)$, wo x e, y die senkrechte Ordinate bezeichnet, AX sei die Abscissenaxe, A der Anfangspunkt inatenaxen, DE und GM zwei beliebige normale Ordinaten dergestalt, daß die in ende Fläche DEMG entsteht. Es leuchtet ein, daß diese Fläche DEMG eine andere alten wird, jenachdem die beiden sie begrenzenden Ordinaten an anderen und anderen gezogen werden. Denkt man sich daher die eine Ordinate DE als fest und völlig was stattfinden wird, wenn die entsprechende dazu gehörige Abscisse AE gegeben ist, so

wird die Fläche sich nur noch ändern mit der Abscisse AM, der zweiten Ordinate GM ent chend. Nennt man daher AM = x, so wird die zu bestimmende Arealgröße der Fläche DE eine Funktion von x sein und es soll diese Funktion bezeichnet werden mit f(x), deren V also gesucht wird.

Soll für diese Größe f(x) eine Differentialgleichung erhalten werden, so denke mar das x um die Größe Mm = h vergrößert; die Ordinate GM wird alsdann in die Ord gm und die Fläche EDGM in die Fläche EDgm übergehen. Die Zunahme von x um Größe h wird somit eine entsprechende Veränderung zur Folge haben, es wird die neue Ord gm aus φ(x) abgeleitet, indem man x + h statt x setzt, also gm = φ (x + h). Eb wird der Werth von EDGM = f(x) für die neue Fläche EDgm, indem man in f(x) Werth x + h statt x substituirt, also EDgm = f(x + h). Daraus erhält man durch ei Subtraktion:

$$EDgm - EDGM = MGgm = f(x + h) - f(x).$$

Zieht man nun Gs parallel AX, bis sie gm oder deren Verlängerung in s schneid ist MGsm < MGgm für wachsende Ordinaten und MGsm > MGgm für abnehmende Ordi Da nun MGsm = GM × Mm = y . h = h . φ(x), so hat man, indem man für M seinen Werth f(x + h) − f(x) substituirt,

$$f(x + h) - f(x) > h \cdot \varphi(x) \text{ für wachsende Ordinaten}$$
$$\text{und } f(x + h) - f(x) < h \cdot \varphi(x) \text{ für abnehmende Ordinaten.}$$

Zieht man dagegen von g eine Linie gt parallel mit AX, bis sie MG oder deren Verlän in t schneidet, so ist Mtgm < MGgm für wachsende Ordinaten und Mtgm > MGg abnehmende Ordinaten. Da nun Mtgm = Mm . gm = h . φ(x + h) und MGgm = f(− f(x), so hat man f(x + h) − f(x) < h . φ(x + h) für wachsende Ordinaten und f(x − f(x) > h . φ(x + h) für abnehmende Ordinaten.

Bringt man diese Bedingungen mit den vorigen in Verbindung und stellt die zusammen, welche sich auf einen gleichen Fall beziehen, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} f(x + h) - f(x) > h \cdot \varphi(x) \\ f(x + h) - f(x) < h \cdot \varphi(x + h) \end{array}\right\} \text{ für wachsende Ordinaten,}$$

$$\text{dagegen } \left.\begin{array}{l} f(x + h) - f(x) < h \cdot \varphi(x) \\ f(x + h) - f(x) > h \cdot \varphi(x + h) \end{array}\right\} \text{ für abnehmende Ordinaten,}$$

Aus diesen Bedingungen geht unzweideutig hervor, daß die Größe f(x + h) − f(enthalten ist zwischen den beiden Grenzen h . φ(x) und h . φ(x + h), sei es nun, Ordinaten beständig zunehmen, oder daß sie beständig abnehmen. Dabei ist die Bemerku ohne große Wichtigkeit, daß diese Bedingungen stattfinden, wie klein oder wie groß auc dacht werde, wofern nur die Ordinaten entweder beständig zunehmend oder beständig abn gedacht werden und zwar von x = x bis x = x + h.

Um nun für den Differentialcoefficienten von f(x) eine Gleichung zu finden, er man nach dem Taylorschen Satze;

$$f(x + h) = f(x) + \frac{d\,f(x)}{d\,x} h + \frac{d^2\,f(x)}{d\,x^2} \frac{h^2}{2!} + \ldots\ldots$$

und daher

$$\text{n}) - f(x) = \frac{df(x)}{dx} \cdot h + \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \cdot \frac{h}{2!} + \frac{d^3 f(x)}{dx^3} \cdot \frac{h}{3!} + \ldots$$

erner ist nach demselben Satze

$$x + h) = h \left\{ \varphi(x) + \frac{d\varphi(x)}{dx} \cdot h + \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{2!} + \frac{d^3\varphi(x)}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{3!} + \ldots \right\}$$

ubstituirt man diese Werthe in die obigen Bedingungsgleichungen und zwar für den die Ordinaten wachsen, so hat man:

$$\frac{df(x)}{dx} \cdot h + \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots > h \cdot \varphi(x) \text{ und}$$

$$< h \cdot \left(\varphi(x) + \frac{d\varphi(x)}{dx} \cdot h + \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{2!} \right\}$$

unabhängig von h, wie klein auch h gedacht werde. Da nun die Größe nach der eite des Ungleichheitszeichens zwischen den bezeichneten Grenzen eingeschlossen ist, so wird renz zwischen eben dieser Größe und einer der Grenzen kleiner sein, als die Differenz eben jener Grenze und der andern Grenze, und beide Differenzen werden nothwendiger- selbe algebraische Zeichen haben. Zieht man nun die erste Grenze von der Größe auf Seite und von der zweiten Grenze ab, so entsteht:

$$\left\{ \frac{df(x)}{dx} - \varphi(x) \right\} h + \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{2!} + \ldots\ldots < \frac{d\varphi(x)}{dx} \cdot h^2 + \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} \cdot \frac{h^3}{2!} + \ldots\ldots,$$

beide Glieder dieselben Zeichen haben und zwar das positive Zeichen. Wird nun durch t, so hat man:

$$\frac{f(x)}{dx} - \varphi(x) + \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \cdot \frac{h}{2!} + \ldots < \frac{d\varphi(x)}{dx} \cdot h + \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{2!} + \ldots,$$

m so mehr

$$\frac{df(x)}{dx} - \varphi(x) < \left(\frac{d\varphi(x)}{dx} - \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \cdot \frac{1}{2!} \right) h +$$

$$\left(\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} \cdot \frac{1}{2!} - \frac{d^3 f(x)}{dx^3} \cdot \frac{1}{3!} \right) h^2 + \ldots\ldots\ldots$$

auch h gedacht werde.

Da nun die Größe auf der rechten Seite des Ungleichheitszeichens, weil sie den Faktor t, für den Werth $h = o$ verschwindet, so kann h so klein gedacht oder angenommen daß jene Größe sich von o weniger unterscheide, als jede angebbare, woraus dann daß $\frac{df(x)}{dx} - \varphi(x)$ kleiner als jede angebbare Größe ist; folglich ist

$$\frac{df(x)}{dx} - \varphi(x) = o.$$

äre dieses nicht der Fall, wäre z. B. $\frac{df(x)}{dx} - \varphi(x) = n$, so würde man, wie ch n angenommen werde, h doch stets so klein denken können, daß die in der obigen ng auf der rechten Seite des Ungleichheitszeichens mit h verschwindenden Größe noch ls n. ausfiele, was mit der Bedingung selbst in Widerstreit käme.

Man hat also

$$\frac{d\,f(x)}{dx} = \varphi(x) \text{ oder } d\,f(x) = \varphi(x)\,dx$$

mithin, wenn man integrirt, $f(x) = C + \int \varphi(x)\,dx$, und da $y = \varphi(x)$ ist, $f(x)$ $+ \int y dx$, wo $\varphi(x)$ eine durch die Kurve gegebene Gleichung und bekannte Funktio x und C eine Konstante bezeichnet, welche dergestalt bestimmt werden muß, daß das In für den Werth von $x = o$, Null werde, dem die Ordinate entspricht, von der an die gerechnet wird.

Es bleibt nun noch übrig, den Werth der Arealgröße der Fläche $f(\psi)$ für Winkelkoor zu ermitteln.

Es sei (Fig. 2.) OD der Radius vector $= r$ der Winkel, welchen derselbe m Abscissenare nach der Seite des Anfangspunktes zu beschreibt, $= \psi$, so ist der Radius ve eine Funktion des Winkels ψ, indem sich jener ändert, wenn sich der Winkel ψ ändert. also $r = \varphi(\psi)$ und es handelt sich also darum, den Inhalt der von den radii vectore und OE und dem Theile DE der Kurve CV eingeschlossenen Fläche $DOE = f(\psi)$ zu besti Man denke sich den Winkel ψ um den Winkel $\varrho = EOG$ wachsend, so wird die Fläche $= f(\varphi + \varrho)$ und die Fläche $EOG = DOG - DOE = f(\psi + \varrho) - f(\psi)$. Nun man sich die radii vectores wachsend und mit EO als Radius den Radius GO in schnitten, so daß $OH = OE$, und mit OG den Radius OE in M geschnitten, so da $= OG$ wird. Es ist nun $OEG > OEH$, und da $OEH = \frac{OE^2 . \varrho}{2} = \varphi(\psi)^2 . \frac{\varrho}{2}$

$f(\psi + \varrho) - f(\psi) > \frac{\varrho}{2} . \varphi(\psi)^2$, dagegen $f(\psi + \varrho) - f(\psi) < \frac{\varrho}{2} . (\varphi(\psi +$

mithin ist auch

$$f(\psi + \varrho) - f(\psi) - \frac{\varrho}{2}\varphi(\psi)^2 < (\varphi(\psi + \varrho)^2 - \varphi(\psi)^2)\frac{\varrho}{2},$$

mithin auch mit Anwendung des Taylor'schen Satzes:

$$\frac{d\,f(\psi)}{d\psi} \cdot \varrho + \frac{d^2 f(\psi)}{d\psi^2} \cdot \frac{\varrho^2}{2!} + \ldots\ldots - \varphi(\psi)^2 \cdot \frac{\varrho}{2} < \frac{d\,\varphi(\psi)^2}{d\psi} \cdot \varrho$$

$$+ \frac{d^2\,\varphi(\psi)^2}{d\psi^2} \cdot \frac{\varrho^2}{2!} + \ldots\ldots$$

$$\text{oder } \left(\frac{d\,\varphi(\psi)^2}{d\psi} - \tfrac{1}{2}\varphi(\psi)^2\right)\varrho + \frac{d^2 f(\psi)}{d\psi^2} \cdot \frac{\varrho^2}{2!} + \ldots\ldots < \frac{d\,\varphi(\psi)^2}{d\psi}$$

$$+ \frac{d^2\,\varphi(\psi)^2}{d\psi^2} \cdot \frac{\varrho^2}{2!} + \ldots\ldots$$

und wenn man $\varrho = o$ annimmt, so wird

$$\frac{d\,f(\psi)}{d\psi} - \tfrac{1}{2}\varphi(\psi)^2 = o, \text{ oder } \frac{d\,f(\psi)}{d\psi} = \tfrac{1}{2}\varphi(\psi)^2$$

Integrirt man den letzten Ausdruck, so erhält man

$f(\psi) = \frac{1}{2}\int \varphi(\psi)^2 d\psi + C$, und da $r = \varphi(\psi)$, so ist $f(\psi) = \frac{1}{2}\int r^2 . d\psi$

dasselbe Resultat findet man, wenn man in der oben entwickelten Gleichung

$$f(x) = \int y\,dx + C = \int dx \cdot \int_0^y dy$$

nkeligen Koordinaten x und y auf die Polar- oder Winkelkoordinaten zurückführt. nlich $x = -r \cdot \cos\psi$ und $y = r \cdot \sin\psi$; dabei ist die Integration von y un- on x. Da $x = -r \cdot \cos\psi$, so ist $\cos\psi = -\frac{x}{r}$ und $\sin\psi = \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}$,

$= r\sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}$, folglich $dy = dr\sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} + r\,d\sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}$

$$\text{oder } dy = \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} \cdot dr + \frac{r \cdot d\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)}{2\sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}}$$

$$\cdot \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} + \frac{\frac{x^2}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}}\right) = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}}; \text{ also auch, weil}$$

$) = \int dx \cdot \int_0^y dy$, $f(x) = \int dx \cdot \int \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}}$ und daher

$$\frac{d\,f(x)}{dr} = \int dx \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}} \text{ und weil}$$

$= \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}$, so ist $\frac{d\,f(x)}{dr} = \int \frac{dx}{\sin\psi}$. Da aber $dx = r \cdot \sin\psi \cdot d\psi$,

$\frac{f(x)}{dr} = \int r\,d\psi$ und $\frac{d^2 fx}{dr^2 d\psi} = r$, mithin $\frac{d\,f(x)}{d\psi} = \int r\,dr = \frac{r^2}{2}$, also

n integrirt, $f(x) = \frac{1}{2}\int r^2 d\psi + C$

Dieses ist ganz dasselbe Resultat, was schon oben gefunden worden ist.
Wir wollen nun im Folgenden die gefundenen Resultate auf einige der bekannten Kurven n, und zwar:

1) Auf den Kreis.

Bei demselben sehe man das Centrum desselben als Anfangspunkt der Koordinaten an eichne den Radius mit m, so ist die Gleichung für den Kreis bekanntlich

$$y = \sqrt{m^2 - x^2} = m\sqrt{1 - \frac{x^2}{m^2}}$$

Die allgemeine Formel für den Inhalt einer Fläche in Bezug auf rechtwinkelige
dinaten war nun: $f(x) = \int ydx + C$; also, wenn man die Konstante einstweilen unberück
läßt, $f(x) = \int ydx$, daher $f(x) = \int mdx \sqrt{1 - \frac{x^2}{m^2}}$

Setzt man nun $\frac{x}{m} = \sin \varphi$, also $x = m \cdot \sin \varphi$ und $dx = m \cos \varphi$,
so erhält man: $f(x) = \int m \cdot \cos \varphi \cdot dx = \int m^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot d\varphi$, und da cos
$\sqrt{\frac{1 + \cos 2\varphi}{2}}$, $f(x) = m^2 \int d\varphi \cdot \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2}\right) = m^2 \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right)$

Da nun $\frac{x}{m} = \sin \varphi$, so ist $\varphi = \cdot \text{arc} \left(\sin = \frac{x}{m}\right)$ und sin 2

$2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi = 2 \frac{x}{m} \sqrt{1 - \frac{x^2}{m^2}} = 2 \cdot \frac{x}{m^2} \sqrt{m^2 - x^2}$

Substituirt man diese Werthe für φ und sin 2 φ in die erhaltene Gleichung für
so kommt:

$$f(x) = \frac{m^2}{2} \cdot \text{arc} \left(\sin = \frac{x}{m}\right) + \frac{x}{2} \sqrt{m^2 - x^2} + C$$

Um nun die Konstante C zu bestimmen, muß die Abscisse gegeben sein, von welc
die Fläche gerechnet werden soll. Bezeichnet man diese mit b, für welche die Fläche =
so hat man:

$$o = \frac{m^2}{2} \cdot \text{arc.} \left(\sin = \frac{b}{m}\right) + \frac{b}{2} \sqrt{m^2 - b^2} + C$$

Eliminirt man zwischen und mittelst beider Gleichungen die Konstante C, so entf

$$f(x) = \frac{m^2}{2} \left(\text{arc.} \left(\sin = \frac{x}{m}\right) - \text{arc.} \left(\sin = \frac{b}{m}\right) \right) + \frac{x}{2} \sqrt{m^2} - \frac{b}{2} \sqrt{m^2 - b^2}$$

Dieses ist der allgemeine Ausdruck für die Fläche beim Kreise von einem Punkte
Abscisse = b ist, an gerechnet bis zu einem Punkte, dessen Abscisse = x selbst ist
(Fig. 3.) von der Fläche DEGH, wenn CE = b und CH = x bezeichnet.

Rechnet man die Fläche vom Mittelpunkte an, für welchen die Abscisse b = o
wird die Gleichung folgende:

$$f(x) = \frac{m^2}{2} \left\{ \text{arc.} \left(\sin = \frac{x}{m}\right) + \frac{x}{2} \sqrt{m^2 - x^2} \right\}$$

z. B. von der Fläche CHGY, wenn CH = x ist.

Setzt man x = m, so erhält man $f(x) = \frac{m^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = {}^1/_4 \, m^2 \pi$ als V

eninhalt eines Quadranten und nimmt man diese 4mal, so erhält man $f(x) = m^2\pi$
us der Elementargeometrie bekannten Werth für den Flächeninhalt eines Kreises.
endet man statt der rechtwinkeligen Koordinaten die Polarkoordinaten an, so ist

$$f(x) = \int \frac{r^2 d\psi}{2}$$

hier beim Kreise der Radius $r = m$ konstant und deshalb von ψ unabhängig ist,
den Kreis

$$f(x) = \frac{m^2}{2} \int d\psi = \frac{m^2 \varphi}{2}$$

nte Gleichung für den Sektor des Kreises, dessen Centriwinkel $= \psi$ ist. Ist $\psi = o$,
$) = o$; ist dagegen $\psi = 2\pi$, so ist $f(x) = m^2\pi$ der Werth für den Inhalt
läche.

2) Auf die Parabel.

rabel wird im Allgemeinen jede Kurve und Linie genannt, für welche irgend eine
s sei ganze oder gebrochene, Potenz der Ordinate gleich ist dem Produkte der Abscisse
eine gegebene konstante Zahl (Parameter genannt); oder in Zeichen: — jede Kurve, deren
die Form hat $y^n = px$, wo x die Abscisse, y die Ordinate und p den Parameter
wofern nur n positiv ist. Wenn $n = 2$ ist, so ist $x^2 = px$, und die quadratische
alsdann diejenige, welche zu den Kegelschnitten bekanntlich gehört und auch den Na-
Apollonischen Parabel führt. Ist $n = 3$, so heißt die Parabel eine kubische, und ist
eine biquadratische u. s. w. Was nun die Quadratur der Parabel im Allgemeinen
hat man, da in Folge der allgemeinen Gleichung $y^n = px$, $y = p^{1/n} \cdot x^{1/n}$ ist,

$$f(x) = \int ydx = p^{1/n} \int x^{1/n} dx$$

$$f(x) = p^{1/n} \cdot \frac{x^{1/n+1}}{1/n+1} + C = \frac{np^{1/n}}{n+1} \cdot x^{1/n+1} + C$$

$y = p^{1/n} \cdot x^{1/n}$, so erhält man $f(x) = \frac{n}{n+1} \cdot xy + C$

mmt man nun die Konstante C dergestalt, daß für $x = o$, auch die Fläche gleich
o ist die Konstante $C = o$, mithin ist

$$f(x) = \frac{n}{n+1} \cdot xy$$

den Theil der parabolischen Fläche AGDC, wo $AC = x$ und $DC = y$ ist

Zieht man von derselben das Dreieck ADC ab, so erhält man, weil $\measuredangle$ ADC = 1 ist, als Werth für den Inhalt des paraboliſchen Segments

$$AGD = \left(\frac{n}{n+1} - {}^1/_2\right) xy = \frac{n-1}{n+1} \cdot xy$$

Es bleibt nun noch übrig, die Größe der paraboliſchen Fläche zu beſtimmen, zwiſchen zwei radii vectores enthalten iſt, die aus dem Brennpunkte B der Parabel gedacht werden. Bezeichnet A den Scheitelpunkt der Parabel (Fig. 4) und B den Anpunkt der Koordinatenaxen, ſo iſt, wenn BG und BH radii vectores ſind,

$BGH = \int \frac{r^2 d\varphi}{2}$, wenn φ den Winkel bezeichnet, den BG mit AB bildet.

Soll von der Apolloniſchen Parabel die Rede ſein, ſo iſt, weil deren Gleichung y^2 iſt, $y = p^{1/2} x^{1/2}$. Betrachtet man nun B als Anfangspunkt der Koordinate, ſo ſin Koordinaten $x^1 = x - {}^1/_4 p$ und $y^1 = y$ und da $x^1 = -r \cdot \cos\varphi$ und $y^1 = r$ ſo iſt $x = {}^1/_4 p - r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$

Da nun $y^2 = px$, ſo iſt $r^2 \cdot \sin^2\varphi = {}^1/_4 p^2 - pr\cos\varphi$; daher $r^2 \sin^2\varphi + pr\cos\varphi =$

Da aber $\sin\varphi = 2\sin {}^1/_2\varphi \cdot \cos {}^1/_2\varphi$ und $\cos\varphi = \cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2$

ſo iſt $4r^2 \sin^2 {}^1/_2\varphi \cdot \cos^2 {}^1/_2\varphi + pr\left(\cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2 {}^1/_2\varphi\right) = {}^1/_4 p^2$

$$\text{oder } r^2 + \frac{p \cdot \left(\cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2 {}^1/_2\varphi\right)}{4\sin^2 {}^1/_2\varphi \cdot \cos^2 {}^1/_2\varphi} \cdot r = \frac{\frac{1}{16} p^2}{\sin^2 {}^1/_2\varphi \cdot \cos^2 {}^1/_2\varphi}$$

Sucht man aus dieſer quadratiſchen Gleichung den Werth von r, ſo erhält man

$$r = -\frac{p}{8} \cdot \frac{\cos^2 {}^1/_2\varphi - \sin^2 {}^1/_2\varphi}{\sin^2 {}^1/_2\varphi \cdot \cos^2 {}^1/_2\varphi} \pm {}^1/_4 p \sqrt{\frac{1}{\sin^2 {}^1/_2\varphi \cdot \cos^2 {}^1/_2\varphi} + {}^1/_4 \frac{(\cos^2 {}^1/_2\varphi - si}{\sin^2 {}^1/_2\varphi \cdot c}}$$

oder

$$r = -\frac{p}{8} \cdot \frac{\cos^2 {}^1/_2\varphi - \sin^2 {}^1/_2\varphi}{\sin^2 {}^1/_2\varphi \cdot \cos^2 {}^1/_2\varphi} \pm {}^1/_4 p \sqrt{\frac{4\sin^2 {}^1/_2\varphi \cdot \cos^2 {}^1/_2\varphi + (\cos^2 {}^1/_2\varphi - \sin}{4\sin^4 {}^1/_2\varphi \cdot \cos^4 {}^1/_2\varphi}}$$

$$= -\frac{p}{8}\left(\frac{\cos^2 {}^1/_2\varphi - \sin^2 {}^1/_2\varphi}{\sin^2 {}^1/_2\varphi \cdot \cos^2 {}^1/_2\varphi} \mp \frac{\cos^2 {}^1/_2\varphi + \sin^2 {}^1/_2\varphi}{\sin^2 {}^1/_2\varphi \cdot \cos^2 {}^1/_2\varphi}\right)$$

Zieht man den letzteren Ausdruck zuſammen, ſo iſt

$$r = -\frac{p}{8} \cdot \frac{-2\sin^2 {}^1/_2\varphi}{\sin^2 {}^1/_2\varphi \cdot \cos^2 {}^1/_2\varphi} = \frac{p}{4\cos^2 {}^1/_2\varphi}$$

Da nun $\cos {}^1/_2\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 {}^1/_2\varphi}}$, ſo iſt $r = {}^1/_4 p\left(1 + tg^2 {}^1/_2\varphi\right)$

Da $f(x) = \int \frac{r^2 d\varphi}{2}$, ſo iſt $f(x) = \int {}^1/_{32} p^2 (1 + tg^2 {}^1/_2\varphi)^3 d\varphi$

t man nun der Kürze wegen $tg^1/_2\varphi = t$, so ist, wenn man differenziirt, $\frac{^1/_2 d\varphi}{\cos^2 {}^1/_2\varphi} = dt$.

ferner $\cos^2 {}^1/_2\varphi = \frac{1}{1 + tg^2 {}^1/_2\varphi} = \frac{1}{1 + t^2}$, so ist $d\varphi = \frac{2\,dt}{1 + t^2}$, daher

$+ tg^2 {}^1/_2\varphi)^2\, d\varphi = 2\,dt\,(1 + t^2)$

$x) = {}^1/_{32}\, p^2 \int (1 + tg^2 {}^1/_2\,\varphi)^2\, d\varphi = {}^1/_{16}\, p^2 \int (1 + t^2)\, dt$

$= {}^1/_{16}\, p^2 \left(t + \frac{t^3}{3}\right) + C = {}^1/_{16}\, p^2 \left(tg\ {}^1/_2\ \varphi + \frac{tg^3\ {}^1/_2\ \varphi}{3}\right) + C$

oll nun die Fläche von dem radius vector an gerechnet werden, für welchen φ den Werth φ^1 annimmt, so ergibt sich daraus die Bedingung

$$o = \frac{p^2}{16}\left(tg\ {}^1/_2\ \varphi^1 + \frac{tg^3\ {}^1/_2\ \varphi^1}{3}\right) + C$$

iminirt man C zwischen den beiden Gleichungen, so entsteht

$$(x) = \frac{p^2}{16}\left(tg\ {}^1/_2\ \varphi - tg\ {}^1/_2\ \varphi^1 + {}^1/_3\ (tg^3\ {}^1/_2\ \varphi - tg^3\ {}^1/_2\ \varphi^1)\right)$$

: den Inhalt der paraboliſchen Fläche BGH, wo Winkel ABH $= \varphi$ und Winkel φ^1 bezeichnet (Fig. 4).

echnet man dagegen die Fläche vom Scheitelpunkte der Parabel A an, so iſt $\varphi^1 = o$, $tg^1/_2\varphi^1 = o$; für dieſen Fall hat man:

$$f(x) = \frac{p^2}{16}\ (tg\ {}^1/_2\ \varphi + {}^1/_3\ tg^3\ {}^1/_2\ \varphi)$$

: den Inhalt der Fläche AGHB, wo ABH $= \varphi$ iſt.

3) Quadratur der Ellipſe.

ſoll die Größe eines Theiles der Ellipſe beſtimmt werden, welcher zwiſchen der Axe und rdinaten enthalten iſt. Es ſei der Mittelpunkt der Ellipſe der Anfangspunkt der tenaxen, 2a die große und 2b die kleine Axe, ſo iſt bekanntlich die Gleichung der lsdann:

$$^2 = \frac{b^2}{a^2}\ (a^2 - x^2) = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \text{ und } y = b\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}$$

Nun iſt $f(x) = \int y\,dx$, alſo für die Ellipſe $fx = b\int \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} \cdot dx$

zt man $\frac{x}{a} = \cos\alpha$, alſo $dx = -a \cdot \sin\alpha \cdot d\alpha$, ſo entſteht $fx = -ab\int \sin^2\alpha \cdot d\alpha$

und da $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$, so ist $f(x) = ab \int \frac{\cos 2\alpha - 1}{2} d\alpha = \frac{ab}{2} \int (\cos 2\alpha$

und wenn man integrirt

$$f(x) = \frac{ab}{2} \left(\frac{\sin 2\alpha}{2} - \alpha \right) + C \text{ oder}$$

$$f(x) = \frac{ab}{2} (\sin \alpha \cdot \cos \alpha - \alpha) + C$$

Es war aber $\frac{x}{a} = \cos \alpha$, also $\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ und $\alpha = \text{arc.} \left(\cos =$

mithin ist $f(x) = \frac{ab}{2} \left(\frac{x}{a} \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} - \text{arc.} \left(\cos = \frac{x}{a} \right) \right)$

Dieses Integral von $x = -a$ bis $x = +a$ gibt die Hälfte der elliptischen nämlich:

für $x = -a$ wird $f(x) = -\frac{ab\pi}{2}$ und

für $x = +a$ wird $f(x) = o$

daher ist die halbe Fläche der Ellipse $= \frac{ab\pi}{2}$ und mithin die ganze Fläche derselben =

Soll dagegen der Inhalt eines Theiles der Ellipse, der zwischen den radii vector geschlossen ist, gefunden werden, so geschieht dies, wie folgt.

Die Gleichung der Ellipse aus dem Mittelpunkte derselben ist bekanntlich $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2}$

Verlegt man den Anfangspunkt der Koordinaten in den Brennpunkt der Ellipse und be die Excentricität mit c, so hat man, insofern die neuen Koordinaten durch x^1 und y^1 da werden, $x = x^1 - c$ und $y = y^1$. Nun denke man sich einen radius vector mi zeichnet und β als den Winkel, welchen er mit der Abscissenaxe bildet, so ist $x^1 = -r \cdot$ $y^1 = r \cdot \sin \beta$, also $x = -r \cdot \cos \beta - c$ und $y = r \sin \beta$. Substituirt ma Werthe in die Gleichung der Ellipse, so erhält man

$$r^2 \sin^2 \beta = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - (r \cos \beta + c)^2) = b^2 - (r^2 \cos^2 \beta + c^2 + 2 rc \cos \beta$$

Wenn man nun setzt $\frac{c}{a} = e$ und $\frac{b^2}{a} = p$, so entsteht durch die Auflös Gleichung nach r:

$$r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos \beta}$$

Nun ist ganz allgemein die Größe der Fläche, welche zwischen zwei radii vecto geschlossen ist, $f(x) = \int \frac{r^2 d\beta}{2} + C$

Setzt man mithin für r seinen Werth, so ist

$$f(x) = \frac{p^2}{2} \int \frac{d\beta}{(1 + e \cdot \cos \beta)^2}$$

ingt man zum Behufe der Integrirung dieses Ausdrucks $\frac{1}{2}\beta$ an die Stelle von β,
ürlich $\cos\beta = \cos^2 \frac{1}{2}\beta - \sin^2 \frac{1}{2}\beta$, folglich $1 + e \cdot \cos\beta = 1 + e \cdot \cos^2 \frac{1}{2}\beta$
$^2 \frac{1}{2}\beta = \cos^2 \frac{1}{2}\beta + \sin^2 \frac{1}{2}\beta + e \cdot \cos^2 \frac{1}{2}\beta - e \cdot \sin^2 \frac{1}{2}\beta$
$e) \cos^2 \frac{1}{2}\beta + (1-e) \sin^2 \frac{1}{2}\beta = (1+e) \cos^2 \frac{1}{2}\beta \left(1 + \frac{1-e}{1+e} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\beta\right)$

ßt man nun $\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\beta = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma$

$+ e \cdot \cos\beta = (1+e) \cos^2 \frac{1}{2}\beta \cdot \sec^2 \frac{1}{2}\gamma = \frac{(1+e) \cdot \cos^2 \frac{1}{2}\beta}{\cos^2 \frac{1}{2}\gamma}$

ferenzirt man ferner den Ausdruck

$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$, so entsteht:

$\frac{\frac{1}{2} d\gamma}{\cos^2 \frac{1}{2}\gamma} = \frac{\frac{1}{2} d\beta}{\cos^2 \frac{1}{2}\beta} \cdot \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$ und daraus

$d\beta = \frac{d\gamma \cdot \cos^2 \frac{1}{2}\beta}{\cos^2 \frac{1}{2}\gamma} \cdot \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$, also

$\frac{d\beta}{(1 + e \cdot \cos\beta)^2} = \frac{d\gamma \cdot \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \cos^2 \frac{1}{2}\gamma}{(1+e)^2 \cdot \cos^2 \frac{1}{2}\beta}$ (⊙)

nun $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma$, so ist

$1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\beta = 1 + \frac{1+e}{1-e} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\gamma$ oder

$\frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}\beta} = 1 + \frac{1+e}{1-e} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\gamma$

ein Werth in die Gleichung (⊙) substituirt, gibt

$\frac{d\gamma \cdot \cos^2 \frac{\gamma}{2} \cdot \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}}{(1+e)^2 \cdot (1-e)} (1 - e + (1+e) \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\gamma)$

$= \frac{d\gamma \cdot \cos^2 \frac{\gamma}{2}}{(1+e)^{3/2} \cdot (1-e)^{3/2}} (1 - e + (1+e) \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\gamma)$

$= \frac{d\gamma \left(\cos^2 \frac{\gamma}{2} - e \cdot \cos^2 \frac{\gamma}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} + e \cdot \sin^2 \frac{\gamma}{2}\right)}{(1-e^2)^{3/2}}$

$\frac{d\gamma \left(1 - e \left[\cos^2 \frac{\gamma}{2} - \sin^2 \frac{\gamma}{2}\right]\right)}{(1-e^2)^{3/2}} = \frac{d\gamma (1 - e \cdot \cos\gamma)}{(1-e^2)^{3/2}}$

Integrirt man diesen Ausdruck, so erhält man:

$$\int \frac{d\beta}{(1 + e \cdot \cos\beta)^2} = \int \frac{d\gamma}{(1 - e^2)^{3/2}} (1 - e \cdot \cos\gamma) = \frac{\gamma - e \cdot \sin\gamma}{(1 - e^2)^{3/2}}$$

also auch $\frac{p^2}{2} \int \frac{d\beta}{(1 + e \cdot \cos\beta)^2} = \frac{p^2}{2(1 - e^2)^{3/2}} (\gamma - e \cdot \sin\gamma)$

oder $f(x) = \frac{p^2}{2(1 - e^2)^{3/2}} (\gamma - e \cdot \sin\gamma) + C$, wobei γ gegeben ist

$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta \cdot \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}}$ und $\gamma = 2 \operatorname{arc.} \left(\operatorname{tg} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta \cdot \sqrt{\frac{1 -}{1 +}}\right.$

Rechnet man hierbei die Fläche von der großen Axe der Ellipse und zwar von dem Punkte an, für welchen $\beta = o$, so ist die Fläche $f(x) = o$ für $\beta = o$. Da nun, $\beta = o$, auch $\gamma = o$ ist, so hat man unter dieser Annahme für die Bestimmung der Kon die Bedingung, daß für $\gamma = o$ auch die Fläche $f(x) = o$ sein muß, mithin ist auch C dadurch geht die Gleichung für die Fläche in diesem Falle über in

$$f(x) = \frac{p^2}{2(1 - e^2)^{3/2}} (\gamma - e \cdot \sin\gamma)$$

Ist $\beta = \pi$, so ist $\gamma = \pi$; also $f(x) = \frac{p^2 \pi}{2(1 - e^2)^{3/2}}$ als Werth für die Fläche der Ellipse, also für die ganze Fläche $\frac{p^2 \pi}{(1 - e^2)^{3/2}}$

4) Quadratur der Hyperbel.

Hyperbel im allgemeinsten Sinne wird jede Kurve genannt, welche, wenn sie auf winkelige Koordinaten bezogen wird, bestimmt wird durch eine Gleichung $x^m y^n = p$, und n positive Größen bezeichnen. Ist $m = n$, folglich die Gleichung $xy = p^{1/n}$, so gibt diese die gewöhnliche, gleichseitige oder Apollonische Hyperbel. In allen übrigen heißt die Hyperbel von einer höheren Ordnung. Da nun ganz allgemein $y = \frac{p^{1/n}}{x^{m/n}}$, $x = o$, $y = \infty$ und je größer x wird, desto kleiner wird y, so daß für $x = \infty$, $y = o$ wird. Bezeichnet daher AX die Abscissenaxe und AY die Ordinatenaxe und A Anfangspunkt beider, so hat bekanntlich die Kurve für dieselben eine solche Lage, daß den beiden Axen immer mehr nähert, ohne dieselben jemals zu erreichen. Diese Linien daher die Asymptoten der Hyperbel und die obige Gleichung für dieselbe ist also auf die ten bezogen.

bstituirt man nun in die allgemeine Gleichung $f(x) = \int y dx + C$ für y den

$\frac{{}^{1/n}}{{}^{m/n}}$, so ist $f(x) = p^{1/n} \int x^{-m/n} dx + C$, und wenn man integrirt,

$\frac{p^{1/n} x^{-m/n+1}}{-m/n+1} + C$, mit Ausnahme des Falles, wo $m/n = 1$ oder $m = n$ ist.

n den gefundenen Ausdruck noch um, so ist

$$f(x) = \frac{np^{1/n} \cdot x^{-m/n+1}}{n-m} + C$$

oll nun die Fläche von $x = d$ an gerechnet werden, so hat man die Bedingung

$$o = \frac{np^{1/n} \cdot d^{-m/n+1}}{n-m} + C$$

ird aus beiden Gleichungen die Konstante entfernt, so ist

$$f(x) = \frac{np^{1/n}}{n-m} (x^{-m/n+1} - d^{-m/n+1})$$

etzt man nun für d den Werth Null, d. h. rechnet man die Fläche von dem Anfangs-
: Abscissen A an, so erhält man

$$f(x) = \frac{np^{1/n}}{n-m} \left(x^{\frac{n-m}{m}} - o^{\frac{n-m}{m}}\right)$$

a nun $o^{\frac{n-m}{m}}$ entweder 0 oder ∞ ist, je nachdem $n > m$ oder $n < m$ ist, so

$$f(x) = \frac{np^{1/n}}{n-m} \left(x^{\frac{n-m}{m}} - o\right) \text{ für } n > m$$

$$\text{und } f(x) = \frac{np^{1/n}}{n-m} \left(x^{\frac{n-m}{m}} - \infty\right) \text{ für } n < m$$

t also $n < m$, so ist die Fläche, wie klein auch x gedacht werde, stets unendlich,
für $n > m$ endlich wird und zwar mit $x = o$, selbst Null.
etrachtet man wiederum die allgemeine Gleichung für die Fläche

$$f(x) = \frac{np^{1/n}}{n-m} \left(x^{\frac{n-m}{m}} - d^{\frac{n-m}{m}}\right)$$

Fläche von $x = d$ bis $x = x$ begreift, und setzt darin $x = \infty$ so kommt

$$f(x) = \frac{np^{1/n}}{n-m} \left(\infty^{\frac{n-m}{m}} - d^{\frac{n-m}{m}}\right)$$

a nun $\infty^{\frac{n-m}{m}}$ entweder ∞ oder 0 ist, je nachdem $n > m$ oder $n < m$ ist,
man $f(x) = \infty$ für $n > m$ und

$$fx = -\frac{np^{1/n}}{n-m} \cdot d^{\frac{n-m}{m}} \text{ für } n < m$$

Hieraus folgt also, daß, wofern n und m von einander verschieden sind, von den asymptotischen Räumen AYMQ und MQX (Fig. 5.) stets einer endlich und der ande endlich sein wird. Ersterer ist endlich und letzterer unendlich, wenn $n > m$, ersterer ist hi unendlich und letzterer endlich, wenn $n < m$ ist.

Ist dagegen $n = m$, also die Hyperbel eine gleichseitige oder Apollonische, so allgemeine Gleichung für die Fläche $f(x) = v \int x^{-1} dx + C$ oder $(fx) = vlg$

Soll die Fläche von $x = d$ an gerechnet werden, so ist $o = vlgd + C$ und man die Konstante weg, so ist $f(x) = v \cdot lg \frac{x}{d}$

Setzt man $d = o$, d. h. rechnet man die Fläche vom Anfangspunkte der Koordin an, so hat man $f(x) = \infty$, wie klein auch x genommen wird. Gibt man aber d ein lichen Werth und setzt $x = o$, so ist die Fläche $f(x) = -\infty$, was auch für d angen werde. Daher sind in diesem Falle beide asymptotische Räume unendlich.

Von der Rektifikation der Kurven.

Wenn man (Fig. 6.) die beiden Endpunkte B und C eines konkaven Bogens du gerade Linie BC mit einander verbindet und in den Punkten B und C an denselb Tangenten BG und CF legt, die einander im Punkte H schneiden, so ist bekanntlich de BC > chord. BC und < BH + HC. Bezeichnet nun AX die Abscissenaxe, und E CE die Ordinaten der beiden Endpunkte des Bogens BC, und verlängert man ferner dinaten und Tangenten, bis sie einander durchschneiden in den Punkten F und G, so kan gewiesen werden, daß, wofern die Ordinaten von B bis C beständig wachsend oder abnehmend so die Länge des Bogens BC größer als der zwischen den beiden Ordinaten liegende T einen Tangente und kleiner als der zwischen eben diesen Ordinaten enthaltene andere T Tangente, d. h. daß arc. BC > oder < CF und arc. BC < oder > BG ist. D vorausgesetzt wird, daß die Ordinaten von B bis C beständig wachsend oder beständig ab fortgehen, so wird der Winkel, welchen die Tangente und Ordinate an jedem Punkte de mit einander einschließen und der ein veränderlicher ist, sich innerhalb dieses Intervalls um so viel verändern können, daß derselbe an dem einen Endpunkte ein stumpfer sei, w an dem andern Endpunkte ein spitzer ist. Denn um von einem spitzen Winkel z stumpfen überzugehen, muß es innerhalb des Intervalls einen Winkel geben, der gleich wo also die Tangente mit der Abscissenaxe parallel ist. Nun ist die trigonometrische des Winkels, welchen die Ordinate mit der Tangente bildet $\frac{dx}{dy}$. In diesem Falle also $\frac{dx}{dy} = tg\ 90^\circ = \infty$, daher $dy = o$ und folglich y gleich einem Maxim

n, in so fern die Kurve in diesem Punkte keine Inflexion erleidet. Da nun aber aus- angenommen wird, daß die Kurve durch das ganze Intervall keine Inflexion erleidet, in diesem Punkte ein Maximum oder Minimum sein müssen. Da nun ferner vor- wird, daß y entweder stets beständig wachsend oder beständig abnehmend fortschreitet, eder den Werth eines Maximum noch den eines Minimum erreicht, so wird auch der nes Winkels für einen Punkt zwischen B und C niemals 90° und daher der eine jener icht stumpf sein können, wenn der andere ein spitzer ist. Nimmt man also an, daß der BG = BGC spitz sei, so wird der Winkel GCI = FCE nicht größer als 90° und nkel BFC = FCG nicht kleiner als 90° sein können. Da also unter dieser An- inkel HCG > HGC, eben weil in dem Dreieck HCG nur ein Winkel größer als kann, so wird HG > HC, folglich wird HG + BH > HC + BH oder weil BH = BG, BG > HC + BH. Nun ist aber HC + BH > arc. BC, um so BG größer als arc BC.

us demselben Grunde ist ⌊ BGC > ⌊ FBC, daher ist chord. BC > FC. Es rc. BC > chord. BC; also ist auch arc. BC > FC.

ieses vorausgesetzt, stelle KBCL eine beliebige Kurve, AX die Abscissen- und AY die are für rechtwinkelige Koordinaten vor. Die Gleichung für die Kurve sei ganz all- = $\varphi(x)$, wo x die Abscissen, y die Ordinaten bezeichnet, B sei ein bestimmter, jedoch nz beliebiger Punkt der Kurve, dessen Abscisse AD = x und Ordinate BD = y i ein anderer Punkt der Kurve, dessen Abscisse AE = x + h und Ordinate = $\varphi(x + h)$.

bei soll der Bogen KBCL als konkav angenommen und die Ordinaten von B bis ändig wachsend betrachtet werden; alsdann ist arc BC > CF und < BG. Die Bogens werde mit $f(x)$ bezeichnet, so ist $f(x) = \alpha$ B.

$$f(x + h) = \alpha \text{ C}$$

$$\text{also BC} = f(x + h) - f(x)$$

ist aber $\text{CF} \sqrt{h^2 + \text{CM}^2}$ und da $\text{CM} = h \cdot \text{tg CFM} = h \cdot \frac{d\varphi(x+h)}{dx}$,

$= h \left(1 + \left(\frac{d\varphi(x + h)}{dx}\right)^2\right)^{1/2}$ und $\text{BG} = \sqrt{h^2 + \text{GN}^2}$ und

$\cdot \text{tg GBN} = h \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx}$ also $\text{BG} = h \left(1 + \left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)^2\right)^{1/2}$

n ist BC > CF und < BG; substituirt man daher diese Werthe für BC, CF und ält man

$$f(x + h) - f(x) > h \left(1 + \left(\frac{d\varphi(x + h)}{dx}\right)^2\right)^{1/2} \text{ und}$$

$$< h \left(1 + \left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)^2\right)^{1/2}$$

Nun ist $\frac{d\,\varphi(x+h)}{d\,x} = \frac{d\,\varphi(x)}{d\,x} + \frac{d^2\,\varphi(x)}{d\,x^2} \cdot h + \frac{d^3\,\varphi(x)}{d\,x^3} \cdot$

$$+ \frac{d^4\,\varphi(x)}{d\,x^4} \cdot \frac{h^3}{3!}, \text{ also}$$

$$\left(\frac{d\,\varphi(x+h)}{d\,x}\right)^2 = \left(\frac{d\,\varphi(x)}{d\,x}\right)^2 + \frac{2\,d\,\varphi(x)}{d\,x} \cdot \frac{d^2\,\varphi(x)}{d\,x} \cdot h$$

$$+ \frac{2\,d\,\varphi(x)}{d\,x} \cdot \frac{d^3\,\varphi(x)}{d\,x^3} \cdot \frac{h^2}{2!} + \ldots\ldots \left(\frac{d^2\,\varphi(x)}{d\,x^2}\right)^2 \cdot \frac{h^2}{2!} + \ldots$$

$$= \left(\frac{d\,\varphi(x)}{d\,x}\right)^2 + A_1\,h + A_2 \cdot h^2 + \ldots, \text{ also}$$

$$\left(1 + \left(\frac{d\,\varphi(x+h)}{d\,x}\right)^2\right)^{1/2} = \left(1 + \left(\frac{d\,\varphi(x)}{d\,x}\right)^2 + A_1\,h + A_2\,h^2 + \ldots\right.$$

$$= \left(1 + \left(\frac{d\,\varphi(x)}{d\,x}\right)^2\right)^{1/2} + B_1\,h + B_2\,h^2 + \ldots$$

und da $f(x+h) - f(x) = \frac{d\,f(x)}{d\,x} \cdot h + \frac{d^2\,f(x)}{d\,x^2} \cdot \frac{h^2}{2!} + \ldots$

so ist

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} \cdot h + \frac{d^2\,f(x)}{d\,x^2} \cdot \frac{h^2}{2!} + \ldots > h\left(1 + \left(\frac{d\,\varphi(x)}{d\,x}\right)^2\right)^{1/2} + B_1 h$$

$$\text{und} < h\left(1 + \left(\frac{d\,\varphi\,x}{d\,x}\right)^2\right)^{1/2}$$

Zieht man nun die untere Grenze auf beiden Seiten ab, so erhält man

$$\left(\frac{d\,f(x)}{d\,x} - \left(1 + \left[\frac{d\,\varphi(x)}{d\,x}\right]^2\right)^{1/2}\right) h + \frac{d^2\,f(x)}{d\,x^2} \cdot \frac{h^2}{2!} + \ldots$$

$> B_1\,h^2 + B_2\,h^3$ mit Rücksicht auf das algebraische Zeichen, oder

$$\left(\frac{d\,f(x)}{d\,x} - \left(1 + \left[\frac{d\,\varphi(x)}{d\,x}\right]^2\right)^{1/2}\right) h < \left(B_1 - \frac{d^2\,f(x)}{d\,x^2} \cdot \frac{1}{2!}\right) h^2 +$$

insofern man vom algebraischen Zeichen absieht. Dividirt man nun durch h, so hat

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} - \left(1 + \left(\frac{d\,\varphi(x)}{d\,x}\right)^2\right)^{1/2} < \left(B_1 - \frac{d^2\,f(x)}{d\,x^2} \cdot \frac{1}{2!}\right) h + B_2\,h^2$$

Da nun diese Bedingung stattfindet, wie klein auch h angenommen wird, klein angenommen werden kann, daß das Glied auf der rechten Seite kleiner wird, angebbare Größe, so hat man

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} - \left(1 + \left(\frac{d\,\varphi(x)}{d\,x}\right)^2\right)^{1/2} = 0 \text{ oder}$$

$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \left(1 + \left(\frac{d\,\varphi(x)}{d\,x}\right)^2\right)^{1/2}$ und indem man integrirt

$$f(x) = \int \left(1 + \left(\frac{d\,\varphi(x)}{d\,x}\right)^2\right)^{1/2} dx - C$$

etzt man nun $f(x) = s$, wo s die Länge des Bogens der Kurve bezeichnet, und
x), so ist

$$s = \int \left(1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2\right)^{1/2} d\,x + C, \text{ also}$$

$$d\,s = d\,x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2}$$

zeichnet man für das Polarkoordinatensystem den Radius vector mit r und den
welchen derselbe mit der Abscissenaxe bildet mit β, so hat man $x = -r \cdot \cos\beta$
$r \cdot \sin\beta$, und $dx = -dr \cdot \cos\beta + r \cdot \sin\beta \cdot d\beta$
und $dy = dr \cdot \sin\beta + r \cdot \cos\beta \cdot d\beta$

uadrirt man beide Gleichungen und addirt, so erhält man

$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 \cdot d\beta^2 = dr^2 \left(1 + r^2 \cdot \frac{d\,\beta^2}{d\,r^2}\right)$ oder

$$dx^2 \left(1 + \frac{d\,y^2}{d\,x^2}\right) = dr^2 \left(1 + r^2 \cdot \frac{d\,\beta^2}{d\,r^2}\right)$$

ıdicirt man, so ist

$$dx \sqrt{\left(1 + \frac{d\,y^2}{d\,x^2}\right)} = dr \sqrt{1 + r^2 \cdot \frac{d\,\beta^2}{d\,r^2}} = ds$$

irt man zuletzt, so bekommt man

$$s = \int dr \left(1 + r^2 \cdot \frac{d\,\beta^2}{d\,r^2}\right)^{1/2} + C$$

sigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1885. N:o 4.
Stockholm.

nversionen af en algebraisk integral såsom ut-ryck för roten till en algebraisk eqvation.

Af Göran Dillner.

[Meddeladt den 15 April 1885.]

II.

min afhandling med denna titel, som finnes införd i K. kademiens Öfversigt, 1883, n:o 6, har jag behandlat lös- af en allmän n:te grads eqvation hufvudsakligen ur syn- n af rötternas utveckling i potens- och produktserier med ning af vissa med $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ betecknade kritiska stäl- närvarande afhandling, som är att betrakta som en fort- g af den nyssnämnda, kommer jag att i korta grunddrag la det allmänna eqvationsproblemets öfverflyttning på ett rande integralproblem, hvaraf framgår, att rötternas ana- egenskaper bli tillgängliga i samma mån vi förstå att handla detta integralproblem; och omvändt, att den rätta lingen af detta integralproblem underlättas genom den om vi redan ega om rötternas analytiska egenskaper. all då ådagaläggas, att rötterna till en allmän n:te grads n uttryckas såsom inversioner af ett system integraler på t, att dessa inversioner framstå såsom hyperelliptiska, a, exponentiela och trigonometriska funktioner. Vidare ag visa, att öfvergången från en rot till en annan för- genom vissa förändringar, som dessa integraler undergå att låta funktionens $J_s(u)$ oberoende variabel u beskrifva

slingor om förgreningspunkterna $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$. Slutligen angifvas konvergensområdet för ifrågavarande inversioner veckling i potensserie, hvarvid nyssnämnda kritiska ställen g införande af en ny variabel befinnas eliminerade. — Vid visningarna betecknas den anförda afhandlingen från 1883 i

System af integraler, hvarpå lösningen af en al n:te grads eqvation beror.

1. Af den allmänna n:te grads eqvationen I (1) eller

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + \alpha = u$$

fås enligt I (6) & (7), då $b_1, \ldots, b_{n-1}$ utmärka de (n skilda rötterna till derivatan $P'(x) = 0$,

$$(1) \qquad \frac{dx}{du} = \frac{1}{P'(x)} = \frac{1}{n(x-b_1)\ldots(x-b_{n-1})}.$$

Då vi enligt I (8) sätta $P(b_r) = \beta_r$, erhålles den välbekan veckligen,

$$(2) \quad u - \beta_r = P(x) - P(b_r) = (x-b_r)^2 Q_r(x) \quad (r = 1, 2, \ldots,$$

der $Q_r(x)$ är ett polynom af graden $(n-2)$; då vi sätta utveckling under formen,

$$(3) \qquad (x-b_r)\sqrt{Q_r(x)} = \sqrt{u-\beta_r} \quad (r = 1, 2, \ldots, n-1)$$

samt införa produkten af dessa $(n-1)$ eqvationer i (1), följande differentialeqvation,

$$(4) \qquad \frac{dx}{\sqrt{Q_1(x)\ldots Q_{n-1}(x)}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{du}{\sqrt{(u-\beta_1)\ldots(u-\beta_{n-1})}}$$

hvars integral antar följande form,

$$(5) \qquad \int_{A_r}^{x} \frac{dx}{\sqrt{Q_1(x)\ldots Q_{n-1}(x)}} = \frac{1}{n} \int_{\beta_r}^{u} \frac{du}{\sqrt{(u-\beta_1)\ldots(u-\beta_{n-}}}$$

$$(r = 1, 2, \ldots, n-1),$$

der A_r utmärker ett af de $(n-1)$ skilda värdena på

mot $u = \beta_r$ i utvecklingen (2), och der $Q_1(x) \dots Q_{n-1}(x)$ en produkt af gradtalet $(n-1)\ (n-2)$.

Genom att förmedels multiplikation eller division kom- de $(n-1)$ eqvationerna (3) med differentialeqvationen s en mängd af differentialeqvationer, hvilkas integraler an- en lika stor mängd skilda sätt att bestämma relationer variablerna x och u. Af dessa integraler anmärka vi le:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{(x-b_1)\dots(x-b_{n-1})dx}{(x-b_r)\sqrt{Q_r(x)}} = \frac{1}{n}\int_{\beta_r}^{u} \frac{du}{\sqrt{u-\beta_r}} \quad (r=1,2,\dots,n-1);$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{(x-b_1)\dots(x-b_{n-1})Q_1(x)\dots Q_{n-1}(x)} =$$

$$= \int_{u_0}^{u} \frac{du}{(u-\beta_1)\dots(u-\beta_{n-1})},$$

och u_0 äro två mot hvarandra svarande värden i (2);

en,

$$\int_{A_r}^{x} \frac{(x-b_r)\sqrt{Q_r(x)}\,.\,dx}{(x-b_1)\dots(x-b_{n-1})Q_1(x)\dots Q_{n-1}(x)} =$$

$$= \int_{\beta_r}^{u} \frac{\sqrt{u-\beta_r}\,.\,du}{(u-\beta_r)\dots(u-\beta_{n-1})} \quad (r=1,2,\dots,n-1),$$

$_r$ har den i (5) angifna betydelsen och der nödig bråk- ning utföres.

i ha i det föregående framstält ett system af integraler, lösningen af en allmän eqvation af n:te graden beror. llmänna eqvationsproblemet har härigenom blifvit öfver- : på ett motsvarande integralproblem, så att rötternas ska egenskaper bli tillgängliga i samma mån våra hjelp- räcka till att beherrska det senare problemet.

Anm. I enlighet med I n:o 4, *anm.*, få vi, för $b_1 = \ldots$ stället för (2) följande utveckling, $u - \beta_1 = (x - \beta_1)^{\mu+1}$ der $Q_1(x)$ är af graden $n - (\mu + 1)$. Utvecklingen af emot svarande systemet integraler möter ingen svåri lemnas derför här åsido.

Öfvergång mellan rötterna af en allmän n:te eqvation genom de förändringar af motsvarand graler, som härflyta från slingor, beskrifna a förgreningspunkterna $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$.

3. Denna öfvergång grundar sig på följande sats[1]

Låt $J_1(u), \ldots, J_n(u)$ *vara de n variabla rötterna grads eqvationen* $P(x) = u$ *samt* $b_1, \ldots, b_{n-1}$ *de* $(n -$ *stanta och olika rötterna af derivatan* $P'(x) = 0$, *då föl* b_r *är en dubbel rot till eqvationen* $P(x) = \beta_r$ $(r = 1, 2, \ldots$ *låt vidare* $J_r(u)$ *och* $J_{r+1}(u)$ *utmärka de två rötter, s manfalla med dubbelroten* b_r *för* $u = \beta_r$; *jag säger då u beskrifvande en slinga om förgreningsstället* β_r *förändr tionerna* $J_r(u)$ *och* $J_{r+1}(u)$ *den ena i den andra, unde de öfriga* $(n - 2)$ *funktionerna* $J_s(u)$ *icke lida någon för*

Emedan funktionernas $J_1(u), \ldots, J_n(u)$ antal är p så följer, att en förändring af någon af dessa funktion kan ske på det sätt, att två af funktionerna förändras i den andra; emedan vidare funktionerna $J_1(u), \ldots,$ kontinuerliga och entydiga i alla punkter af planet ut greningspunkterna $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ (I, n:o 2—5), så inse sådan förändring endast kan ske i de punkter, der två funktioner, låt vara $J_r(u)$ och $J_{r+1}(u)$, sammanfalla me roten b_r, d. v. s. i punkten β_r $(r = 1, 2, \ldots, n - 1)$. vi låta u beskrifva en slinga om punkten β_r, så ege förändring med nödvändighet rum, under det att de öfrig af de med $J_s(u)$ betecknade funktionerna icke lida n ändring. Alltså är den framställda satsen bevisad.

[1]) Jemför den af PUISEUX behandlade teorien om de algebraiska f Journal de Liouville T. XV & XVI.

å vi låta u beskrifva summan af slingorna, som successivt
a de $(n-1)$ förgreningspunkterna $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$, så för-
$J_1(u)$ i $J_2(u)$, $J_2(u)$ i $J_3(u), \ldots, J_{n-1}(u)$ i $J_n(u)$. Häraf
följande två följdsatser:

Då vi låta u beskrifva summan af slingorna om för-
spunkterna $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$, *så förändras funktionen* $J_1(u)$
tionen $J_n(u)$ *efter att ha förändrats i de* $(n-2)$ *mellan-*
le funktionerna $J_s(u)$.

Då vi låta u beskrifva n gånger summan af slingorna
greningspunkterna $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$, *så förändras funktionen*
i sig sjelf efter att ha förändrats i de öfriga $(n-1)$
nerna $J_s(u)$.

Om vi utgå från den *principala* (envärdiga) integralen
ger i (5) samt antaga det deremot svarande värdet på x
principalrot till n:te grads eqvationen $P(x) = u$, så kunna
gt n:o 3 ur denna principalrot härleda de öfriga $(n-1)$
a genom att på behörigt sätt i (5) låta u beskrifva slin-
förgreningspunkterna $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$. Detsamma gäller om
n:o 2 behandlade integralerna. På detta sätt ha vi be-
t vårt eqvationsproblem till att finna en principalrot.
de öfriga rötterna framgå genom de förändringar af mot-
de integraler, som härflyta från slingor, beskrifna af u om
ingspunkterna $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$.

i behandla såsom exempel den kubiska eqvationen,

$$P(x) = x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + \alpha = u,$$

och b_2 äro rötter till den qvadratiska eqvationen

$$P'(x) = 3x^2 + 2a_1 x + a_2 = 0$$

$$\beta_r = P(b_r) \quad (r = 1, 2).$$

några välbekanta substitutioner antar nu integralen (5)
e form,

$$\int_A^X \frac{dX}{\sqrt{X^2 - A^2}} = \frac{1}{3} \int_B^U \frac{dU}{\sqrt{U^2 - B^2}},$$

eller efter utförd integration, då vi sätta,

$$V = \int_B^U \frac{dU}{\sqrt{U^2 - B^2}},$$

följande form,

$$\log \frac{X + \sqrt{X^2 - A^2}}{A} = \frac{1}{3} \log \frac{U + \sqrt{U^2 - B^2}}{B} = \frac{1}{3} V$$

hvilket resultat äfven kan skrifvas sålunda,

$$\log \frac{X - \sqrt{X^2 - A^2}}{A} = \frac{1}{3} \log \frac{U - \sqrt{U^2 - B^2}}{B} = -\frac{1}{3}$$

Af de två sista formlerna framgår nu lösningen,

$$\frac{2X}{A} = \left\{\frac{U + \sqrt{U^2 - B^2}}{B}\right\}^{1/3} + \left\{\frac{U - \sqrt{U^2 - B^2}}{B^2}\right\}^{1/3} = e^{1/3 V} +$$

För U och B reela samt vilkoret

$$B^2 > U^2$$

fås, då vi sätta

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{\sqrt{B^2 - U^2}}{U},$$

följande likhet, då $i = \sqrt{-1}$,

$$V = i\Theta,$$

hvadan den anförda lösningen antar formen,

$$X = A \cos \frac{1}{3}\Theta,$$

som motsvarar det välbekanta »casus irreductibilis». I ett enskildt fall gällande form af den kubiska eqvatio ning kan betraktas såsom giltig för alla förekommande vi låta V representera såväl reela som komplexa värd fästadt afseende på ofvan anförda substitutioner eller

$$X = x + \frac{1}{3}a_1\,, \quad A = b_1 - b_2 = 2\sqrt{\left(\frac{1}{3}a_1\right)^2 - \frac{1}{3}a_2}\,,$$

vi låta $J_1(u) = x$ representera den principala roten såvarande mot det principala värdet af integralen V, följresultat:

$$J_1(u) + \frac{1}{3}a_1 = 2\sqrt{\left(\frac{1}{3}a_1\right)^2 - \frac{1}{3}a_2}\,\cos\frac{1}{3}iV = A\cos\frac{1}{3}\Theta\,.$$

iakttaga, att integralen V, tagen mellan gränserna B $-B$), har värdet $i\pi$ eller

$$\int_{+B}^{-B} V = i\pi\,.$$

sätta nu

$$\Theta_1 = -\Theta + 2\pi\,,$$
$$\Theta^{(s)} = \quad \Theta + 2s\pi\,;$$

då låta u beskrifva en slinga om punkten β_1 eller, som amma, U om punkten $(-B)$, så förändras Θ i Θ_1, under t enligt n:o 3 roten $J_1(u)$ förvandlas i roten $J_2(u)$, enär två rötter sammanfalla med dubbelroten b_1 för $u = \beta_1$; är,

$$J_2(u) + \frac{1}{3}a_1 = A\cos\frac{1}{3}(-\Theta + 2\pi)\,.$$

derpå låta u beskrifva summan af slingorna om punk- β_1 och β_2 eller, som är detsamma, U beskrifva summan gorna om punkterna $(-B)$ och B, så förändras enligt Θ i $\Theta^{(1)}$ samt roten $J_1(u)$ i $J_3(u)$, enär de två rötterna ch $J_3(u)$ sammanfalla med dubbelroten b_2 för $u = \beta_2$; är

$$J_3(u) + \frac{1}{3}a_1 = A\cos\frac{1}{3}(\Theta + 2\pi)\,.$$

anmärka i öfverensstämmelse med n:o 3, att, då u be- r sin slinga om punkten β_1 och följaktligen rötterna $J_1(u)$ $_2(u)$ förändras den ena i den andra, så förändras icke $J_3(u)$, ehuru $\Theta^{(1)}$ förändras i $(-\Theta + 4\pi)$. Likaledes, då

u beskrifver sin slinga om punkten β_2 och följaktligen r
$J_2(u)$ och $J_3(u)$ förändras den ena i den andra, så fö
icke roten $J_1(u)$, ehuru Θ förändras i $(-\Theta)$.

Om vi slutligen i öfverensstämmelse med n:o 3 låta
skrifva 3 gånger summan af slingorna om punkterna β_1
så förändras roten $J_1(u)$ i sig sjelf efter att ha förändra
andra två rötterna, enär Θ förändras i $\Theta^{(3)}$ efter att
ändrats i $\Theta^{(1)}$ och $\Theta^{(2)}$.

Vi sätta den allmänna typen för de tre rötterna
$J_2(u)$, $J_3(u)$ under formen,

$$J_s(u) + \frac{1}{3}a_1 = A\cos\frac{1}{3}(\Theta + 2(1-s)\pi) \quad (s = 1, 2,$$

ordningstalet för punkterna β_1 och β_2 bestämmes då ge
jande gränsvärde (jfr I (15)), då $r = 1$ svarar mot $s =$
$r = 2$ svarar mot $s = 2, 3$,

$$\int^{u=\beta_r} \frac{(u-\beta_r)J_s(u)}{J_s(u)-b_r} = \int^{u=\beta_r} \frac{(u-b_r)\{2\cos\frac{1}{3}(\Theta + 2(1-s)\pi}{2\cos\frac{1}{3}(\Theta + 2(1-s)\pi) - 1}$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{(u-\beta_1)(u-\beta_2)}} = \frac{1}{2} \quad (r = 1, 2$$

hvilket finnes efter bortstötning af den gemensama
$(u-\beta_r)^{1/2}$ $(r = 1, 2)$ samt behandling af formen $\frac{0}{0}$ e
vanliga regeln.

Roten till en allmän n:te grads eqvation, ut
en ny inversion. Utveckling af denna inversi
tensserie för ett konvergensområde, der förgr
punkterna $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ äro eliminerade.

5. Formeln (5), då deri införes beteckningen,

$$V_r = \int_{\beta_r}^{u} \frac{du}{\sqrt{(u-\beta_1)\ldots(u-\beta_{n-1})}}, \tag{9}$$

får följande uttryck,

$$\int_{A_r}^{x} \frac{dx}{\sqrt{Q_1(x) \dots Q_{n-1}(x)}} = \frac{1}{n} V_r \quad (r = 1, 2, \dots, n-1),$$

cipal integral, hvars inversion betecknas

$$x = \mathfrak{J}_r\left(\frac{1}{n} V_r\right),$$

ar begynnelsevärdet A_r för $V_r = 0$ eller

$$A_r = \mathfrak{J}_r(0),$$

öfvergången från en rot till en annan af de n rötterna ationen (1) förmedlas enligt n:o 3 genom de förändrin- m integralen V_r undergår, då u beskrifver slingor om ngspunkterna $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$. Om vi för enkelhetens skull $= \frac{1}{n} V_r$, så fås första derivatan

$$\frac{dx}{dv} = \mathfrak{J}_r'(v) = \sqrt{Q_1(x) \dots Q_{n-1}(x)}$$

ndra derivatan

$$\frac{d^2x}{dv^2} = \mathfrak{J}_r''(v) = \frac{1}{2}\{Q_1(x) \dots Q_{n-1}(x)\}_x'$$

, hvarvid iakttages, att hvarje derivata af jämnt ord- l är en hel rationel funktion af x, då deremot hvarje de- af udda ordningstal är produkten af en sådan funktion ationaliteten $\sqrt{Q_1(x) \dots Q_{n-1}(x)}$. Då A_r är en af de) rötterna till eqvationen $Q_r(x) = 0$, så blir $\mathfrak{J}_r(v)$ en jämn n [D[1]) (53) & n:o 12 *Remarque*] samt uttryckes genom e af ABEL i »*Propriétés remarquables etc.*» under en något nare form behandlade potensserie, då $x = A_r$ svarar mot

$$\mathfrak{J}_r(v) = A_r + \frac{v^2}{\underline{|2}} \cdot \mathfrak{J}_r''(0) + \frac{v^4}{\underline{|4}} \cdot \mathfrak{J}_r^{\mathrm{IV}}(0) + \dots,$$

e, der v ersättes af $\frac{1}{n} V_r$ med de förändringar integralen

[1] denna bokstaf anges hänvisningar till min afhandling *Sur le développement d'une fonction analytique etc.* (Acta Societatis scientiarum Upsaliensis, 1884), då nummern inom parentesen betecknar formeln.

V_r undergår, då u enligt n:o 3 beskrifver slingor om förgre
punkterna $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ för att bilda öfvergången från d
till den andra af de n rötterna till eqvationon I (1).

6. Utom inversionen $J_s(u)$ ha vi nu funnit en ny in
$\mathfrak{J}_r(v)$ såsom uttryck för roten x till en allmän n:te grads
tion I (1), hvarvid en ny variabel v blifvit införd, som
bunden med den oberoende variabeln u genom relation
Det gäller nu att uppvisa konvergensområdet för poten
(14) såsom uttryck för den senare inversionen.

Emedan derivatan $\mathfrak{J}_r'(v)$ i (13) är ändlig för alla
värden på x och emedan enligt I n:o 1 qvantiteterna x
äro öfverallt samtidigt ändliga, *så är funktionen* $\mathfrak{J}_r(v)$ k
erlig för ett sådant område af planet, som innesluter vä
v, hvilka svara mot alla ändliga värden på u.

Emedan för hvarje konstant värde $v = a$, för hvilk
vatan $\mathfrak{J}_r'(v)$ är skild från 0 och $\frac{1}{0}$, följande limes enligt
gäller,

$$\lim_{v=a} \frac{(v-a)\mathfrak{J}_r'(v)}{\mathfrak{J}_r(v) - \mathfrak{J}_r(a)} = 1,$$

så är funktionen $\mathfrak{J}_r(v)$ entydig för hvarje sådan punkt

Om vi låta $(x - e_s)$ beteckna en lineär faktor af pr
$Q_1(x) \ldots Q_{n-1}(x)$ och om $v = c$ utmärker ett nollställe h
faktor, så gäller enligt D (58) följande limes,

$$\lim_{v=c} \frac{(v-c)\mathfrak{J}_r'(v)}{\mathfrak{J}_r(v) - e_s} = 2,$$

hvadan funktionen $\sqrt{x - e_s}$ $(s = 1, 2, \ldots, (n-1)(n-2)$
tydig för hvarje sådan punkt $v = c$, der derivatan $\mathfrak{J}_r'(v)$
Af dessa två limites framgår, *att funktionen* $\mathfrak{J}_r(v)$ *är*
för samma område af planet, för hvilket hon är kontin

Alltså är potensserien (14) *konvergent för ett såd*
råde af planet, som innesluter värden på v, hvilka sv
alla ändliga värden på u och x.

i säga nu, *att vi utvecklat inversionen* $\mathfrak{J}_r(v)$, *såsom uttryck ten till en allmän eqvation af n:te graden, i potensserie konvergensområde, der förgreningspunkterna* $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ *s eliminerade.*

Enligt D (45) få funktionerna $\{\mathfrak{J}_r(v) - \mathfrak{J}_r(a)\}$ och $\{\mathfrak{J}_r(v) - e_s\}$ produktutvecklingar analoga med den i I n:o 9 gifna.

Emedan hvarje oändlighetsställe $v = b$ hos inversionen hvilket enligt D (57) har ordningstalet $\frac{2}{n(n-3)}$, uteslutes let för potensserien (14) gällande konvergensområdet, så att inom detta område icke kan förefinnas någon period-logram. För funktionen $\mathfrak{J}_r(v)$, såsom inversion af en *al* integral, gifves ej heller något periodnät.

Af det riktiga Jacobi'ska beviset[1]), att multiplerna af tre eller flere oberoende perioder gifva ett periodnät med oändligt små rutor, eger man *endast* rätt att sluta, att vid inverteringen af en hyperelliptisk integral kunna högst *två* oberoende perioder för gången medtagas eller ock *en* eller ock *ingen*, d. v. s. att inversionen af den *generela* integralen, såsom egande flere än två oberoende perioder, icke existerar som analytisk funktion, men väl att som analytisk funktion existerar inversionen af den *partikulära* integralen med två oberoende perioder[2]) eller med en period, likasom ock inversionen af den *principala* integralen såsom i (11); det analytiska uttrycket härför är, att hela tals faktorerna i periodmultiplerna kunna såsom *arbiträra* äfven vara noll. Detta existensförhållande belyses genom följande exempel. Af den principala integralen

$$u = \int_a^x \frac{dx}{(x-a)^\mu},$$

då μ är ett irrationelt tal < 1 och x beskrifver k stycken slingor om punkten a, fås den generela integralen

$$ue^{2\mu k\pi i} = \int_a^x \frac{dx}{(x-a)^\mu} \quad (\pm k = 1, 2, \ldots, \infty);$$

inversionen af denna generela integral

---

elles Journal, B. XIII.

min afhandling, *Aperçu d'une nouvelle manière de représenter les inver-ns hyperelliptiques* (Mémoires de la Société des sciences physiques et na-elles de Bordeaux, t. V (2:e série), 3:e cahier).

$$x = a + \{(1-\mu)ue^{2\mu k\pi i}\}^{\frac{1}{1-\mu}},$$

då u sättes under den komplexa formen $u = \varrho e^{i\theta}$, ä
ende af θ:s variation och derför som analytisk funktion
deremot är inversionen af den principala integralen
en fullt bestämd analytisk funktion.

8. I öfverensstämmelse med I n:o 10 kunna vi nu följande sats:

Under förutsättning att vi kunna lösa en eqvation af (n graden, kunna vi uttrycka roten till en eqvation af n:te förmedels den kända funktionen $\mathfrak{J}_r(v)$, *hvarvid förgrening terna* $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ *befinnas eliminerade.*

ersigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1883. N:o 6.
Stockholm.

n inversionen af en algebraisk integral såsom ttryck för roten till en algebraisk eqvation.

Af Göran Dillner.

[Meddeladt den 6 Juni 1883.]

edan för länge sedan hyste jag den tanken att roten till gebraisk eqvation borde kunna uttryckas under form af onen af en algebraisk integral; men jag lemnade då denna å sido under förmodan, att svårigheterna för dess för-gande skulle vara större än de vid närmare pröfning verk-befinnas vara. Jag lemnar här grunddragen af denna utveckling, förbehållande mig att framdeles fullständigare dla det förelagda ämnet.

Inversionen $J_s(u)$ och dess derivata $J'_s(u)$.

Vi beteckna med $P(x)$ ett polynom af n:te graden,

$$(1)\quad P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + \alpha = u\,,$$

och u äro variabla samt $a_1, \ldots, a_{n-1}$ gifna konstanter; α betecknar en så vald konstant, att

$$(2)\quad P(\xi_s) = 0\ (s = 1, 2, \ldots n)\,,$$

antaga de n rötterna $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *olika* samt en af den ξ_1 *kligt bestämd.* Vi ha då enligt (1) den algebraiska inte-

$$(3)\quad u = \int_{\xi_s}^{x} P'(x)\,dx,$$

der således mot värdet $x = \xi_s$, som betecknar en af de n rö
i (2), svarar integralens värde $u = 0$. *Inversionen af*
algebraiska integral betecknas nu,

$$(4)\quad x = J_s(u),$$

hvarvid iakttages, *att* $J_s(u)$ *representerar en af de n funk*
som svarar mot de n skilda värdena $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *på den*
integrationsgränsen i (3), hvilka satisfiera de n likheterna

$$(5)\quad \xi_s = J_s(0)\ (s = 1,\ 2, \ldots n).$$

Inversionen $J_s(u)$ är nu till sin närmare form beroe
de $(n-1)$ konstanterna $a_1, \ldots, a_{n-1}$ som *parametrar.*

Vi utgå nu från den förutsättningen, *att vi kunna*
eqvation af $(n-1)$*:ta graden.* Om vi då i (2) införa ett
ligt värde på den godtyckligt bestämbara konstanten ξ_1
räkna det deremot svarande värdet på α, så kunna vi
den gjorda förutsättningen beräkna de $(n-1)$ konst
$\xi_2, \ldots, \xi_n$. Vidare kunna vi enligt samma förutsättnin
såsom kända de $(n-1)$ konstanterna $b_1, \ldots, b_{n-1}$ i
ningen,

$$(6)\quad P'(x) = n(x - b_1)\ldots(x - b_{n-1}).$$

Genom att differentiera (3) kunna vi sätta *inversione*
derivata under följande form,

$$(7)\quad J'_s(u) = \frac{dx}{du} = \frac{1}{P'(x)} = \frac{B_1}{J_s(u) - b_1} + \ldots + \frac{B_{n-1}}{J_s(u) - b_{n-1}}$$

der $B_1, \ldots, B_{n-1}$ betecknar kända konstanter, så snar
stanterna $b_1, \ldots b_{n-1}$ äro kända.

Om vi i (1) sätta

$$(8)\quad P(b_r) = \beta_r\ (r = 1,\ 2, \ldots \overline{n-1}),$$

då vi enligt (4) ha

$$(9)\quad b_r = J_s(\beta_r)\ (r = 1,\ 2, \ldots \overline{n-1}),$$

enligt (7),

$$(10) \quad \Big/_{u=\beta_r} J'_s(u) = \frac{1}{0} \, (r = 1, 2, \ldots \overline{n-1}),$$

des derivatan $J'_s(u)$ har $(n-1)$ oändlighetsställen $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$.
medan integralen (3) icke lemnar några periodtermer samt
onen $J_s(u)$ i allmänhet icke är af jämn eller udda karakter,
inversionen $J_s(u)$ endast *ett nollställe* α, som enligt (1)
et genom likheten,

$$(11) \quad J_s(\alpha) = 0.$$

ör ändliga värden på parametrarna $a_1, \ldots, a_{n-1}$ samt kon-
α äro variablerna x och u samtidigt ändliga, *då således*
onen $J_s(u)$ saknar oändlighetsställe inom ett ändligt be-
dt område.

Inversionens $J_s(u)$ kontinuitets område.

Emedan derivatan $J'_s(u)$ enligt (7) är ändlig för alla
r inom ett ändligt område af planet utom i punkterna
$, \beta_{n-1}$, som äro gifna enligt (8), så är inversionen $J_s(u)$
uerlig öfverallt inom detta område utom möjligen i punk-
$\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$.
medan vidare i granskapet af punkten $u = \beta_r$ gäller den
ta formeln

$$J_s(u + h) - J_s(u) = hJ'_s(u + \theta h),$$

s med stöd af (7), då vi använda för försvinnande h den
kanta regeln i differentialkalkylen vid bestämmandet af
n $\frac{0}{0}$, följande resultat,

$$\Big/_{u=\beta_r} \{J_s(u) - J_s(\beta_r)\} = 0,$$

n således inversionen $J_s(u)$ varierar utan språng äfven i
erna $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$. Vi kunna alltså uttala den satsen, *att*
ionen $J_s(u)$ varierar kontinuerligt i alla punkter inom ett
t område af planet.

Inversionens $J_s(u)$ entydighetsområde.

3. Enligt (7) antager inversionens $J_s(u)$ logaritmiska
vata följande form,

$$(12)\quad \frac{J'_s(u)}{J_s(u)} = \frac{1}{xP'(x)},$$

då således nollstället α får ordningstalet 1 enligt formeln,

$$(13)\quad \Big/^{u=\alpha}(u-\alpha)\frac{J'_s(u)}{J_s(u)} = \Big/^{u=\alpha}\frac{u-\alpha}{xP'(x)} = \Big/^{u=\alpha}\frac{1}{\left\{P'(x)+xP''(x)\right\}\frac{dx}{du}} = 1,$$

allt under förutsättning, att ingen af de $(n-1)$ konstan
$b_1, \ldots, b_{n-1}$ i (6) är noll, d. v. s. att parametern a_{n-1} är
från noll. Under denna förutsättning *är alltså inversionen*
entydig i nollstället $u = \alpha$.

Anm. Skulle i (6) $b_1 = b_2, \ldots, = b_\mu = 0$, eller $b_1 =$
en μ faldig rot till $P'(x) = 0$, så fås i stället för (13), då v

$$P'(x) = x^\mu Q(x),$$

der $Q(0)$ icke är noll, följande formel,

$$\Big/^{u=\alpha}(u-\alpha)\frac{J'_s(u)}{J_s(u)} = \Big/^{u=\alpha}\frac{u-\alpha}{x^{\mu+1}Q(x)} = \Big/^{u=\alpha}\frac{1}{\left\{(\mu+1)x^\mu Q(x) + x^{\mu+1}Q'(x)\right\}\frac{dx}{du}} =$$

hvadan nollställets α ordningstal i detta fall är $\frac{1}{\mu+1}$ och sål
versionen $J_s(u)$ $(\mu+1)$-tydig i detta ställe.

4. Om vi i (6) sätta

$$P'(x) = (x-b_r)R(x)$$

under förutsättning att b_r är en enkel rot till eqvationen
$= 0$ och således $R(b_r)$ icke noll, så få vi följande uttr
funktionens $\{J_s(u) - b_r\}$ logaritmiska derivata

$$(14)\quad \frac{J'_s(u)}{J_s(u)-b_r} = \frac{1}{(x-b_r)P'(x)} = \frac{1}{(x-b_r)^2R(x)},$$

då således funktionens $\{J_s(u) - b_r\}$ nollställe β_r får ordni
$^1/_2$ enligt följande formel,

$$\frac{(u-\beta_r)\,.J'_s(u)}{J_s(u)-b_r}=\left/\frac{u-\beta_r}{(x-b_r)^2R(x)}\right.=\left/\frac{1}{\left\{2(x-b_r)R(x)+(x-b_r)^2R'(x)\right\}\frac{dx}{du}}\right.=\frac{1}{2}.$$

$u=\beta_r$ $\qquad$ $u=\beta_r$

nktionen $\{J_s(u)-b_r\}$ är således tvåtydig i de $(n-1)$ rna $\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}$.

nm. Om b_r är en μ faldig rot till eqvationen $P'(x)=0$, ordningstalet för funktionens $\{J_s(u)-b_r\}$ nollställe β_r värdet då således denna funktion blir $(\mu+1)$-tydig i punkten β_r.

Om vi sammanfatta de i N:o 3 och N:o 4 gifna resulså kunna vi uttala följande sats:

n parametern a_{n-1} är skild från noll, så är inversionen ntydig inom ett ändligt område af planet utom i de $(n-1)$ rna $\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}$.

ling af en kontinuerlig och entydig funktion i potensserie yllnadsterm för en konvergenscirkel, som innesluter ett gifvet antal oändlighetsställen.

Denna utveckling, som jag genomfört i Tidskrift för atik och fysik för 1871, får här en ändamålsenlig tillämpå logaritmiska derivatan af funktionen $J_s(u)$. Jag framhär i korthet nämda utveckling, hvarvid jag betjenar det raskare förfaringssätt, som jag användt i min afhandraité de calul géométrique supérieur, sid. 34, införd i Kongl. skaps Societetens Acta för 1873.

i beteckna med C en cirkel med medelpunkten a samt en kontinuerliga och entydiga funktionen $f(a+\zeta)$ ega enna cirkel de m oändlighetsställena $\zeta=c_r(r=1,2,\ldots,m)$. äller då att utveckla funktionen $f(a+\zeta)$ för C såsom genscirkel. Vi ha då som bekant följande identitet,

$$\int^{C}\frac{f(a+\zeta)d\zeta}{\zeta^n(\zeta-h)}=\int^{\textcircled{o}}\frac{f(a+\zeta)d\zeta}{\zeta^n(\zeta-h)}+\int^{\textcircled{h}}\frac{f(a+\zeta)d\zeta}{\zeta^n(\zeta-h)}+\sum_{r=1}^{r=m}\int^{\textcircled{c_r}}\frac{f(a+\zeta)d\zeta}{\zeta^n(\zeta-h)},$$

der venstra sidan betecknar integralen, tagen omkring cirk
samt högra sidan summan af alla punktintegralerna, tagna
kring alla de inom C belägna oändlighetsställena $\zeta = 0$, ζ
$\zeta = c_r (r = 1, 2, \ldots, m)$ hos funktionen $\frac{f(a+\zeta)}{\zeta^n(\zeta - h)}$. Enligt de
bekanta sättet att beräkna dessa punktintegraler fås, då
taga oändlighetsställena $c_1, \ldots, c_m$ *enkla*[1] samt sätta

$$(17) \quad \Big/^{\zeta = c_r} (\zeta - c_r) f(a + \zeta) = M_r (r = 1, 2, \ldots, m),$$

följande resultat,

$$(18) \quad \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(a+\zeta) d\zeta}{\zeta^n (\zeta - h)} = \frac{1}{\underline{n-1}} \Big/^{\zeta = 0} \left\{ \frac{f(a+\zeta)}{\zeta - h} \right\}^{(n-1)} + \frac{f(a+h)}{h^n} + \sum_{r=1}^{r=m} \frac{c_r^n (}{}$$

Om vi sätta

$$\frac{f(a+\zeta)}{h - \zeta} = U,$$

så fås genom att r gånger differentiera likheten $f(a +$
$U(h - \zeta)$ följande resultat,

$$U^{(r)} = \frac{f^{(r)}(a+\zeta) + rU^{(r-1)}}{h - \zeta},$$

hvadan alltså,

$$\Big/^{\zeta = 0} U = \frac{f(a)}{h}, \Big/^{\zeta = 0} U' = \frac{f'(a)}{h} + \frac{f(a)}{h^2}, \ldots, \Big/^{\zeta = 0} \frac{U^{(n-1)}}{\underline{n-1}} = \frac{f^{(n-1)}(a)}{\underline{n-1} h} + , \ldots$$

$$+ \frac{f'(a)}{h^{n-1}} + \frac{f(a)}{h^n}.$$

Identiteten (18) kan då skrifvas sålunda:

$$(19) \quad f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{\underline{n-1}} f^{(n-1)}(a)$$

$$+ \sum_{r=1}^{r=m} \left(\frac{h}{c_r} \right)^n \frac{M_r}{h - c_r} + R;$$

[1]) I den citerade Tidskriften för 1871 är utvecklingen genomförd för
männa fallet, att oändlighetsställena $c_1, \ldots, c_m$ äro af hvilken ordning s

satt

$$(20)\quad R = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(a+\zeta)d\zeta}{\zeta^n(\zeta - h)}.$$

n vi använda den komplexa beteckningen $\zeta = \varrho e^{i\theta}$, der nstant, så är $d\log\zeta = id\theta$, hvadan resttermen (20) antar e form,

$$(21)\quad R = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{h}{\zeta}\right)^n \frac{f(a+\zeta)d\theta}{1-\frac{h}{\zeta}},$$

framgår att $\lim R = 0$ eller att serien (19) är *konvergent*, rt

$$(22)\quad \lim\left\{\left(\frac{h}{\zeta}\right)^n \frac{f(a+\zeta)}{1-\frac{h}{\zeta}}\right\} = 0.$$

onvergensvilkoret (22) är uppfyldt:

o för ändligt värde på ϱ, då $T\left(\frac{h}{\varrho}\right) < 1$[1] på samma gång m $n = \infty$;

o för oändligt värde på ϱ och det minsta värde på n, ilket

$$\zeta = \frac{1}{0}$$

ärdet $\left/\frac{f(a+\zeta)}{\zeta^n}\right. = 0$, hvarvid bemärkes, att i stället för cir- C kan införas en sluten kontur i allmänhet, hvars punkter å jämförliga oändliga afstånd från punkten a (jfr Sur les ales définies etc. i Kongl. Vetenskaps Akademiens Hand- Band 18, n:o 6, sid. 6).

Ied försummande af resttermen, hvilken antages noll, kan (19) skrifvas sålunda,

$$(23)\quad f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \ldots + \underline{\frac{h^{n-1}}{n-1}} f^{(n-1)}(a)$$

$$+ \sum_{r=1}^{r=m} \frac{M_r}{c_r}\left\{1 + \frac{h}{c_r} + \ldots + \left(\frac{h}{c_r}\right)^{n-1}\right\} + \sum_{r=1}^{r=m} \frac{M_r}{h - c_r},$$

[1] använda här den Hamiltonska beteckningen T (»tensor») för att utmärka ɔdulen eller absoluta beloppet.

Funktionen $f(a+h)$ säges nu vara *utveeklad i potens*
med fyllnadsterm, hvilken senare utgöres af summan $\sum_{r=1}^{r=m}$ h

Härvid är att bemärka, att, så snart någon af de m tenso
$T\left(\frac{h}{c_r}\right)(r=1,2,\ldots m)$ är >1, utgöres den konvergenta po
serien af summan af två divergenta potensserier.

7. Om vi i (23) med S beteckna den konvergenta po
serien,

$$(24)\quad S=f(a)+hf'(a)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{\underline{n-1}}f^{(n-1}(a)$$

$$+\sum_{r=1}^{r=m}\frac{M_r}{c_r}\left\{1+\frac{h}{c_r}+\ldots+\left(\frac{h}{c_r}\right)^{n-1}\right\}$$

samt antaga funktionen f vara logaritmiska derivatan af
tionen F,

$$(25)\quad f(a+\zeta)=\frac{F'(a+\zeta)}{F(a+\zeta)},$$

hvarvid funktionens f enkla oändlighetsställen $c_1,\ldots,c$
funktionens F märkesställen med de respektive ordning
$M_1,\ldots,M_m$, de positiva ordningstalen utmärkande nollst
och de negativa oändlighetsställena, så fås genom integrat
(23) mellan gränserna u_0 och u följande resultat,

$$(26)\quad \log\frac{F(a+u)}{F(a+u_0)}=\sum_{r=1}^{r=m}M_r\log\frac{u-c_r}{u_0-c_r}+\int_{u_0}^{u}Sdh$$

eller efter höjning till potens, då summationstecknet Σ er
af produkttecknet Π,

$$(27)\quad F(a+u)=F(a+u_0)\prod_{r=1}^{r=m}\left\{\frac{u-c_r}{u_0-c_r}\right\}^{M_r}\cdot e^{\int_{u_0}^{u}Sdh}\cdot$$

Anm. 1. Om F utmärker en dubbelt periodisk funktion,
logaritmiska derivata är f, och om vi låta ζ beskrifva den y
konturen af funktionens F åt alla håll i oändlighet utsträckta

uppfylles vilkoret (22) 2:o för $n = 1$, hvadan utvecklingarna h (27) gälla för potensserien $S =$ konstant.

nm. 2. Enär likheten (23) är under de angifna vilkoren en , så anger hon bildningslagen för en kontinuerlig och enty- ktion f, hvars enkla oändlighetsställen $c_1, \ldots, c_m$ äro gifna. ofvan citerade Tidskrift för 1871 gifna utvecklingen af en erlig och entydig funktion för det fall, att $c_1, \ldots, c_m$ äro hetsställen af hvilka ordningar som helst, anger på samma dningslagen för en dylik funktion [1].

Utveckling af inversionen $J_s(u)$ i potensserie.

För en konvergenscirkel C, hvars medelpunkt är a och nesluter punkten $a + h$ men deremot ingen af de $(n - 1)$ ingspunkterna $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$, är funktionen $J_s(u)$ konti- och entydig och följaktligen utveckelbar enligt Taylors d. v. s. serien (23), för $M_r = 0 (r = 1, 2, \ldots m)$. För $+ h$ fås alltså,

$$) \; J_s(u) = J_s(a) + \frac{u - a}{1} J'_s(a) + \frac{(u-a)^2}{1.2} J''_s(a) + \ldots,$$

l de successiva derivatorna $J'_s(a)$, $J''_s(a), \ldots$ enligt (7) as i konstanten $J_s(a)$, hvilken förutsättes bekant. För ha vi enligt (5) $J_s(o) = \xi_s (s = 1, 2, \ldots n)$, n bekanta som, successivt införda i (28), bestämma de n särskilda nerna $J_1(u), \ldots, J_n(u)$. Med de så erhållna n värdena $u)$ kunna vi sätta utvecklingen (28) under formen,

$$s(u_1) = J_s(u) + \frac{u_1 - u}{1} J'_s(u) + \frac{(u_1 - u)^2}{1.2} J''_s(u) + \ldots,$$

således gäller för en konvergenscirkel C_1, som har u till unkt och innesluter punkten u_1 men ingen af de $(n - 1)$ ingspunkterna $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$. Genom en lämplig anordning letta sätt på hvarandra följande konvergenscirklar kunna ligen bestämma funktionen $J_s(u)$ för hvilket värde som på variabeln u, som är skildt från förgreningspunkterna β_{n-1}.

[1] »Mittag-Lefflers teorem» af ett senare datum (1877).

Utveckling af inversionen $J_s(u)$ i produkt.

9. Enär inversionen $J_s(u)$ enligt (11) har endast ett ställe α och det af ordningen 1 för $T(a_{n-1}) > 0$, så fås konvergenscirkel C, hvars medelpunkt är $u = 0$ och som sluter de skilda punkterna α samt u_0 och u men deremot af förgreningspunkterna $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$, enligt (23) samt vi (22) 1:o följande utveckling af den logaritmiska derivatan

$$(29)\quad \frac{J'_s(u)}{J_s(u)} = \frac{1}{u-\alpha} + S,$$

der S enligt (24) har formen,

$$(30)\quad S = \frac{J'_s(0)}{J_s(0)} + u\left\{\frac{J'_s(0)}{J_s(0)}\right\}' + \ldots + \frac{u^{n-1}}{\underline{n-1}}\left\{\frac{J'_s(0)}{J_s(0)}\right\}^{(n-1)}$$

$$+ \frac{1}{\alpha}\left\{1 + \frac{u}{\alpha} + \ldots + \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{n-1}\right\}.$$

Enligt (27) fås då genom integration mellan gränserna u följande resultat,

$$(31)\quad J_s(u) = J_s(u_0)\frac{u-\alpha}{u_0-\alpha} \cdot e^{\int_{u_0}^{u} S du},$$

hvarest de n värdena $J_1(u_0), \ldots, J_n(u_0)$ enligt N:o 8 ans stämda.

Tillämpning af inversionen $J_s(u)$ på lösningen af en n:t eqvation.

10 Låt den gifna n:te-grads eqvationen ha formen

$$(32)\quad x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

då genom jämförelse med (1) fås,

$$(33)\quad u = \alpha - a_n,$$

hvadan de n rötterna till den framsatta eqvationen få

$$(34)\quad x = J_s(\alpha - a_n)(s = 1, 2, \ldots, n).$$

i kunna alltså uttala följande sats:

nder förutsättning att vi kunna lösa en eqvation af $(n-1)$*:ta kunna vi uttrycka roten till en eqvation af n:te graden att i den kända funktionen* $J_s(u)$ *ersätta u med det konvärdet* $(\alpha - a_n)$.

nm. En jämförelse mellan funktionen $J_s(u)$ och de kända arna af en algebraisk eqvation erbjuder ett särskildt intresse.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. fr. sid.

Från K. Ungarische Geologische Anstalt.

Foldtani Közlöny, 13: 1—3.
Mittheilungen aus dem Jahrbuche, Bd. 6: 3—4.
Geologisk karta öfver Ungarn, Bl. 60—62; 64; 69; 71; 7
89—92; 99—101; 109—110.

Från Verein für Naturkunde i Cassel.

Bericht, 29—30.

Från Academia Scientiarum i Krakow.

Publikationer, 6 band.

Från K. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften i Pr

Abhandlungen (6) Bd. 11.
Jahresbericht, 1881—1882.
Sitzungsberichte, 1881.

Från Kemiska Sällskapet i Prag.

Listy chemiché, 3: 5; 5: 1—10; 6: 1—10.

Från K. K. Geologische Reichs-Anstalt i Wien.

Jahrbuch, Bd. 33: 1.
Verhandlungen, 1883: 1—6.

Från Grosshandlaren Dr O. Dickson i Göteborg.

Catalogue of Mr O. Dickson collections from the Gothenbu
seum at the International Fisheries Exhibition, Londo
thenb. 1883. 8:o.

Från Professorn G. Retzius.

En större samling bref till A. J. Retzius och Anders Retzi
uppsatser, dagböcker m. m. af den sistnämnde.

Från Läroverksadjunkten Dr A. P. Winslow i Götebo

Verlot, J. B. Catalogue raisonné des plantes vasculaires
phiné. Grenoble 1872. 8:o.

(Forts. å si

Ankündigung

der

öffentlichen Frühlingsprüfung

im

Herzoglich Nassauischen Gymnasium

zu

Weilburg

am 29. und 30. März 1858

von

Dr. W. Metzler,

Herzogl. Nass. Geh. Regierungsrath und Director des Gymnasiums

Inhalt:

1) Abhandlung vom Conrector Dr. Eickemeyer: Die algebraischen und transcendenten Funktionen, durch die Methode der unbestimmten Coefficienten für die oberste Gymnasialstufe dargestellt.
2) Schulnachrichten vom Director.

Weilburg.

Gedruckt bei L. E. Lanz.

Aufl. Die zweite Gleichung mit einem vorläufig noch unbestimmt gelassenen Faktor k multiplizirt und hierauf zur Ersten addirt, gibt nach Ausscheidung der gemeinschaftlichen Faktoren x und y $x(a + a'k) + y(b + b'k) = c + c'k$, eine Gleichung welche für jeden Werth von k wahr bleiben muß, und worin es deshalb auch gestattet ist, denselben so zu wählen, daß zum beliebigen Verschwinden von x oder y aus der Gleichung einer der beiden in der Klammer befindlichen Faktoren gleich Null werde. Setzen wir demgemäß $b + b'k = o$, also $k = -\frac{b}{b'}$, so bleibt $x(a + a'k) = c + c'k$ also $x = \frac{c + c'k}{a + a'k}$, woraus nach Substitution des Werthes von k weiter sich ergibt

$$x = \frac{c - c'.\frac{b}{b'}}{a - a'.\frac{b}{b'}} = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}$$

Setzen wir ebenso $a + a'k = o$, also $k = -\frac{a}{a'}$, so bleibt $y(b + b'k) = c + c'k$,

woraus $y = \frac{c + c'k}{b + b'k} = \frac{c - c'.\frac{a}{a'}}{b - b'.\frac{a}{a'}} = \frac{a'c - ac'}{a'b - ab'}$ folgt.

Enthält die Aufgabe drei unbekannte Größen, wie

1. $ax + by + cz = d$
2. $a'x + b'y + c'z = d'$
3. $a''x + b''y + c''z = d''$

so nehme man zwei unbestimmte Faktoren k und k' an, womit bezüglich die zweite und dritte Gleichung multiplizirt werden. Aus der Vereinigung mit der Ersten erhält man sodann $x(a + a'k' + a''k) + y(b + b'k' + b''k) + z(c + c'k' + c''k) = d + d'k' + d''k$ worin man nach Belieben je zwei unbekannte Größen verschwinden lassen kann, wenn ihre Faktoren gleich Null gesetzt werden. Um z. B. x zu berechnen, setze man $b + b'k' + b''k = o$, $c + c'k' + c''k = o$. Die Berechnung von k und k' führt zu dem vorhergehenden Falle.

II. Aufgabe. Es soll $x^2 \pm px \pm q = o$ auf eine reine quadratische Gleichung zurückgeführt werden.

Aufl. Man setze $y + k = x$ so ist

$$\begin{array}{llll} y^2 + 2ky & + k^2 & = x^2 \\ \pm py & \pm pk & = \pm px \\ & \pm q & = \pm q \quad \text{folglich} \end{array}$$

$$y^2 + y(2k \pm p) + k^2 \pm pk \pm q = o.$$

Wird jetzt für k ein solcher Werth gewählt, daß $2k \pm p = o$ werde, demnach $k = \mp \frac{p}{2}$ gesetzt, so verschwindet der zweite Theilsatz der Gleichung und man erhält $y^2 + k^2 \pm pk \pm q = o$, und nach Substitutution des Werthes von k die verlangte reine quadratische Gleichung $y^2 + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{2} \pm q = o$ oder vereinfacht $y^2 = \mp q + \frac{p^2}{4}$.

Hieraus folgt weiter $y = \pm \sqrt{\mp q + \frac{p^2}{4}}$, demnach $x = k + y = \mp \frac{p}{2} \pm \sqrt{\mp q + \frac{p^2}{4}}$.

§. 2. Aus der Planimetrie ist bekannt, daß wenn J, U und R beziehungsweise den Inhalt, Umfang und Halbmesser eines Kreises bezeichnen, $U = 2R\pi$ und $J = R^2\pi$ ist. Die Relationen zwischen U und R einerseits, sowie J und R andererseits sind durch diese Gleichungen unabänderlich festgestellt, R mag groß oder klein sein; mit dem unbestimmt gelassenen oder auch im Zustande der Veränderung gedachten Halbmesser muß immer eine und dieselbe Verrichtung (Funktion) vorgenommen werden, um daraus den entsprechenden Umfang und Inhalt des Kreises zu bestimmen, und man nennt darum die Ausdrücke $2R\pi$ und $R^2\pi$ Funktionen von R.

$J = G H$ gibt den Inhalt eines Parallelogramms, dessen Grundlinie G und Höhe H ist, und es ist jetzt J eine Funktion der zwei Größen G und H. Im Allgemeinen würde man den Ausdruck derjenigen Verrichtung, welche mit gewissen unbestimmten oder im Zustande der Veränderung gedachten Größen vorzunehmen ist, um daraus eine andere Größe zu erzielen, eine Funktion dieser veränderlichen Größen nennen.

Da die Funktionen neben den veränderlichen auch noch unveränderliche, konstante Größen enthalten können, wie es mit π für den Kreis der Fall ist, so unterscheidet man beide Arten von Größen dadurch von einander, daß Erstere durch die Buchstaben x, y, z... bezeichnet werden. In den Ausdrücken, welche demnächst zu behandeln sind, werden demnach die durch diese Buchstaben vorgestellten Größen keineswegs als etwas Unbekanntes, durch die Auflösung einer Gleichung zu Bestimmendes, sondern vielmehr als Solche anzusehen sein, die nach Umständen bald diesen, bald jenen Werth erhalten können.

Eine Funktion wird eine algebraische genannt, wenn in ihr die veränderlichen Größen nur durch Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division unter einander und mit beständigen Größen verbunden sind, und wenn dieselben außerdem nur zu beständigen, rationalen Exponenten erhoben oder unter Wurzelzeichen vorkommen.

Die veränderlichen Größen können aber auch noch in anderer Weise vorkommen, z. B. zu einem irrationalen Exponenten erhoben, oder selbst als Exponenten erscheinen; ferner können die Ausdrücke den Logarithmus oder eine trigonometrische Funktion der veränderlichen Größen enthalten. Formen dieser Art werden transzendente Funktionen genannt.

Erster Abschnitt.

Die Entwickelung algebraischer Funktionen durch die Methode der unbestimmten Coefficienten.

§. 3. In den §. 1 behandelten Aufgaben war die Form der Gleichungen den eingeführten Größen k, k' untergeordnet, indem wir für k einen solchen Werth wählten, daß dadurch die ursprünglich gegebene Gleichung eine neue, für die Auflösung geeignete Gestalt annahm. — Bei den jetzt zur Untersuchung kommenden Fällen werden zwar auch wieder unbestimmte Größen in die Rechnung eingeführt, aber bezüglich ihrer findet gerade das Umgekehrte statt, indem sie jetzt der unabänderlichen Form der Gleichung, worin sie vorkommen, untergeordnet werden und ihre numerische Feststellung unter dem Zwange der mit ihnen vorgenommenen Rechnungsoperationen in Rücksicht auf die richtige Anpassung an die Form der Gleichungen vollzogen wird, ähnlich wie die unverbundenen in dem engen Raume eines Behälters zusammengehaltenen Elemente sich zu einem kompakten Ganzen in einander fügen, wenn dieselben durch Rütteln in Bewegung gesetzt werden.

§. 4. Wenn ein beliebiges nach den Potenzen der Veränderlichen x geordnetes Polynom $35x^6 - 18x^5 + 19x^4 - 12x^3 - 8x^2 + 9x - 36$ durch ein anderes eben so

geordnetes von niedrigerem Grade $7x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 4x - 9$ dividirt wird, so sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Sind Dividend und Divisor fallend geordnet, wie in dem Beispiele, so erhält man den Quotient $5x^2 + x + 2$ auch fallend, und der als Bruch demselben beizufügende Rest $-24x^3 - 45x^2 + x - 18$ muß natürlich von niedrigerem Grade als der Divisor sein.

2. Wenn dagegen Dividend und Divisor steigend geordnet sind, so wird der Quotient, falls die Division nicht aufgehen sollte, eine nach den Potenzen von x steigend geordnete ins Unendliche fortschreitende Reihe $4 + \frac{7x}{9} + \frac{172x^2}{9^2} - \ldots$ geben.

Es unterliegt keinem Zweifel, daß der bei der Division des ersten Falles sich herausstellende Rest, statt ihn als einen Brnch, dessen Nenner der Divisor ist, dem Quotient hinzuzufügen, in steigender Ordnung einer neuen Division nach dem zweiten Falle unterworfen und in einer unendlichen Reihe dargestellt werden kann. Diese Division kann aber umgangen und durch die von Descartes begründete Methode der unbestimmten Coefficienten ersetzt werden. Hiernach hätten wir den Bruch $\frac{A + Bx + Cx^2 + \ldots + Hx^{m-1}}{A' + B'x + C'x^2 + \ldots + K'x^m}$ in seiner allgemeinsten Gestalt, oder wenn wir Zähler und Nenner durch A' dividiren und $\frac{A}{A'} = a$, $\frac{B'}{A'} = \alpha$ u. s. w. setzen, den Bruch $\frac{a + bx + cx^2 + \ldots + hx^{m-1}}{1 + \alpha x + \beta x^2 + \ldots + \vartheta x^m}$ durch eine unendliche Reihe darzustellen.

§. 5. Wir beginnen mit dem einfachsten Falle, wenn der Nenner ein Binomium und der Bruch selbst demnach von der Form $\frac{a}{1 + \alpha x}$ ist. Jedenfalls sind wir aus der im vorigen § besprochenen Division zur Annahme berechtigt, daß die Entwicklung dieses Ausdrucks nach den Potenzen von x fortschreiten werde, wodurch wir die hypothetische Reihe erhalten:

$$1) \quad \frac{a}{1 + \alpha x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots.$$

worin die Coefficienten A, B, C... noch unbestimmte und von x unabhängige Größen sind.

Durch Multiplikation der Gleichung mit dem Nenner ergibt sich

$$\begin{array}{l} a = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots \\ \quad + \alpha A + \alpha B + \alpha C + \alpha D + \ldots \end{array}$$

welche Gleichung für jeden Werth von x, also auch wenn $x = 0$ gesetzt wird, wahr bleiben muß. In diesem Falle verschwinden aber alle mit dem Faktor x behafteten Theilsätze des zweiten Gliedes und es bleibt $a = A$.

Ziehen wir jetzt diese Werthe beiderseits von der vorhergehenden Gleichung ab, und dividiren sodann durch x, so ergibt sich

$$\begin{array}{l} 0 = B + Cx + Dx^2 + Ex^3 + \ldots \\ \quad + \alpha A + \alpha Bx + \alpha Cx^2 + \alpha Dx^3 + \ldots \end{array}$$

und wenn hierin wieder $x = 0$ gesetzt wird: $0 = B + \alpha A$.

Durch Subtraktion dieser Gleichung von der vorhergehenden, und nachherige Division durch x erhält man ebenso wieder, nachdem $x = 0$ gesetzt worden ist: $0 = C + \alpha B$, und hieraus weiter $0 = D + \alpha C$, $0 = E + \alpha D$ u. s. f. Mat hat also

$$\begin{array}{rcll} A & = & a & \\ B + \alpha A & = & o & \text{woraus } B = -\alpha A \\ C + \alpha B & = & o & \text{„ } C = -\alpha B \\ D + \alpha C & = & o & \text{„ } D = -\alpha C \\ E + \alpha D & = & o & \text{„ } E = -\alpha D \text{ u. ſ. w.,} \end{array}$$

ıd man ſieht hieraus, daß jeder Coefficient der hypothetiſchen Reihe aus dem unmittelbar orhergehenden durch Multiplikation mit dem beſtändigen Faktor $-\alpha$ erhalten wird. Da ın $A = a$ iſt, welchen Werth man auch unmittelbar aus dem Bruche $\frac{a}{1+\alpha x}$ erhalten ürde, wenn darin $x = o$ geſetzt wird, ſo iſt

$$\frac{a}{1+\alpha x} = a - a\alpha x + a\alpha^2 x^2 - a\alpha^3 x^3 + a\alpha^4 x^4 - \ldots$$
$$= a\,(1 - \alpha x + \alpha^2 x^2 - \alpha^3 x^3 + \alpha^4 x^4 - \ldots).$$

2. Der zunächſt ſich anſchließende Fall iſt:

$$\frac{a + bx}{+ \alpha x + \beta x^2} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots$$ Multipliziren wir iderſeits mit dem Nenner, ſo iſt:

$$+ bx = A + \begin{matrix} B \\ +\alpha A \end{matrix}\Big\} \times x + \begin{matrix} C \\ +\alpha B \\ +\beta A \end{matrix}\Big\} \times x^2 + \begin{matrix} D \\ +\alpha C \\ +\beta B \end{matrix}\Big\} \times x^3 + \begin{matrix} E \\ +\alpha D \\ +\beta C \end{matrix}\Big\} \times x^4 + \ldots$$

Für $x = o$ ergibt ſich vorerſt $a = A$. Dieſe Größen beiderſeits abgezogen, und die ſtirende Gleichung ſodann durch x dividirt, erhält man weiter:

$$b = \begin{matrix} B \\ +\alpha A \end{matrix} + \begin{matrix} C \\ +\alpha B \\ +\beta A \end{matrix}\Big\} \times x + \begin{matrix} D \\ +\alpha C \\ +\beta B \end{matrix}\Big\} \times x^2 + \begin{matrix} E \\ +\alpha D \\ +\beta C \end{matrix}\Big\} \times x^3 + \ldots$$

Wird wieder $x = o$ geſetzt, ſo erhält man $b = B + \alpha A$, und durch ähnliche Behandlungsweiſe ferner: $o = C + \alpha B + \beta A$, $o = D + \alpha C + \beta B$, $o = E + \alpha D + \beta C$ ſ. w., woraus folgt:

$= a$, $B = b - \alpha A$, $C = -\alpha B - \beta A$, $D = -\alpha C - \beta B$, $E = -\alpha D - \beta C$ ſ. f. Hier erkennen wir als Bildungsgeſetz, daß jeder Coefficient vom dritten an durch ummirung aus den beiden Vorhergehenden entſtanden iſt, nachdem zuvor der Nächſtvorhergehende mit $-\alpha$ und der Entferntere mit $-\beta$ multiplicirt worden iſt.

3. Es ſei endlich noch

$$\frac{a + bx + cx^2}{+ \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots$$ ſo iſt

$$+ bx + cx^2 = A + \begin{matrix} B \\ \alpha A \end{matrix}\Big\} \times x + \begin{matrix} C \\ \alpha B \\ \beta A \end{matrix}\Big\} \times x^2 + \begin{matrix} D \\ \alpha C \\ \beta B \\ \gamma A \end{matrix}\Big\} \times x^3 + \begin{matrix} E \\ \alpha D \\ \beta C \\ \gamma B \end{matrix}\Big\} \times x^4 + \ldots$$

ndem wir wie vorhin ſchließen, ergibt ſich: $a = A$, $b = B + \alpha A$, $c = C + \alpha B + \beta A$, $= D + \alpha C + \beta B + \gamma A$, $o = E + \alpha D + \beta C + \gamma B$ u. ſ. w., woraus endlich $= a$, $B = b - \alpha A$, $C = c - \alpha B - \beta A$, $D = -\alpha C - \beta B - \gamma A$, $E = -\alpha D - \beta C - \gamma B$ folgt. Hier iſt nun wieder ein Bildungsgeſetz der Coefficienten zu erkennen,

indem man von dem Vierten an bei der Berechnung auf die drei vorhergehenden Coefficienten recurriren muß, welche, nachdem sie zuvor von dem Nächsten an gerechnet bezüglich mit den Faktoren $-\alpha$, $-\beta$ und $-\gamma$ multiplizirt worden sind, addirt werden um den Folgenden zu geben. — Reihen, deren Glieder in einer solchen Beziehung zu einander stehen, werden recurrente Reihen genannt.

Anmerkung. Nach derselben Methode kann übrigens auch der Fall behandelt werden, wenn der Nenner in dem Zähler aufgeht, z. B.

$$\frac{a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - x^3}{a^2 - 2ax + x^2} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

Die auf die bereits mehrfach erörterte Weise sich ergebenden Endgleichungen sind:

$a^2A = a^3$	folglich	$A = a$
$a^2B - 2aA = -3a^2$	„	$B = -1$
$a^2C - 2aB + A = 3a$	„	$C = o$
$a^2D - 2aC + B = -1$	„	$D = o$

Die späteren Coefficienten müssen sämmtlich gleich Null werden, da ihre Berechnung auf die je zwei unmittelbar Vorhergehenden, welche $= o$ sind, recurrirt, und es ist folglich

$$\frac{a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - x^3}{a^2 - 2ax + x^2} = a - x.$$

§. 6. Es sei nunmehr $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ zu entwickeln. Zur Vereinfachung der Darstellung bemerken wir vorerst, daß $\sqrt{(a^2 - x^2)} = \sqrt{\left[a^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\right]} = a\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}$ $= a\sqrt{(1 - y^2)}$ ist, indem wir nemlich $\frac{x^2}{a^2} = y^2$ setzen.

Wenn man in der so umgestalteten Aufgabe $\sqrt{(1 - y^2)}$ die Wurzelausziehung nur auf wenige Theilsätze ausführt, so stellt sich eine nach den aufsteigenden Potenzen von y^2 geordnete Reihe heraus, und man kann daher setzen:

$$\sqrt{(1 - y^2)} = A + By^2 + Cy^4 + Dy^6 + Ey^8 + \ldots.$$

Wird beiderseits ins Quadrat erhoben*), so ergibt sich:

$$1 - y^2 = A^2 + 2ABy^2 + B^2y^4 + 2(A + By^2)Cy^4 + C^2y^8 + 2(A + By^2 + Cy^4)Dy^6 + D^2y^{12} + 2(A + \ldots + Dy^6)Ey^8 + E^2y^{16} + 2(A + \ldots + Ey^8)Fy^{10} + \ldots$$

oder wenn im zweiten Gliede nach y geordnet wird:

$$1 - y^2 = A^2 + 2ABy^2 + (B^2 + 2AC)y^4 + (2BC + 2AD)y^6 + (C^2 + 2BD + 2AE)y^8 + (2CD + 2BE + 2AF)y^{10} + \ldots$$

Da nun diese Gleichung für jeden Werth von y, also auch wenn $y = o$ ist, wahr bleiben muß, so ergibt sich zunächst $A^2 = 1$, mithin $A = 1$. Nach der im vorigen §. gegebenen Anleitung weiter schließend, findet man ferner: $2AB = -1$, demnach $B = -\frac{1}{2A} = -\frac{1}{2}$; $B^2 + 2AC = o$, demnach $C = -\frac{B^2}{2A} = -\frac{1}{8}$; $2BC + 2AD = o$, daher $D = -\frac{BC}{A} = -\frac{1}{16}$; ebenso erhält man $E = -\frac{C^2 + 2BD}{2A} = -\frac{5}{128}$,

*) Im zweiten Gliede nach der Regel: $(a + b + c + d + \ldots)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 + 2(a + b + c)d + d^2 + \ldots$

$= -\frac{CD + BE}{A} = -\frac{7}{256}$ u. s. w. Nach Einsetzung dieser Werthe in die hypothetische Reihe ergibt sich:

$$\sqrt{(1-y^2)} = 1 - \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{8} - \frac{y^6}{16} - \frac{5y^8}{128} - \frac{7y^{10}}{256} - \frac{21y^{12}}{1024} - \ldots$$

emnach:

$$\sqrt{(a^2 - x^2)} = a\left[1 - \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{8} - \frac{y^6}{16} - \ldots\right]$$

Wollte man hiernach $\sqrt{7}$ bestimmen, so würde man setzen: $\sqrt{7} = \sqrt{(9-2)} = \sqrt{9\,(1-\frac{2}{9})} = 3\sqrt{(1-\frac{2}{9})}$, wonach $y^2 = \frac{2}{9} = 0{,}22222\ldots$

aher $\frac{1}{2}y^2 = 0{,}11111$

$\frac{1}{8}y^4 = 0{,}00619$

$\frac{1}{16}y^6 = 0{,}00069$

$\frac{5}{128}y^8 = 0{,}00010$

$\frac{7}{256}y^{10} = 0{,}00001$

$0{,}11810$

mithin $\sqrt{7} = 3\,(1 - 0{,}11810) = 3 \times 0{,}88190 = 2{,}64570$ auf die vier ersten Decimalstellen genau.

Zur Erzielung einer größeren Genauigkeit könnte man auf den Grund vorstehender Rechnung den Werth von y^2 aus den zwei ersten Gliedern der Reihe vorerst annähernd herleiten, indem man nämlich $\sqrt{7} = 3\,(1 - \frac{1}{2}y^2) = 3 \times (1 - 0{,}1111\ldots) = 2{,}67$ setzt. Da nun $2{,}67^2 = 7{,}1289$, so ist $7 = 2{,}67^2 - 0{,}1289$ und $\sqrt{7} = \sqrt{2{,}67^2(1 - \frac{0{,}1289}{7{,}1289})}$ $= 2{,}67.\sqrt{(1 - 0{,}0180813)}$, wonach $y^2 = 0{,}0180813$. Man hat nun:

$\frac{1}{2}y^2 = 0{,}0090406$

$\frac{1}{8}y^4 = 0{,}0000408$

$\frac{1}{16}y^6 = 0{,}0000004$

$0{,}0090818$

Daher ist $\sqrt{7} = 2{,}67 \times (1 - 0{,}0090818) = 2{,}67 \times 0{,}9909182$ $= 2{,}645751\ldots$, durch die drei ersten Glieder der Reihe auf sechs Decimalstellen genau bestimmt.

§. 7. Es sei endlich noch $\sqrt[3]{(a^3 - x^3)} = \sqrt[3]{[a^3\,(1 - \frac{x^3}{a^3})]} = a\sqrt[3]{(1 - y^3)}$ urch eine Reihe darzustellen, indem wieder $\frac{x^3}{a^3} = y^3$ gesetzt wird.

Auch hier würde durch einen vorläufigen Versuch auf dem Wege der Wurzelausziehung ie Ueberzeugung gewonnen werden, daß die Entwickelung eine nach den Potenzen der Verderlichen fortschreitende Reihe sein muß. Wir setzen daher wieder:

$\sqrt[3]{(1-y^3)} = A + By^3 + Cy^6 + Dy^9 + Ey^{12} + \ldots$,

erheben zur dritten Potenz*) und erhalten demnach:

$1 - y^3 = A^3 + 3A^2By^3 + 3AB^2y^6 + B^3y^9 + 3(A + By^3)^2Cy^6 + 3(A$
$+ By^3)\,C^2y^{12} + C^3y^{18} + 3(A + \ldots + Cy^6)^2Dy^9 + 3(A + \ldots + Cy^6$
$D^2y^{18} + D^3y^{27} + \ldots.$
$= A^3 + 3A^2By^3 + 3AB^2y^6 + B^3y^9 + 3(A^2 + 2ABy^3 + B^2y^6)\,Cy^$
$+ 3(A + By^3)\,C^2y^{12} + C^3y^{18} + 3(A^2 + 2ABy^3 + B^2y$
$+ 2ACy^6 + 2BCy^9 + C^2y^{12})\,Dy^9 + 3AD^2y^{18} + 3BD^2y^{21} +$
$3CD^2y^{24} + D^3y^{27} + \ldots.$

Wenn nun im zweiten Gliede geordnet wird, so ergibt sich:

$1 - y^3 = A^3 + 3A^2By^3 + (3AB^2 + 3A^2C)\,y^6 + (B^3 + 6ABC + 3A^2D)\,y^9 + \ldots$

woraus endlich folgt: $A^3 = 1$, also $A = 1$; $3A^2B = -1$, daher $B = -\frac{1}{3A^2}$
$= -\frac{1}{3}$; $3AB^2 + 3A^2C = 0$, demnach $C = -\frac{B^2}{A} = -\frac{1}{9}$; endlich $B^3 + 6AB$
$+ 3A^2D = 0$, mithin $D = -\frac{B^3 + 6ABC}{3A^2} = -\frac{5}{81}$ u. s. w.

Durch Substitution dieser Werthe in die hypothetische Reihe erhält man endlich:

$\sqrt[3]{(1-y^3)} = 1 - \frac{y^3}{3} - \frac{y^6}{9} - \frac{5y^9}{81} - \frac{10y^{12}}{243} - \frac{22y^{15}}{729} - \ldots$ folglich:

$\sqrt[3]{(a^3 - x^3)} = a\left[1 - \frac{y^3}{3} - \frac{y^6}{9} - \frac{5y^9}{81} - \ldots.\right]$

Hiernach ist $\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{(8-1)} = \sqrt[3]{8\,(1-\frac{1}{8})} = 2.\ \sqrt[3]{(1-\frac{1}{8})} =$
$2.\ \sqrt[3]{(1-0{,}125)}$. Als ersten Näherungswerth setzen wir $\sqrt[3]{7} = 2\,(1-\frac{y^3}{3}) = 2(1-\frac{0{,}12}{3}$
$= 1{,}916$. Da nun $1{,}916^3 = 7{,}0337433$, so ist $7 = 1{,}916^3 - 0{,}0337433 = 1{,}91$
$(1 - \frac{0{,}0337433}{7{,}0337433})$ und $\sqrt[3]{7} = 1{,}916.\ \sqrt[3]{(1 - 0{,}0047974)}$; der nunmehrige auf
vorstehende Reihe anzuwendende Werth von y^3 ist demnach 0,0047974. Die Ausrechnung gi

$\frac{y^3}{3} = 0{,}0015991\ldots$

$\frac{y^6}{9} = 0{,}0000026\ldots$ Daher $\sqrt[3]{7} = 1{,}916\,(1 - 0{,}0016017\ldots) = 1{,}916 \times 0{,}99839$
$= 1{,}9129311\ldots$ bis zur letzten Decimalstelle genau.

$\frac{5y^9}{81} = 0{,}0000000\ldots$

$0{,}0016017\ldots$

Anmerkung. Die in den beiden letzten §§ dargestellten Reihen würden sich auf kürzer
Wege ergeben, wenn man die Ausdrücke $(1 - y^2)^{1/2}$ und $(1 - y^3)^{1/3}$ nach dem binomisc
Lehrsatze entwickelt. Da die Begründung des binom. Lehrsatzes mit gebrochenen Exponen
außer dem Bereiche des Gymnasialunterrichtes gelegen ist, so möge diese Andeutung genüge

*) Nach der Anleitung: $(a + b + c + d + \ldots)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a + b)^2 c$
$3(a + b)\,c^2 + c^3 + 3(a + b + c)^2\,d + 3(a + b + c)\,d^2 + d^3 + \ldots$

Zweiter Abschnitt.

Die Entwickelung transcendenter Funktionen durch die Methode der unbestimmten Coefficienten.

Herleitung der Reihe für Exponentialgrößen.

§. 8. Es darf als bekannt vorausgesetzt werden, daß in einer Gleichung $X^Y = Z$ die Wurzel, der Exponent und die Potenzgröße in einer solchen gegenseitigen Beziehung zu einander stehen, daß aus je zwei Gegebenen derselben die dritte Größe nothwendig hergeleitet werden kann. Die Bestimmung von Z aus X und Y geschieht durch die Potenzerhebung, von X aus Y und Z durch Wurzelausziehung, und von Y aus X und Z durch Logarithmen. Wir fassen hier zunächst den ersten Fall in's Auge und bemerken, daß der Werth der Potenzgröße Z unter dem zweifachen Einflusse der Wurzel X und des Exponenten Y steht, wollen aber vorerst blos das Abhängigkeitsverhältniß von dem Exponenten Y allein feststellen, d. h. untersuchen, welche Verrichtung mit demselben vorzunehmen ist, um den Werth von Z dadurch herzustellen. Da wir also den Einfluß von X außer Frage lassen, so ist leicht vorauszusehen, daß das Resultat der Untersuchung unbestimmt ausfallen werde.

§. 9. Die Aufgabe um welche es sich zunächst handelt, ist also: a^x in einer von dem Exponenten x abhängigen Reihe darzustellen. In dieser Absicht setzen wir:

$$a^x = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots . \quad 1)$$

indem wir bemerken, daß der erste Theilsatz des zweiten Gliedes nothwendig $= 1$ sein muß, weil für den Fall daß $x = o$ angenommen wird, $a^x = 1$ wird, und auf der andern Seite jetzt alle mit x behafteten Theilsätze wegfallen, so daß die Gleichung $1 = 1$ sich herausstellt.

Lassen wir x übergehen in $x + h$ und bemerken wir dabei, daß $a^{x+h} = a^x \times a^h$ so ist auch

$$a^x \times a^h = 1 + A(x+h) + B(x+h)^2 + C(x+h)^3 + D(x+h)^4 + \ldots .$$

oder indem wir nach dem binomischen Lehrsatze verfahren, wobei wir uns jedoch blos die beiden ersten Theilsätze anzumerken brauchen:

$$a^x \times a^h = 1 + A(x+h) + B(x^2 + 2xh + ..) + C(x^3 + 3x^2h + ..) + D(x^4 + 4x^3h + ..) + \ldots \text{ oder auch}$$

$$a^x \times a^h = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots + h(A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + ..) + \text{Theilsätze mit den Faktoren } h^2, h^3 \ldots .$$

Dividiren wir diese Gleichung durch die Gleichung 1, so ist:

$$a^h = 1 + h.\frac{A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \ldots}{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots} + \frac{\text{Theilsätze mit den Fakt. } h^2, h^3 \ldots}{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots} \quad \ldots 2)$$

Es ist aber auch, wenn wir in der Gleichung 1. $x = h$ setzen:

$$a^h = 1 + hA + h^2B + h^3C + \ldots \quad 3)$$

Aus 2 und 3 folgt jetzt:

$$1 + h.\frac{A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + ..}{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + ..} + \frac{\text{Theilsätze mit den Fakt. } h^2, h^3 \ldots}{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + ..} = 1 + hA + h^2B + h^3C + \ldots \quad 4)$$

Da in diesen beiden gleichen und nach den Potenzen von h fortschreitenden Reihen die

Coefficienten der gleich hohen Potenzen von h einander gleich sein müssen,*) so ist auch $\frac{A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \ldots}{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots} = A$, also auch nach Wegbringung des Nenners:

$A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \ldots = A + A^2 x + ABx^2 + ACx^3 + \ldots$ 5)

Durch Gleichsetzen der Coefficienten der gleich hohen Potenzen von x in beiden Gliedern ergibt sich jetzt: $2B = A^2$ also $B = \frac{A^2}{2}$; $3C = AB$, demnach $C = \frac{AB}{3} = \frac{A^3}{2.3}$; $4D = AC$, mithin $D = \frac{AC}{4} = \frac{A^4}{2.3.4}$ u. s. w. Durch Einsetzung dieser Werthe in die Gleichung 1 erhält man endlich;

$$a^x = 1 + Ax + \frac{A^2x^2}{2} + \frac{A^3x^3}{2.3} + \frac{A^4x^4}{2.3.4} + \ldots \quad 6)$$

Das zweite Glied dieser Reihe enthält noch den unbestimmten Coefficienten A, ist daher unbestimmt (§. 8). Da die Größe a, welche auf den Werth der Potenzgröße a^x ebenfalls Einfluß hat, in der Reihe nicht vorkommt, so muß sie in dem unbestimmt gebliebenen Coefficienten A zu suchen sein, welcher sonach als eine Funktion von a erscheint.

§. 10. Setzen wir in Gl. 6. $x = \frac{1}{A}$, so ist

$$a^{\frac{1}{A}} = 1 + A \cdot \frac{1}{A} + \frac{A^2}{2} \cdot \frac{1}{A^2} + \frac{A^3}{2.3} \cdot \frac{1}{A^3} + \ldots \text{ oder:}$$

$$a^{\frac{1}{A}} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots$$

Wird im zweiten Gliede die Rechnung ausgeführt, und der berechnete Werth durch e bezeichnet, so ergibt sich

$$a^{\frac{1}{A}} = e = 2{,}7182818 \ldots \quad 1)$$

Nehmen wir in dieser Gleichung die Logarithmen in dem Systeme, dessen Basis e ist,**) und bemerken wir, daß in diesem Falle log. e = 1, so ist $\frac{1}{A}$ log. nat. a = 1, also A = log. nat. a, daher auch die Gleichung 6 des vorigen §. übergeht in:

$$a^x = 1 + x \cdot \text{log. nat. a} + \frac{x^2}{2} \cdot (\text{log. nat. a})^2 + \frac{x^3}{2.3} \cdot (\text{log. nat. a})^3 + \ldots \quad 2)$$

und

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \ldots \quad 3)$$

indem a in e und log. nat. a in log. nat. e = 1 übergeht. Wir bemerken nur noch, daß die Reihe 3 nichts Unbestimmtes mehr enthält, indem der Werth von e ja berechnet ist. Die Reihe 2 ist dagegen noch so lange als unbestimmt anzusehen, bis es uns auf einem andern Wege gelungen sein wird, log. a für die Grundzahl e zu berechnen, welches Gegenstand unserer nächsten Untersuchung sein wird.

*) Der Beweis beruht auf der §. 5 gegebenen Darstellung.

**) d. h. die natürlichen Logarithmen (vergl. §. 13).

Herleitung der logarithmischen Reihen.

§. 11. Indem wir uns auf den allgemeinen Fall $X^Y = Z$ (§. 8) beziehen, soll jetzt das Abhängigkeitsverhältniß des Exponenten Y von der Zahl Z festgestellt werden. Da aber Y zugleich von X abhängig ist, so muß das Resultat der Untersuchung auch hier wieder so lange unbestimmt bleiben, als wir nicht den letztern Umstand in die Betrachtung mit hineinziehen. Es steht indessen fest, daß der Logarithmus einer Zahl eine Funktion dieser Zahl ist, und muthmaßlich durch eine nach den Potenzen derselben fortschreitende Reihe dargestellt werden kann.

Die hypothetischen Gleichungen: log. $x = a + bx + cx^2 + \ldots$ und log. $x = Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots$ können uns nicht befriedigen, indem für $x = o$ also log. $o = -$ unendlich,*) das zweite Glied der ersten Gleichung in a, und in der Zweiten in Null übergeht. — Für jedes logarithmische System ist log. $1 = o$, und es interessirt uns blos, die Logarithmen der von der Einheit sich unterscheidenden Zahlen, welche durch $1 + x$ ihren allgemeinen Ausdruck erhalten, kennen zu lernen. Wollten wir jetzt log. $(1 + x) = a + bx + cx^2 + \ldots$ setzen, so würde wieder für $x = o$ die Gleichung in log. $1 = a$, d. h. $o = a$ übergehen; diese Gleichung befriedigt uns daher auch nicht, wohl aber die Folgende: log. $(1 + x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots$, indem für $x = o$ das ganze zweite Glied $= o =$ log. 1 wird.

Es sei sonach für die Grundzahl a

log. $(1 + x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots$ oder auch

$1 + x = a^{Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots}$ . . . . 1)

Indem wir hier einerseits in's Quadrat erheben, und dafür auf der andern Seite den Exponenten verdoppeln, ist jetzt:

$(1 + x)^2 = a^{2Ax + 2Bx^2 + 2Cx^3 + \ldots}$ mithin

log. $(1 + 2x + x^2) = 2Ax + 2Bx^2 + 2Cx^3 + 2Dx^4 + 2Ex^5 + \ldots$ 2)

Die hypothetische Reihe 1 muß aber auch wahr bleiben, wenn wir $2x + x^2 = 2x(1 + \frac{x}{2})$ an die Stelle von x setzen. Wir erhalten dann:

$$\log.\ (1 + 2x + x^2) = A \cdot 2x\,(1 + \tfrac{x}{2}) + B \cdot 4x^2 (1 + \tfrac{x}{2})^2 + C \cdot 8x^3 (1 + \tfrac{x}{2})^3 + D \cdot 16x^4 (1 + \tfrac{x}{2})^4 + E \cdot 32x^5 (1 + \tfrac{x}{2})^5 + \ldots$$

$$= A \cdot 2x\,(1 + \tfrac{x}{2}) + B \cdot 4x^2 (1 + x + \tfrac{x^2}{4}) + C \cdot 8x^3 (1 + \tfrac{3x}{2} + \tfrac{3x^2}{4} + \tfrac{x^3}{8}) + D \cdot 16x^4 (1 + 2x + \tfrac{3x^2}{2} + \tfrac{x^3}{2} + \tfrac{x^4}{16}) + E \cdot 32x^5 (1 + \tfrac{5x}{2} + \tfrac{5x^2}{2} + \tfrac{5x^3}{4} + \tfrac{5x^4}{16} + \tfrac{x^5}{32}) + F \cdot 64x^6 (1 + 3x + \tfrac{15x^2}{4} + \tfrac{5x^3}{2} + \tfrac{15x^4}{16} + \tfrac{3x^5}{16} + \tfrac{x^6}{64}) + \ldots$$

*) Setzen wir in der Gleichung $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ m unendlich groß, so wird $\frac{1}{a^m}$ unendlich klein, d. h. $= o$, also log. $o =$ negativ unendlich.

$= A(2x + x^2) + B(4x^2 + 4x^3 + x^4) + C(8x^3 + 12x^4 + 6x^5 + x^6) + D(16x^4$
$+ 32x^5 + 24x^6 + 8x^7 + x^8) + E(32x^5 + 80x^6 + 80x^7 + 40x^8 + 10x^9 + x^{10})$
$+ F(64x^6 + 192x^7 + 240x^8 + 160x^9 + 60x^{10} + 12x^{11} + x^{12}) + \ldots$

oder indem wir nach den Potenzen von x ordnen:

$\log.(1 + 2x + x^2) = 2Ax + x^2(A + 4B) + x^3(4B + 8C) + x^4(B + 12C$
$+ 16D) + x^5(6C + 32D + 32E) + x^6(C + 24D$
$+ 80E + 64F) + \ldots$ 3)

Da die Reihen 2 und 3 nothwendig einander gleich sein müssen, so sind es auch die Coefficienten der gleich hohen Potenzen von x und wir haben daher jetzt:

$A + 4B = 2B$, also $B = -\frac{A}{2}$; $4B + 8C = 2C$, also $C = -\frac{2B}{3} = \frac{A}{3}$; B

$+ 12C + 16D = 2D$, woraus $D = -\frac{A}{4}$; $6C + 32D + 32E = 2E$, daher

$E = \frac{A}{5}$; $C + 24D + 80E + 64F = 2F$, woraus $F = -\frac{A}{6}$ folgt, u. s. w.

Werden diese Werthe in die hypothetische Reihe 1 eingesetzt, so ergibt sich endlich:

$\log.(1 + x) = Ax - \frac{Ax^2}{2} + \frac{Ax^3}{3} - \frac{Ax^4}{4} + \frac{Ax^5}{5} - \frac{Ax^6}{6} + \ldots$ oder

$\log.(1 + x) = A.(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \ldots)$ 4).

§. 12. Eine andere Herleitung ist Folgende:

Lassen wir in der hypothetischen Reihe $\log.(1+x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 +$ x übergehen in $x + y$, so entsteht:

$\log.(1+x+y) = A(x+y) + B(x+y)^2 + C(x+y)^3 + D(x+y)^4 + \ldots$
$= A(x+y) + B(x^2 + 2xy + y^2) + C(x^3 + 3x^2y + \ldots$
$+ D(x^4 + 4x^3y + \ldots) + \ldots$ oder
$\log.(1+x+y) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots + y(A + 2Bx + 3C$
$+ 4Dx^3 + 5Ex^4 + \ldots) + Py^2 + Qy^3 + \ldots$

indem wir nämlich die Faktoren von y^2, y^3.., auf deren Ausrechnung es gar nicht ankomm kurz mit P, Q.. bezeichnen. — In dem ersten Theile des zweiten Gliedes erkennen wir ab die hypothetische Reihe wieder, wofür wir $\log.(1 + x)$ setzen können, und erhalten dann:

$\log.(1 + x + y) = \log.(1 + x) + y(A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + .$
$+ Py^2 + Qy^3 + \ldots$

Wird $\log.(1+x)$ herübergebracht, und bemerken wir daß $\log.(1+x+y) - \log.(1+$

$= \log.\frac{1+x+y}{1+x} = \log.(1 + \frac{y}{1+x})$, so entsteht:

$\log.(1 + \frac{y}{1+x}) = y(A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + \ldots) + Py^2 + Qy^3 +$

Für $\log.(1 + \frac{y}{1+x})$ ergibt sich aber noch eine zweite Reihe, wenn nämlich in der hypothetischen Reihe statt x gesetzt wird $\frac{y}{1+x}$; diese ist:

$\log.(1 + \frac{y}{1+x}) = \frac{Ay}{1+x} + \frac{By^2}{(1+x)^2} + \frac{Cy^3}{(1+x)^3} + \frac{Dy^4}{(1+x)^4} + \ldots$

Werden jetzt diese beiden letzten Reihen einander gleich gesetzt, so erhält man nach der Division durch den gemeinschaftlichen Faktor y:

$$A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+\ldots+Py+Qy^2+\ldots=\frac{A}{1+x}+\frac{By}{(1+x)^2}+\frac{Cy^2}{(1+x)^3}+\ldots$$

eine Gleichung welche für jeden beliebigen Werth von x oder y wahr bleiben muß, und worin es daher auch gestattet ist, y gleich Null zu setzen. In diesem Falle erhält man: $A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+\ldots=\frac{A}{1+x}$. Wird mit $1+x$ multiplizirt und geordnet, so entsteht hieraus:

$A+(2B+A)x+(3C+2B)x^2+(4D+3C)x^3+(5E+4D)x^4+\ldots=A$, oder

$(2B+A)x+(3C+2B)x^2+(4D+3C)x^3+(5E+4D)x^4+\ldots=0.$

Nach Anleitung des §. 5 weiter schließend, ergibt sich hieraus: $2B+A=0$, $3C+2B=0$, $4D+3C=0$, $5E+4D=0$ u. s. w. Daher $B=-\frac{A}{2}$, $C=-\frac{2B}{3}=\frac{A}{3}$, ebenso $D=-\frac{A}{4}$, $E=\frac{A}{5}$ u. s. w. Durch Einsetzung dieser Werthe in die hypothetische Reihe erhalten wir die Reihe 4 des vorigen §. wieder.

§. 13. Auf den Grund der Reihe 4 (§. 11) ist jetzt:

$$a^{A\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots\right)}=1+x \text{ oder auch } \left(a^A\right)^{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots}=1+x \quad 1)$$

Ebenso ist für eine andere Basis e

$$\left(e^{A'}\right)^{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots}=1+x \quad 2)$$

Aus der Zusammenstellung der Gleichungen 1 und 2 folgt nunmehr: $a^A=e^{A'}$ 3) woraus wir erkennen, daß der unbestimmte Faktor A (Gl. 4 §. 11) von der Zahl $1+x$ völlig unabhängig ist, und nur von der Grundzahl a des angenommenen Logarithmensystems abhängt, also irgend eine Funktion derselben ist, während der andere von der Grundzahl unabhängige Faktor $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots$ blos eine Funktion der Zahl $1+x$ ist.

Da a einen ganz willkürlichen Werth hat, so können wir diesen auch so wählen, daß $a^A=e=2{,}718281828\ldots$ (§. 10) und dann ist $e^{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots}=1+x$ oder auch, indem wir die für diese uns bekannte Basis berechneten Logarithmen, worin der Faktor $A'=1$ (Gl. 2) ist, die natürlichen nennen, weil durch Wegfall des unbestimmten Faktors die Reihe jetzt am einfachsten und natürlichsten sich gestaltet:

$$\text{log. nat. } (1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots \quad 4)$$

Daher auch, wenn wir $x=a-1$ setzen

$$\text{log. nat. } a=(a-1)-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\frac{(a-1)^4}{4}+\ldots \quad 5)$$

Aus $a^A=e$ folgt aber, wenn wir die natürlichen Logarithmen nehmen, und bemerken daß log. nat. $e=1$ ist: A. log. nat. $a=1$, also

$$A=\frac{1}{\text{log. nat. } a}=\frac{1}{(a-1)-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\frac{(a-1)^4}{4}+\ldots} \quad 6)$$

oder indem wir diesen Bruch = m setzen: $A = m$.

Auf den Grund dieser Gleichung ist jetzt die Unbestimmtheit der allgemeinen logarithmischen Reihe beseitigt, und die Reihe 4 (§. 11) geht über in:

$$\log.(1+x) = m\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ..\right) = m \times \log. \text{nat.}(1+x) \qquad 7)$$

Man findet also den Logarithmen einer Zahl für eine beliebige Basis a, indem man den natürlichen Logarithmen dieser Zahl mit einem konstanten Faktor m multiplizirt, welcher vermöge Gl. 6 aus der Basis a berechnet wird. Diesen Faktor m nennt man den Modulus, weil er gleichsam das Maß ist, durch welches die Logarithmen eines beliebigen Systems aus den durch die Reihe 4 als bekannt vorauszusetzenden Logarithmen des natürlichen Systems hergeleitet werden.

Wir bemerken nur noch, daß die natürlichen Logarithmen ihrem Erfinder, dem schottischen Baron Neper zu Ehren, auch die neper'schen Logarithmen genannt werden, aber auch die hyperbolischen heißen, wegen ihrer merkwürdigen Beziehung zur Hyperbel. Im Gegensatze zu den Natürlichen, würde man jetzt die Logarithmen eines anderen Systems die künstlichen nennen, wiewohl man darunter vorzugsweise die allgemein eingeführten auf die Grundzahl 10 bezogenen Logarithmen versteht, welche nach ihrem Begründer und Berechner Briggs, einem Zeitgenossen von Neper, die brigg'schen Logarithmen heißen.

§. 14. Die Reihen 4, 5 und 7, des vorigen §., durch welche jetzt die Möglichkeit festgestellt ist, die Logarithmen der Zahlen für ein beliebiges System zu berechnen, werden nur dann brauchbar sein, wenn eine mäßige Anzahl von Gliedern derselben das, was gesucht wird, schon so genau gibt, daß die späteren Glieder vernachläßigt werden können, d. h. wenn sie stark konvergiren. Eine solche Convergenz stellt sich aber mit Entschiedenheit nur in denjenigen Fällen heraus, wenn x kleiner als eins, also die Zahl deren Logarithmus bestimmt werden soll ein zwischen 1 und 2 gelegener unechter Bruch ist. Wenn dagegen x größer als eins ist, so findet dieß nicht mehr statt, und müßte man dann eine so große Anzahl von Gliedern berechnen, daß die Ausführung dadurch zur Unmöglichkeit wird. Es wird also jetzt unsere Aufgabe sein diese Reihen durch Umformung für alle Fälle brauchbar zu machen.

Die Reihe 7 des vorigen §.: $\log.(1+x) = m.\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots\right.$

bleibt auch wahr, wenn wir x negativ setzen; das erste Glied geht dadurch in $1-x$ über, und auf der andern Seite werden alle Theilsätze negativ, indem die geraden Potenzen von $-x$ welche positiv würden, im Subtraktionssinne erscheinen, und die ungeraden Potenzen von $-x$ aus bekannten Gründen negativ werden. Man erhält also:

$$\log.(1-x) = m\left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \ldots\right)$$

Ziehen wir diese Reihe von der vorhergehenden ab und bemerken wir daß $\log.(1+x) - \log.(1-x) = \log.\frac{1+x}{1-x}$, so erhalten wir nach Ausscheidung des gemeinschaftlichen Faktors 2 in dem zweiten Gliede:

$$\log.\frac{1+x}{1-x} = 2m.\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\right) \qquad 1)$$

Setzen wir hierin $\frac{1+x}{1-x} = y$, also $x = \frac{y-1}{y+1}$, so entsteht:

$$\log. y = 2m. \left[\frac{y-1}{y+1} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^5 + \ldots\right]$$

Vermittelst dieser Reihe können wir vorerst den Modul für das briggische System berechnen; wir setzen nämlich $y = 10$, demnach $\frac{y-1}{y+1} = \frac{9}{11}$ und bemerken daß in diesem Systeme log. 10 = 1 ist; wir erhalten dann:

$$1 = 2m\left[\frac{9}{11} + \frac{1}{3}\left(\frac{9}{11}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{9}{11}\right)^5 + \ldots\right] \text{ mithin } m = \frac{1}{2\left[\frac{9}{11} + \frac{1}{3}\left(\frac{9}{11}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{9}{11}\right)^5 + \ldots\right]}$$

Da die Reihe für diesen Fall zu wenig konvergirt, so müßte jedoch die Rechnung noch immer auf eine größere Anzahl von Gliedern ausgedehnt werden, und da ferner der Bruch $\frac{y-1}{y+1}$ der Einheit desto mehr sich nähert, je größer y angenommen wird, so ist die Reihe überhaupt nur für die Bestimmung der Logarithmen kleinerer Zahlen geeignet, für größere Zahlen dagegen zu wenig konvergent.

Da log. 10 = log. 2 + log. 5 ist, so wird für $y = 2$, der Bruch $\frac{y-1}{y+1} = \frac{1}{3}$, und für $y = 5$ wird der Bruch $\frac{y-1}{y+1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, demnach

$$1 = 2m\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\times\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \ldots\right] + 2m\left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^5 + \right]$$

Durch Ausrechnung der beiden Reihen des zweiten Gliedes könnte man den Werth von m auf eine jetzt schon bequemere Weise bestimmen; da indessen die zweite Reihe immer noch zu wenig konvergirt, so kann auf die Rechnung hier noch nicht eingegangen werden.

§. 15. Fortsetzung. Setzen wir in der Reihe 1 (§. 14) $\frac{1+x}{1-x} = \frac{y}{y-1}$, mithin (wenn wir diese Gleichung in Bezug auf x auflösen) $x = \frac{1}{2y-1}$, und bemerken wir zugleich daß log. $\frac{y}{y-1}$ = log. y − log. (y − 1) ist, so ergibt sich

$$\log. y - \log. (y-1) = 2m\left[\frac{1}{2y-1} + \frac{1}{3(2y-1)^3} + \frac{1}{5(2y-1)^5} + \ldots\right] \text{ oder auch}$$

$$\log. y = \log. (y-1) + 2m\left[\frac{1}{2y-1} + \frac{1}{3(2y-1)^3} + \frac{1}{5(2y-1)^5} + \ldots\right] \quad 2)$$

vermöge welcher Gleichung wir den Logarithmen einer Zahl finden, wenn Jener der um die Einheit kleineren Zahl bekannt ist.

Setzen wir nun $y = 2$, also $y - 1 = 1$, so ist, weil log. 1 = 0:

$$\log. 2 = 2m\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} + \ldots\right]$$

Setzen wir ferner $y = 5$, also $y - 1 = 4$ und bemerken wir daß log. $4 = \log. 2^2 = 2 \times \log. 2$ ist, so ergibt sich

$$\log. 5 = 4m.\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} + \ldots\right] + 2m.\left[\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9^5} + \ldots\right]$$

Werden die beiden Gleichungen addirt, so erhält man, da log. 2 + log. 5 = log. 10 = 1 ist, für das briggische System:

$1 = 6\,m\,.\,[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} + ..] + 2m.[\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9^5} + ...]$

$= 6\,m \times 0{,}346573590.. + 2m \times 0{,}1115717757.. = m \times 2{,}302585092..$

und es ist sonach der Modul des briggischen Logarithmensystems

$$m = \frac{1}{2{,}302585092..} = 0{,}434294482...$$

Setzen wir in der Gl. 2 successiv $y = 11, = 12, = 13...$, so ergeben sich die Loga-rithmen aller auf einander folgenden Zahlen. Für Zahlen, welche größer als 100 sind, konvergirt die Reihe so stark, daß bei der Berechnung auf sieben Decimalstellen der Theilsatz $\frac{1}{3(2y-1)^3}$, welcher erst in der achten Stelle von Einfluß ist, vernachläßigt werden kann.

Z. B. $\log.101 = \log.100 + 2m[\frac{1}{201} + \frac{1}{3} \times (\frac{1}{201})^3 + ..] = 2 + 0{,}86858896 \times (0{,}00497512$

$+ 0{,}00000004 + ..) = 2{,}0043213$. Für 1001 würde das erste Glied der Reihe den Loga-rithmen schon auf 10 Dezimalstellen richtig angeben.

§. 16. Eine noch stärker konvergirende Reihe ergibt sich, wenn man in der Reihe 1 (§. 14

$\frac{1+x}{1-x} = \frac{y^2}{y^2-1} = \frac{y^2}{(y+1)(y-1)}$ und demnach $x = \frac{1}{2y^2-1}$ setzt, und bemerkt, da

$\log.\frac{y^2}{(y+1)(y-1)} = 2\log.y - \log.(y+1) - \log.(y-1)$ ist. Dann ist

$2.\log.y - \log.(y+1) - \log.(y-1) = 2m[\frac{1}{2y^2-1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2y^2-1)^3} + ...]$ woraus folg

$$\log.(y+1) = 2.\log.y - \log.(y-1) - 2m[\frac{1}{2y^2-1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2y^2-1)^3} + ..] \quad 3)$$

Mittelst dieser Gleichung erhält man den Logarithmen einer Zahl aus den Logarithmen de beiden nächst niedrigeren Zahlen, und würde für eine vierzifferige Zahl das erste Glied d Reihe schon hinreichen, um den Logarithmen auf fünf und zwanzig Dezimalstellen genau zu erhalte

Es möge nun y eine fünfstellige Zahl vorstellen, so ist $100y + z$ der allgemeine Ausdr einer siebenstelligen Zahl, wenn z eine der Zahlen von eins bis hundert bedeutet. Nach d Gleichung 3 ist jetzt:

$\log.(100y+z) = 2.\log.(100y+z-1) - \log.(100y+z-2) - 2m[\frac{1}{2(100y+z-1)^2-1} +$

Wenn wir nun zur Herstellung des ungünstigsten Falles für y den kleinsten Werth 100 annehmen, und außerdem noch $z = 0$ setzen, so wird der Bruch $\frac{1}{2(100y+z-1)^2-1}$ u immer so klein ausfallen, daß er erst in der dreizehnten Dezimalstelle zur Geltung kommt, u demnach auf die siebenstelligen Mantissen unserer Logarithmentafeln durchaus keinen Einf mehr hat. Unter diesen Voraussetzungen kann also die Reihe aus dem zweiten Gliede v stehender Gleichung weggelassen werden, und man hat: $\log.(100y+z) = 2.\log.(100y+z-$ $- \log.(100y+z-2)$ woraus weiter folgt:

$\log.(100y+z) - \log.(100y+z-1) = \log.(100y+z-1) - \log.(100y+z-2)$

Setzen wir hierin successiv $z = 100, = 99, = ... = 2, = 1, = 0$, so ist:

$\log.(100y+100) - \log.(100y+99) = \log.(100y+99) - \log.(100y+98)$

$\log.(100y+99) - \log.(100y+98) = \log.(100y+98) - \log.(100y+97$

$\log.(100y+2) - \log.(100y+1) = \log.(100y+1) - \log.100y.$ und zul

Aus der Verbindung dieser Verhältnißgleichungen ergibt sich:

$$\log.(100y+100) - \log.(100y+99) = \log.(100y+99) - \log.(100y+98) = \ldots$$
$$= \log.(100y+1) - \log. 100y.$$

Es sei nun $\log.(100y+100) - \log. 100y = \Delta$, so vertheilt sich demnach diese Differenz unter die Zwischenglieder gleichmäßig in der Weise, daß $\log.(100y+1) = \log. 100y + \frac{\Delta}{100}$,

$\log.(100y+2) = \log. 100y + \frac{2.\Delta}{100}$, $\log.(100y+3) = \log. 100y + \frac{3.\Delta}{100}$, ...

$\log.(100y+100) = \log. 100y + \frac{100.\Delta}{100} = \log. 100y + \Delta$. Wenn daher die Unterschiede größerer Zahlen, verglichen mit diesen Zahlen selbst, sehr klein sind, so verhalten sich die Unterschiede ihrer Logarithmen wie die Unterschiede der Zahlen. Hierauf beruht die Anwendung der Proportionaltheile in den Logarithmentafeln, welche bei siebenstelligen Mantissen die Logarithmendifferenzen für die sechste und siebente Stelle der Zahl geben. Es sei z. B. $y = 59734$, also $100y = 5973400$ und $100y + 100 = 5973500$, so ist $\Delta = \log. 5973500 - \log. 5973400 = 6{,}7762289 - 6{,}7762216 = 73$ Zehnmillionstel, daher für eine beliebige Zahl innerhalb dieser Grenzen:

$$\log. 5973468 = \log. 5973400 + \frac{68 \times 73 \text{ Zehnmillionstel}}{100} = 6{,}7762266.$$

Trigonometrische Reihen.

§. 17. Verzeichnen wir uns einen spitzen Winkel X, und mit beliebigem Radius den ihm entsprechenden Bogen und die Sehne AB; führen wir in A und B die Tangenten welche sich in einem Punkte E schneiden, und verlängern wir AE bis zum Durchschnitte D mit dem verlängerten Radius XB; fällen wir endlich noch BC senkrecht auf XA, so ist in der auf diese Weise entstandenen Figur: $BC = \sin. X$ und $AD = \text{tg. } X$.

Einerseits ist nun die Kathete BC kleiner als die Hypotenuse AB und diese wieder kleiner als der Bogen AB, mithin BC < Bogen AB, d. h. $\sin. X <$ Bogen X.

Andererseits ist AE + BE größer als Bogen AB; diese Ungleichheit wird noch vergrößert, wenn wir statt der Kathete BE die Hypotenuse ED substituiren und erhalten dann: AE + ED oder AD größer als Bogen AB, d. h. $\text{tg. } X >$ Bogen X.

Die Länge des einem spitzen Winkel entsprechenden Bogens ist daher stets größer als der Sinus und kleiner als die Tangente.

1) Wenn nun x einen spitzen Winkel vorstellt, dessen Bogen wir durch x bezeichnen wollen, so ist $\frac{\sin. \frac{1}{2}x}{\cos. \frac{1}{2}x} = \text{tg. } \frac{1}{2}x$, mithin $\frac{\sin. \frac{1}{2}x}{\cos. \frac{1}{2}x} > \frac{1}{2}x$, oder $\sin. \frac{1}{2}x > \frac{1}{2}x . \cos. \frac{1}{2}x$. Wenn wir nun beiderseits mit $2 \cos. \frac{1}{2}x$ multipliziren und bemerken daß $2 . \sin. \frac{1}{2}x . \cos. \frac{1}{2}x = \sin. x$, so ist auch $\sin. x > x . \cos.^2 \frac{1}{2}x$ oder $\sin. x > x (1 - \sin.^2 \frac{1}{2}x)$, und wenn wir gar statt $\sin.^2 \frac{1}{2}x$ den größeren Werth $\left(\frac{x}{2}\right)^2$ in Abzug bringen, dann um so mehr: $\sin. x > x \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)$ oder $\sin. x > x - \frac{x^3}{4}$. Es ist aber auch $\sin. x < x$ und es muß folglich der Unterschied zwischen dem Bogen und Sinus eines spitzen Winkels x immer kleiner als $\frac{x^3}{4}$ sein.

Die Grenze welche der Bogen eines spitzen Winkels nie überschreitet, ist $= \frac{\pi}{2} = 1{,}5707963..$; setzen wir diesen Werth $= x$, so geht aus $\frac{x^3}{4} = 0{,}9682054..$ hervor, daß der größtmögliche Unterschied zwischen dem Sinus und Bogen eines spitzen Winkels nothwendig kleiner als eins sein muß, also überhaupt nur einen Bruchtheil des Radius betragen kann. Dieser für kleinere Winkel abnehmende Unterschied kann aber selbst so klein werden, daß er erst weit außerhalb der Grenze derjenigen Genauigkeit, mit welcher wir uns beim Rechnen begnügen, zur Geltung kommt. Denn setzen wir $x = 30$ Minuten $= \frac{\pi}{180 \times 2} = 0{,}0087266..$, so ist $\frac{x^3}{4}$ $= 0{,}000000166..$ und es haben daher der Sinus und der Bogen eines Winkels von 30′ in den sechs ersten Dezimalstellen einerlei Werth. — Für $x = 1$ Minute $= 0{,}00029088..$ wird $\frac{x^3}{4} = 0{,}0000000000499..$ und es stimmt jetzt der Sinus mit dem Bogen sogar noch in der eilften Decimalstelle überein. Wenn wir uns aber mit einer Genauigkeit von sieben Decimalstellen begnügen, so wird eine erst später eintretende Verschiedenheit als nicht existirend angesehen werden müssen, und können wir daher schon für Winkel bis zur Größe einiger Minuten den Sinus und Bogen als identisch ansehen, obgleich wir hier noch lange nicht bei verschwindend kleinen Winkeln angelangt sind. Wenn wir nun die Winkel von der zuletzt betrachteten Kleinheit mit dx bezeichnen, so ist jetzt sin. $dx =$ Bogen dx.

2) Ferner ist $\cos. dx = \sqrt{1 - \sin.^2 dx} = \sqrt{1 - dx^2} = 1 - \frac{dx^2}{2} - \frac{dx^4}{8} - ...$ (§. 6)

Für $dx = 1$ Min. $= 0{,}00029088..$ hat $\frac{dx^2}{2} = 0{,}0000000423..$ einen Werth, welcher erst in der achten Decimalstelle zur Geltung kommt und vernachläßigt werden kann, wenn wir uns mit sieben Decimalen begnügen. Für Winkel welche die Größe einer Minute nicht überschreiten ist daher $\cos. dx = 1$ zu setzen.

3) Endlich ist noch $\text{tg. } x - \sin. x = \frac{\sin. x}{\cos. x} - \sin. x = \frac{\sin. x}{\cos. x}(1 - \cos. x)$, oder wenn wir im zweiten Gliede $\sin. x$ durch $2 . \sin. \frac{1}{2} x . \cos. \frac{1}{2} x$ und $1 - \cos. x$ durch $2 . \sin.^2 \frac{1}{2} x$ ersetzen: $\text{tg. } x - \sin. x = \frac{4 \sin.^3 \frac{1}{2} x . \cos. \frac{1}{2} x}{\cos. x}$ — Geht x in dx über, so können wir im zweiten Gliede den Sinus mit dem Bogen $\frac{1}{2} dx$ verwechseln und außerdem $\cos. \frac{1}{2} dx = \cos. dx = 1$ setzen; es ist dann $\text{tg. } dx - \sin. dx = \frac{dx^3}{2}$, welcher Werth für $dx = 1$ Min. erst in der eilften Decimalstelle zur Geltung kommt. Es ist demnach $\text{tg. } dx - \sin. dx =$ woraus $\text{tg. } dx = \sin. dx = dx$ folgt.

§. 18. Nachstehende trigonometrische Formeln kommen bei unserer Untersuchung in Anwendung

1) $\sin. (a + b) = \sin. a. \cos. b + \cos. a. \sin. b.$ 2) $\cos. (a + b) = \cos. a. \cos. b - \sin. a. \sin. b.$

Wird die erste Gleichung durch die zweite dividirt, sodann im zweiten Gliede Zähler und Nenner durch $\cos. a. \cos. b$ dividirt, so ergibt sich: 3) $\text{tg. } (a + b) = \frac{\text{tg. } a + \text{tg. } b}{1 - \text{tg. } a. \text{tg. } b}$

Diese drei Gleichungen verwandeln sich, wenn $a = b$ gesetzt wird, in:

4) $\sin. 2a = 2. \sin. a. \cos. a$

5) $\cos. 2a = \cos.^2 a - \sin.^2 a = 1 - 2. \sin.^2 a = 2. \cos.^2 a - 1$

6) $\text{tg. } 2a = \frac{2 \text{ tg. } a}{1 - \text{tg.}^2 a}$

Setzen wir in den Gleichungen 1, 2 und 6 $a = x$ und $b = dx$, so ist

7) $\sin.(x+dx) = \sin. x. \cos. dx + \cos. x. \sin. dx = \sin. x + dx. \cos. x$ (§. 17. 1 u. 2)

8) $\cos.(x+dx) = \cos. x. \cos. dx - \sin. x. \sin. dx = \cos. x - dx. \sin. x.$

9) $\text{tg.}(x+dx) = \frac{\text{tg. } x + \text{tg. } dx}{1 - \text{tg. } x. \text{tg. } dx} = \frac{\text{tg. } x + dx}{1 - dx. \text{tg. } x}$. (§. 17. 3)

1) Herleitung der Reihen für sin. x und cos. x.

§. 19. Da die trigonometrischen Funktionen aller Winkel sich auf Jene der spitzen Winkel zurückführen lassen, so betrachten wir blos die Letzteren und nehmen also an, der Winkel x sei spitz. — Nun stehen aber der Bogen und die trigonometrischen Funktionen desselben in einem solchen gegenseitigen Abhängigkeitsverhältnisse, daß eine Veränderung des Einen auch eine Veränderung der Andern zur Folge hat, und es wird die Frage zu beantworten sein, welche Verrichtungen mit dem Bogen x vorgenommen werden müssen, um daraus den Sinus und Cosinus des Winkels x zu erhalten. Die Antwort hierauf wollen wir vorläufig in den beiden hypothetischen Reihen niederlegen:

$\sin. x = M + Nx + Px^2 + Qx^3 + \ldots$ $\cos. x = m + nx + px^2 + qx^3 + \ldots$

was ohne Anstand geschehen kann, da die Größen M, m, N, n ... noch ganz unbestimmt gelassen sind. Prüfen wir zunächst, ob diese Reihen nichts Unwahres enthalten, was zu entfernen ist, und heben hervor (weil $\sin. - x = - \sin. x$ und $\cos. - x = + \cos. x$ ist), daß wenn x negativ angenommen wird, die erste Reihe dann entschieden negativ werden, dagegen die zweite Reihe entschieden positiv bleiben muß. Dieß kann aber nur dann der Fall sein, wenn die Reihe für sin. x blos nach den ungeraden Potenzen und die für cos. x nur nach den geraden Potenzen von Bogen x fortschreitet.

Da ferner $\sin. dx = \text{Bog. } dx$ und $\cos. dx = 1$ ist (§. 17. 1, 2), so muß außerdem, um diesem Falle zu genügen, $M = 0$, $N = 1$ und $m = 1$ sein, so daß also $\sin. dx = dx + Q dx^3 + ..$ und $\cos. dx = 1 + p. dx^2 + ..$ sich herausstellt.

Nach diesen Verbesserungen erhalten die beiden hypothetischen Reihen die Form:

$\sin. x = x + Ax^3 + Bx^5 + Cx^7 + \ldots$ 1) und $\cos. x = 1 + ax^2 + bx^4 + cx^6 + \ldots$ 2)

Erheben wir dieselben in's Quadrat (§. 6. Note) und ordnen wir die Glieder der Reihen nach den Potenzen von x, so ist:

$\sin.^2 x = x^2 + 2Ax^4 + x^6(A^2 + 2B) + x^8(2AB + 2C) + x^{10}(B^2 + 2AC + 2D) + x^{12}(2BC + 2AD + 2E) + x^{14}(C^2 + 2BD + 2AE + 2F) + \ldots$

$\cos.^2 x = 1 + 2ax^2 + x^4(a^2 + 2b) + x^6(2ab + 2c) + x^8(b^2 + 2ac + 2d) + x^{10}(2bc + 2ad + 2e) + x^{12}(c^2 + 2bd + 2ae + 2f) + x^{14}(2cd + 2be + 2af + 2g) + \ldots$

Aus der Addition ergibt sich, indem wir bemerken daß $\sin.^2 x + \cos.^2 x = 1$, und im zweiten Gliede die Faktoren der gleich hohen Potenzen von x zusammenfassen:

$1 = 1 + x^2(1 + 2a) + x^4(2A + a^2 + 2b) + x^6(A^2 + 2B + 2ab + 2c) + x^8(2AB + 2C + b^2 + 2ac + 2d) + x^{10}(B^2 + 2AC + 2D + 2bc + 2ad + 2e) + x^{12}(2BC + 2AD + 2E + c^2 + 2bd + 2ae + 2f) + x^{14}(C^2 + 2BD + 2AE + 2F + 2cd + 2be + 2af + 2g) + \ldots$ 3)

welche Gleichung die weitere Folge nach sich zieht, daß in ihr die Faktoren der einzelnen Potenzen von x gleich Null sein müssen (analog der Darstellung §. 5), und woraus wir demzufolge eine Anzahl, von x unabhängiger, neuer Gleichungen zwischen den unbestimmten Coefficienten erhalten.

Da die Anzahl dieser Gleichungen jedoch geringer ist, als der darin vorkommenden unbekannten Größen, so müssen wir zur Erzielung einer bestimmten Auflösung vorerst noch neue Relationen zwischen den unbestimmten Coefficienten aufsuchen. Dieselben erhalten wir durch Herleitung von zwei Reihen für sin. 2x; die erste nach der Formel 4 (§. 18), indem wir also die beiden hypothetischen Reihen 1 und 2 mit einander und dann noch mit 2 multipliziren; und die zweite, indem wir in der Reihe 1 statt x setzen 2x. Demnach:

$$\sin.x.\cos.x = \left\{\begin{array}{l} x + Ax^3 + Bx^5 + Cx^7 + Dx^9 + Ex^{11} + Fx^{13} + .. \\ \quad + ax^3 + aAx^5 + aBx^7 + aCx^9 + aDx^{11} + aEx^{13} + .. \\ \quad\quad + bx^5 + bAx^7 + bBx^9 + bCx^{11} + bDx^{13} + .. \\ \quad\quad\quad + cx^7 + cAx^9 + cBx^{11} + cCx^{13} + .. \\ \quad\quad\quad\quad + dx^9 + dAx^{11} + dBx^{13} + .. \\ \quad\quad\quad\quad\quad + ex^{11} + eAx^{13} + .. \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad + fx^{13} + .. \text{ folglich:} \end{array}\right.$$

$$\sin.2x = 2x + 2(A+a)x^3 + 2(B+aA+b)x^5 + 2(C+aB+bA+c)x^7 + \ldots \quad 4)$$

$$\text{und } \sin.2x = 2x + A.2^3x^3 + B.2^5x^5 + C.2^7x^7 + D.2^9x^9 + \ldots \quad 5)$$

Durch Subtraktion dieser beiden Reihen von einander ergibt sich:

$$0 = x.^3\,2(A+a-2^2A) + x.^5\,2(B+aA+b-2^4B) + x.^7\,2(C+aB+bA+c-2^6C$$
$$+ x.^9\,2(D+aC+bB+cA+d-2^8D) + x.^{11}\,2(E+aD+bC+cI$$
$$+ dA+e-2^{10}E) + x.^{13}\,2(F+aE+bD+cC+dB+eA+f-2^{12}F) + \ldots \quad 6$$

Da auch hier jeder einzelne Faktor des zweiten Gliedes für sich gleich Null sein muß, s erhalten wir jetzt die erforderliche Anzahl von Gleichungen. So folgt zunächst aus 3, $1+2$ $= 0$, demnach $a = -\frac{1}{2}$; sodann aus 6, $A + a - 2^2A = 0$, mithin $A = \frac{a}{2^2-}$ $= -\frac{1}{2.3}$; hierauf wieder aus 3, $2A + a^2 + 2b = 0$, also $b = -\frac{2A+a^2}{2} - = \frac{1}{2.3.4}$; nunmehr aus 6, $B + aA + b - 2^4B = 0$, also $B = \frac{aA+b}{2^4-1} = \frac{1}{2.3.4.5}$; in ähn licher Weise ergibt sich ferner $c = -\frac{1}{2.3.4.5.6}$, $C = -\frac{1}{2.3.4.5.6.7}$ u. s. w.

Durch Einsetzung dieser Werthe in 1 und 2 ergibt sich endlich:

$$\sin.x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3.4.5.6.7} + \ldots 7) \text{ u. } \cos.x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + ..$$

§. 20. Durch Einführung eines verschwindend kleinen Bogens dx in die hypothetisch Reihen 1 und 2 und Anwendung des binomischen Lehrsatzes ergibt sich die Darstellung v einfacher, wobei zugleich der Coefficient von x in der Reihe 1 auch noch unbestimmt gelass werden kann. Indem wir denselben mit k bezeichnen, gehen wir sonach von den Reihen aus $\sin.x = kx + Ax^3 + Bx^5 + Cx^7 + Dx^9 + ..$ 1) und $\cos.x = 1 + ax^2 + bx^4 + cx^6 + dx^8 + ..$ Lassen wir x übergehen in $x + dx$, so erhalten wir vermöge §. 18. Gl. 7 und 8:

$$\sin.x + dx.\cos.x = k(x+dx) + A(x+dx)^3 + B(x+dx)^5 + C(x+dx)^7 +$$
$$\cos.x - dx.\sin.x = 1 + a(x+dx)^2 + b(x+dx)^4 + c(x+dx)^6 + \ldots$$

Nehmen wir die einzelnen Potenzerhebungen in Rücksicht auf die je zwei ersten Theilsätze v indem wir bemerken, daß die Theilsätze mit den Faktoren dx^2, dx^3 .. als verschwindend kl höherer Ordnung vernachläßigt werden können, so ist:

$$\sin.x + dx.\cos.x = k(x+dx) + A(x^3+3x^2dx) + B(x^5+5x^4dx) + C(x^7+7x^6dx) +$$
$$= kx + Ax^3 + Bx^5 + Cx^7 + \ldots + dx(k + 3Ax^2 + 5Bx^4 + 7Cx^6 +$$

und indem wir die Reihe 1 davon abziehen, sodann durch dx dividiren:

$$\cos. x = k + 3Ax^2 + 5Bx^4 + 7Cx^6 + \ldots \quad 3)$$

Ebenso folgt aus der andern Gleichung:

$$\cos. x - dx. \sin. x = 1 + a(x^2 + 2xdx) + b(x^4 + 4x^3 dx) + c(x^6 + 6x^5 dx) + \ldots$$
$$= 1 + ax^2 + bx^4 + cx^6 + \ldots + dx(2ax + 4bx^3 + 6cx^5 + \ldots)$$

und indem wir die Reihe 2 davon abziehen und durch $-dx$ dividiren:

$$\sin. x = -2ax - 4bx^3 - 6cx^5 - \ldots \quad 4)$$

Durch Gleichsetzung der Reihe 1 mit 4, sowie der Reihe 2 mit 3 erhält man:

$$kx + Ax^3 + Bx^5 + Cx^7 + \ldots = -2ax - 4bx^3 - 6cx^5 - \ldots \quad 5)$$
$$1 + ax^2 + bx^4 + cx^6 + \ldots = k + 3Ax^2 + 5Bx^4 + 7Cx^6 + \ldots \quad 6)$$

Aus 6. folgt nun zunächst: $k = 1$; aus 5: $-2a = k$, demnach $a = -\frac{k}{2} = -\frac{1}{2}$; dann wieder aus 6: $3A = a$, $A = \frac{a}{3} = -\frac{1}{2.3}$; hierauf aus 5: $-4b = A$, $b = -\frac{A}{4} = \frac{1}{2.3.4}$; auf gleiche Weise finden wir $B = \frac{b}{5} = \frac{1}{2.3.4.5}$, $c = -\frac{B}{6} = -\frac{1}{2.3.4.5.6}$ u. s. w. Durch Einsetzen dieser Werthe in 1 u. 2 ergeben sich die Reihen 7 u. 8 des vor. §.

§. 21. Für einen Winkel x, dessen Bogen die Einheit nicht übersteigt, konvergiren die beiden Reihen so stark, daß schon eine mäßige Anzahl von Gliedern ausreicht, den Sinus und Cosinus des Winkels mit der in den Tafeln üblichen Genauigkeit von sieben Dezimalstellen zu geben. — Der dem Bogen 1 entsprechende Winkel ergibt sich aber aus der Proportion $\pi : 1 = 180° : x° = 57° 36' 50''$ der Nonagesimaltheilung und überschreitet demnach 45°, bis zu welcher oberen Grenze überhaupt nur die trigonometrischen Funktionen wirklich berechnet werden, indem die trigon. Funktionen der Winkel zwischen 45° und 90° aus den verwandten Funktionen der Ergänzungswinkel sich ergeben. Die Reihen sind demnach für alle Fälle konvergent genug, für kleinere Winkel jedoch mehr als für größere. Im letzteren Falle ist es vortheilhaft, wenn man erst sin. und cos. $\frac{1}{2}$ x durch die Reihen berechnet und hieraus dann sin. und cos. x nach den Formeln 4 und 5 (§. 18) ableitet.

Es sei $x = 11° 15'$ mithin Bogen $x = 0{,}1963495408$ *)... Zur Erleichterung der successiven Potenzerhebungen von Bogen x berechnen wir vorerst eine Multiplikationstabelle, welche das 1- bis 9fache dieses Bogens enthält, und aus welcher sodann die Theilprodukte unter Anwendung des abgekürzten Multiplikationsverfahrens entnommen werden.

Multiplikations-tabelle.

1fach	0,1963495408
2 „	0,3926990817
3 „	0,5890486225
4 „	0,7853981634
5 „	0,9817477042
6 „	1,1780972451
7 „	1,3744467859
8 „	1,5707963268
9 „	1,7671458676

Berechnung von x^2 durch verkürzte Multiplikation.

0,01963495408 **)		
1,963495408		
0,01963495408	Theilprod. aus	1
1767145868	„ „	9
117809725	„ „	6
5890486	„ „	3
785398	„ „	4
176715	„ „	9
9817	„ „	5
785	„ „	4
16	„ „	8
$x^2 = 0{,}03855314218$		

Aus der successiven Multiplikation von x mit $x^2, x^3, x^5 \ldots$ ergibt sich in gleicher Weise:

$x^3 = 0{,}00756989177,$
$x^4 = 0{,}00148634464,$
$x^5 = 0{,}00029184309,$
$x^6 = 0{,}00005730325,$
$x^7 = 0{,}00001125146,$
$x^8 = 0{,}00000220923$

demnach:

*) Ergibt sich aus der Proportion: $180° : 11\frac{1°}{4} = \pi : x = \frac{\pi}{16}$.

**) Um in der höchsten Stelle des Multiplikators Einer zu erhalten, wurde derselbe 100mal größer, und dafür der Multiplikand 100mal kleiner gemacht.

sin. x.			cos. x.		
	+	−		+	−
x	0,1963495408			1,0000000000	
$\frac{x^3}{2.3}$		0,0012616486	$\frac{x^2}{2}$		0,019276
$\frac{x^5}{2.3.4.5}$	0,0000024320		$\frac{x^4}{2.3.4}$	0,0000619310	
$\frac{x^7}{2.3.4.5.6.7}$		0,0000000022	$\frac{x^6}{2.3.4.5.6}$		0,000000
$\frac{x^9}{2.3.4.5.6.7.8}$			$\frac{x^8}{2.3.4.5.6.7.8}$	0,0000000001	
	0,1963519728			1,0000619311	0,019276
	0,0012616508			0,0192766507	
		0,0012616508			
sin. 11° 15′ =	0,1950903220		cos. 11° 15′ =	0,9807852804	

Hieraus ergibt sich weiter sin. 22° 30′ = 2. sin. 11° 15′ × cos. 11° 15′ = 0,38268343230 und cos. 22° 30′ = 1 − 2. sin.² 11° 15′ = 0,92387953252; hieraus in gleicher Weise sin. 45° = 0,70710678106 und cos. 45° = 2. cos.² 22° 30′ − 1 = 0,70710678120 = sin. 45° auf neun Decimalstellen übereinstimmend.

Wenn diese Winkel in kleinen Intervallen von etwa 10 zu 10 Sekunden wachsen, so erhält man den Sinus und Cosinus derselben durch die Formeln 7 und 8 (§. 18). So findet man z. B. sin. 11° 15′ 10″ = sin. 11° 15′ + 0,00004848137 × cos. 11° 15′ = 0,1951378718 und cos. 11° 15′ 10″ = cos. 11° 15′ − 0,00004848137 × sin. 11° 15′ = 0,9807758222 hieraus dann wieder sin. und cos. 11° 15′ 20″ u. s. w.

2) Herleitung einer Reihe für tg. x.

§. 22. Obgleich die Berechnung der übrigen trigonometrischen Funktionen eines Winkels auf eine ganz einfache Weise aus dem sin. und cos. vollzogen wird, so lassen sich doch auch dafür wieder besondere Reihen aufstellen, wie es hier für tg. x noch gezeigt werden soll.

Weil tg. (− x) = − tg. x, so kann aus dem §. 19 erörterten Grunde die hypothetische Reihe nur nach den ungeraden Potenzen von x fortschreiten; außerdem wird das erste Glied derselben = x sein, weil tg. dx = sin. dx = dx (§. 17. 3).

Wir setzen demnach: $\text{tg. } x = x + ax^3 + bx^5 + cx^7 + dx^9 + \ldots$ 1)

Geht x über in 2x so ist $\text{tg. } 2x = 2x + a.\,2^3x^3 + b.\,2^5x^5 + c.\,2^7x^7 + d.\,2^9x^9 + \cdots$

Aus der Verminderung dieser Gleichung um das Doppelte der Vorhergehenden ergibt sich, indem wir noch bemerken, daß im ersten Gliede tg. 2x − 2. tg. x = tg.² x. tg. 2x ist

$\text{tg.}^2 x.\ \text{tg. } 2x = (2^3 - 2)\,ax^3 + (2^5 - 2)\,bx^5 + (2^7 - 2)\,cx^7 + (2^9 - 2)\,dx^9 + \cdots$

Eine zweite Reihe für $\text{tg.}^2 x\ \text{tg. } 2x$ ergibt sich noch, wenn das Quadrat der hypothetischen Reihe mit der Reihe für tg. 2x multiplizirt wird. Man erhält dann:

$\text{tg.}^2 x.\ \text{tg. } 2x = 2x^3 + (2^2a + 2^3a)\,x^5 + [2\,(a^2 + 2b) + 2^4a^2 + 2^5b]\,x^7 + [2\,(2ab + 2$
$+ 2^3a\,(a^2 + 2b) + 2^6ab + 2^7c].\ x^9 + \ldots$ 4)

Die Reihen 3 und 4 sind einander gleich, folglich müssen es auch die Coefficienten der gleich hohen Potenzen von x sein. Man erhält dadurch: $(2^3 - 2)\,a = 2$, $(2^5 - 2)\,b = (2^2 + 2^3)$

$(2^7 - 2)\,c = 2\,(a^2 + 2b) + 2^4a^2 + 2^5b$ u. s. f., woraus endlich folgt: $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3.5}$

$c = \frac{17}{3^2.5.7}$, $d = \frac{62}{3^2.5.7.9}$, $e = \frac{1382}{3^2.5^2.7.9.11}$, $f = \frac{21844}{3^3.5^2.7.9.11.13}$, $g = \frac{929569}{3^3.5^2.7^2.9.11.13}$

*) $\text{tg. } 2x = \frac{2.\,\text{tg. } x}{1 - \text{tg.}^2 x}$ (§. 18. 6), daher tg. 2x (1 − tg.² x) = 2 tg. x, woraus tg. 2x − 2 tg. x = tg.² x. tg.

daher $\text{tg. } x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \frac{1382x^{11}}{155925} + \frac{21844x^{13}}{6081075} + \ldots$

Ein Gesetz der fortschreitenden Gliederbildung ist aus dieser Reihe nicht zu erkennen. Auch werden die Endgleichungen, aus welchen die unbestimmten Coefficienten berechnet werden, immer verwickelter.

§. 23. Durch Anwendung des binomischen Lehrsatzes und Einführung eines verschwindend kleinen Bogens wird auch hier wieder die ganze Darstellung vereinfacht. Lassen wir nämlich in der Reihe 1) x um dx wachsen, so geht dieselbe über in:

$$\text{tg. } (x + dx) = x + dx + a\,(x + dx)^3 + b\,(x + dx)^5 + c\,(x + dx)^7 + \ldots$$

Bemerken wir daß $\text{tg. } (x + dx) = \frac{\text{tg. } x + dx}{1 - dx.\,\text{tg. } x}$ (§. 18. 9), und nehmen wir die einzelnen Potenzerhebungen in Rücksicht auf die je zwei ersten Theilsätze vor, indem die mit den Faktoren dx^2, dx^3.. behafteten Ausdrücke, als selbst wieder verschwindend klein gegen dx, vernachläßigt werden können, so ist:

$$\frac{\text{tg. } x + dx}{1 - dx.\,\text{tg. } x} = x + dx + a(x^3 + 3x^2dx) + b(x^5 + 5x^4dx) + c(x^7 + 7x^6dx) + d(x^9 + 9x^8dx) + \ldots$$
$$= x + ax^3 + bx^5 + cx^7 + \ldots + dx\,(1 + 3ax^2 + 5bx^4 + 7cx^6 + \ldots)$$
$$= \text{tg. } x + dx\,(1 + 3ax^2 + 5bx^4 + 7cx^6 + \ldots)$$

Durch Multiplikation der Gleichung mit $1 - dx.\,\text{tg. } x$ und Vernachläßigung der Reihe welche dx^2 als Faktor enthält, erhalten wir:

$$\text{tg. } x + dx = \text{tg. } x + dx\,(1 + 3ax^2 + 5bx^4 + 7cx^6 + \ldots) - dx.\,\text{tg.}^2 x.$$

Wird beiderseits tg. x abgezogen, sodann durch dx dividirt und $\text{tg.}^2 x$ herübergebracht, so ist:

$$\text{tg.}^2 x = 3ax^2 + 5bx^4 + 7cx^6 + 9dx^8 + \ldots$$

wird endlich das erste Glied dieser Gleichung durch das Quadrat der hypothetischen Reihe ersetzt:

$$x^2 + 2ax^4 + x^6\,(a^2 + 2b) + x^8\,(2ab + 2c) + x^{10}\,(b^2 + 2ac + 2d) + \ldots$$
$$= 3ax^2 + 5bx^4 + 7cx^6 + 9dx^8 + 11ex^{10} + \ldots$$

woraus $3a = 1$, $5b = 2a$, $7c = a^2 + 2b$, $9d = 2(ab + c)$, $11e = b^2 + 2ac + 2d$ u. s. w. folgt. Die Berechnung der Coefficienten aus diesen Endgleichungen führt zu den bereits im vor. §. angegebenen Resultaten.

Die Anwendung der Reihe wird schwierig, wenn man genöthigt sein sollte, bei der Berechnung über die angegebenen Glieder derselben hinauszugehen, was gewiß dann der Fall sein wird, wenn der in Theilen des Halbmessers 1 berechnete Werth von Bogen x nicht durch einen echten Bruch dargestellt ist, dessen Potenzen rasch genug abnehmen. — Wenn wir für x den größten Werth, den Bogen von $45^0 = \frac{\pi}{4} = 0{,}785398..$ annehmen, so ist $x^3 = 0{,}484473$, $x^5 = 0{,}298847$, $x^7 = 0{,}184344$, $x^9 = 0{,}113713$, $x^{11} = 0{,}070143$, $x^{13} = 0{,}043268$, demnach:

x	$= 0{,}785398$
ax^3	$= 0{,}161491$
bx^5	$= 0{,}039846$
cx^7	$= 0{,}009948$
dx^9	$= 0{,}002487$
ex^{11}	$= 0{,}000622$
fx^{13}	$= 0{,}000155$
$\text{tg. } 45^0$	$= 0{,}999947$
statt	$1{,}000000$

Wir ersehen hieraus, daß die sieben ersten Glieder der Reihe für solche Winkel, welche von 45^0 nicht viel verschieden sind, die Tangente nur auf vier Decimalstellen genau geben. In einem solchen Falle würde man daher besser erst die Tangente des halben Winkels mittelst der Reihe berechnen, und hieraus dann die Tangente des ganzen Winkels nach §. 18. 6 herleiten.

Berechnen wir demnach tg. $22^0\,30'$, setzen also $x = \frac{\pi}{8} = 0{,}39269908..$ Die successiven

ungeraden Potenzen von x ergeben sich am einfachsten in nachstehender Weise: $x^3 = x^2 \times x$, $x^5 = x^2 \times x^3$, $x^7 = x^2 \times x^5$ u. s. w., und würde demnach für $x^2 = 0{,}1542125687..$ eine Multiplikationstabelle aufzustellen sein, woraus sodann bei Anwendung des verkürzten Multiplikationsverfahrens die einzelnen Theilprodukte entnommen werden (s. Beispiel §. 21). Die Ausrechnung gibt:

$x = 0{,}3926990817$
$ax^3 = 0{,}0201863784$
$bx^5 = 0{,}0012451972$
$cx^7 = 0{,}0000777240$
$dx^9 = 0{,}0000048546$
$ex^{11} = 0{,}0000003027$
$fx^{13} = 0{,}0000000188$
$gx^{15} = 0{,}0000000012$

$\text{tg. } 22^\circ 30' = 0{,}4142135586$
auf acht Decimalstellen genau.

Aus nebenstehender Berechnung folgt jetzt:

$$\text{tg. } 45^\circ = \frac{2 \text{ tg. } 22^\circ 30'}{1 - \text{tg.}^2 22^\circ 30'} = \frac{2 \text{ tg. } 22^\circ 30'}{(1 + \text{tg.}^2 22^\circ 30')(1 - \text{tg.}^2 22^\circ 30')}$$

$$= \frac{2 \times 0{,}4142135586}{1{,}41421... \times 0{,}585786..} = \frac{0{,}8284271172}{0{,}8284271279}$$

$$= 0{,}999999987..$$

also in den Grenzen der siebenstelligen Tafeln.

3) Herleitung einer Reihe für Bogen x und Berechnung des Peripherieverhältnisses.

§. 24. In den vorausgegangenen Darstellungen wurde das Abhängigkeitsverhältniß de trigonometrischen Funktionen eines Winkels x von seinem Bogen festgestellt; der umgekehrt Fall kann aber auch stattfinden, indem der Bogen x als eine Funktion von sin. x, cos. x tg. x ... angesehen werden kann.

Indem wir jetzt den Bogen x als eine Funktion der Tangente betrachten und durch ei nach den Potenzen von tg. x fortschreitende Reihe ausdrücken wollen, urtheilen wir auf ähnlich Art wie §. 19, daß diese Reihe nur nach den ungeraden Potenzen von tg. x fortschreiten kann indem für einen negativen Winkel auch der Bogen und die Tangente negativ sind; ferner mu das erste Glied derselben tg. x sein, weil tg. dx = dx (§. 17. 3). Die hypothetische Reih ist demnach: $x = \text{tg. } x + a.\ \text{tg.}^3 x + b.\ \text{tg.}^5 x + c.\ \text{tg.}^7 x + \ldots$, also wenn x um dx wächst $x + dx = \text{tg. } (x + dx) + a.\ \text{tg.}^3 (x + dx) + b.\ \text{tg.}^5 (x + dx) + c.\ \text{tg.}^7 (x + dx) +$

Nun ist $\text{tg. } (x + dx) = \frac{\text{tg. } x + dx}{1 - dx.\ \text{tg. } x}$ (§. 18. 9) $= \text{tg. } x + dx\ (1 + \text{tg.}^2 x)$, wenn m nämlich den Bruch durch die gewöhnliche Division auflöst, und im Quotient die Theilsätze m den Faktoren dx^2, dx^3 ... vernachlässigt; daher nach Substitution dieses Werthes:

$x + dx = \text{tg. } x + dx(1 + \text{tg.}^2 x) + a\,[\text{tg. } x + dx(1 + \text{tg.}^2 x)]^3 + b\,[\text{tg. } x + dx(1 + \text{tg.}^2 x)]^5 +$

Werden im zweiten Gliede die je zwei ersten Theilsätze der einzelnen Potenzerhebungen berechn indem die übrigen wegen der Faktoren dx^2, dx^3 ... zu vernachlässigen sind, so ist jetzt:

$x + dx = \text{tg. } x + dx\ (1 + \text{tg.}^2 x) + a\,[\text{tg.}^3 x + 3.\ \text{tg.}^2 x.\ dx\ (1 + \text{tg.}^2 x)] + b\,[\text{tg.}^5$
$+ 5\ \text{tg.}^4 x.\ dx\ (1 + \text{tg.}^2 x)] + c\,[\text{tg.}^7 x + 7\ \text{tg.}^6 x.\ dx\ (1 + \text{tg.}^2 x)] +$

oder auch, wenn nach Auflösung der Klammern geordnet wird, und die Theilsätze wel $dx\ (1 + \text{tg.}^2 x)$ zum gemeinschaftlichen Faktor haben, zusammen gesetzt werden:

$x + dx = \text{tg. } x + a.\ \text{tg.}^3 x + b.\ \text{tg.}^5 x + c.\ \text{tg.}^7 x + \ldots + dx\ (1 + \text{tg.}^2 x)\,[1 + 3a.\ \text{tg.}$
$+ 5b.\ \text{tg.}^4 x + 7c.\ \text{tg.}^6 x + 9d\ \text{tg.}^8 x + \ldots]$

Wird von dieser Gleichung die hypothetische Gleichung abgezogen, und sodann durch dx divid so ergibt sich: $1 = (1 + \text{tg.}^2 x)\ (1 + 3a.\ \text{tg.}^2 x + 5b.\ \text{tg.}^4 x + 7c.\ \text{tg.}^6 x + 9d.\ \text{tg.}^8 x +$ oder nach Ausführung der Multiplikation im zweiten Gliede:

$= 1 + (1 + 3a)\,\mathrm{tg.}^2 x + (3a + 5b)\,\mathrm{tg.}^4 x + (5b + 7c)\,\mathrm{tg.}^6 x + (7c + 9d)\,\mathrm{tg.}^8 x + (9d + 11e)\,\mathrm{tg.}^{10} x + \ldots$

eraus folgt: $1 + 3a = 0$, $3a + 5b = 0$, $5b + 7c = 0$, $7c + 9d = 0$ u. ſ. w., mithin

$= -\frac{1}{3}$, $b = -\frac{3a}{5} = \frac{1}{5}$, $c = -\frac{5b}{7} = -\frac{1}{7}$, $d = -\frac{7c}{9} = \frac{1}{9}$ u. ſ. w.

ach Einſetzung dieſer Werthe in die hypothetiſche Reihe ergibt ſich endlich:

$= \mathrm{tg.}\, x - \frac{1}{3}\mathrm{tg.}^3 x + \frac{1}{5}\mathrm{tg.}^5 x - \frac{1}{7}\mathrm{tg.}^7 x + \frac{1}{9}\mathrm{tg.}^9 x - \ldots$

Durch dieſe Reihe kann das Peripherieverhältniß bis zu jedem Grade von Genauigkeit rechnet werden. Es ſei x der Bogen von $45° = \frac{\pi}{4}$, alſo $\mathrm{tg.}\, x = 1$, ſo erhält man durch nſetzen dieſer Werthe:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots \quad \text{demnach}$$

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots\right)$$

elche Reihe jedoch zu wenig konvergirt. Berechnen wir daher vorerſt tg. 30°, deſſen Bogen $= \frac{\pi}{6}$ iſt, wie folgt:

Das von einem Ecke des gleichſeitigen Dreiecks auf die gegenüberliegende Seite s gefällte th iſt offenbar $= \sqrt{s^2 - \frac{s^2}{4}} = \frac{s}{2} \cdot r3$, und in den dadurch entſtehenden kongruenten chtwinkl. Dreiecken iſt die eine Kathete dieſes Loth, die Andere $= \frac{s}{2}$ und der ihr gegenüber egende Winkel $= 30°$. Daher $\sin. 30° = \frac{s/2}{s} = \frac{1}{2}$, $\cos. 30° = \frac{s/2\, r3}{s} = \frac{1}{2} r3$,

ſo $\mathrm{tg.}\, 30° = \frac{\sin. 30°}{\cos. 30°} = \frac{1/2}{1/2 \cdot r3} = \frac{1}{r3} = \frac{1}{3} r3$. Daher:

$$-= \frac{1}{3} r3 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} r3\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3} r3\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3} r3\right)^7 + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3} r3\right)^9 - \ldots$$

$$= \frac{1}{3} r3 \left[1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + \frac{1}{9.3^4} - \ldots\right] \quad \text{folglich:}$$

$$\pi = 2r3 \left[1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + \frac{1}{9.3^4} - \ldots\right]$$

Es iſt $\frac{1}{3} = 0{,}33333\ldots$, hieraus folgt $\frac{1}{3^2} = 0{,}11111\ldots$; wird dieſer Werth wieder urch 3 dividirt, ſo ergibt ſich $\frac{1}{3^3} = 0{,}037037\ldots$, welche Berechnung leicht fortzuführen iſt. ie ſich ergebenden Werthe ſind dann noch bezüglich durch die ſucceſſiven ungeraden Zahlen 5, 7 ... zu theilen. Wollte man demnach die achtzehn erſten Glieder der Reihe ausrechnen, würde man dadurch eine Genauigkeit von neun Decimalſtellen für π erzielen, indem man hält: $\pi = 3{,}141592653\ldots$

Jahresbericht über das Schuljahr 1857—58.

A. Lehrverfassung.

I. Lehrercollegium.

Im Lehrerpersonale kamen folgende Veränderungen vor:

Der Gesang- und Musiklehrer Heinrich Drös, welcher vor einigen Jahren eine starke Fußverletzung erlitten hatte, fühlte sich in Folge derselben körperlich sehr angegriffen, so daß ihm der Gang in die Schule und aus derselben nach Haus recht beschwerlich fiel. Ungeachtet dessen ertheilte er nach wie vor mit seltener Unterbrechung regelmäßig seine Lehrstunden bis wenige Wochen vor seinem am 24. Juni 1857 erfolgten Tode. — Der am 27. Juni erfolgten Bestattung seiner Leiche wohnten nicht blos die Lehrer und Schüler des Gymnasiums bei, sondern auch viele andere hiesige Bewohner, besonders jüngeren Alters, deren künstlerisches Streben er zu fördern und zu leiten sich besonders hatte angelegen sein lassen. — Sein Diensteifer und seine Pflichttreue, die sich oft über seine Kräfte hinaus bei jeder Gelegenheit ganz uneigennützig kund gab, verdient alles Lob. Sit illi terra levis!

Die durch das Ableben des Lehrers Drös erledigten Funktionen wurden dem beim Gymnasium für die Elementarunterrichtsfächer angestellten Lehrer Heinrich Sauer zugetheilt.

Der seit dem Anfang des Wintersemesters 1856/57 zur Vollendung seines Probecursus am Gymnasium verwendete Candidat der Philologie Friedrich Brandscheid aus Wiesbaden wurde unterm 18. November 1857 zum Collaborator am hiesigen Gymnasium höchsten Orts gnädigst ernannt.

Friedrich Brandscheid, Sohn des Revisors Brandscheid bei Herzoglicher Landesregierung, geboren am 7. August 1828 zu Wiesbaden, katholischer Confession, erhielt seine Vorbildung auf dem Pädagogium und Gelehrten-Gymnasium daselbst und widmete sich von Ostern 1847 bis dahin 1849 auf der Universität zu Gießen und bis ebendahin 1850 auf der zu Würzburg dem Studium der Theologie und Philologie. Nach der im Jahre 1852 bestandenen ersten Staatsprüfung in der Philologie wurde er 1853 zur Aushülfe an das Herzogliche Gymnasium zu Hadamar dirigirt, wo er bis Frühjahr 1855 wirkte. Nach Beendigung seines ersten Probekursus begab er sich nach Frankfurt a. M. und war an mehreren der dortigen Privatanstalten beschäftigt, bis er mit Herbst 1856 an das hiesige Gymnasium dirigirt wurde.

Von Conrector H. Stoll's Anthologie griechischer Lyriker ist eine zweite Auflage (1857) erschienen.

Außerdem ist der gegenwärtige Bestand des Lehrercollegiums der im vorigjährigen Programm angegebene.

II. Unterricht.

1) Allgemeines.

Unerachtet viele Lehrer durch Krankheiten an der regelmäßigen Ertheilung des Unterrichts verhindert waren, und dem Director wegen seiner noch nicht befestigten Gesundheit von dem Arzte untersagt war, die ganze Zahl der ihm zukommenden Lehrstunden während des Sommersemesters neben seinen sonstigen Dienstgeschäften zu übernehmen, so erlitt doch der Unterricht keine ungewöhnliche Unterbrechung, da die Collegen so viel als nur irgend thunlich für die Abwesenden Lehrer bei jeder Gelegenheit einzutreten sich bereit zeigten.

2) Besonderes.

Uebersicht der Lehrgegenstände im Schuljahr 1857—58.

A. Sprachunterricht.

a) Deutsche Sprache.

VII. Cl. wöch. 4 St. Poetische und prosaische Stücke aus Rauch's Lesebuch wurden erklärt, memorirt und frei vorgetragen; eigene Nachbildungen zu mündlichen und schriftlichen Aufsätzen verarbeitet. Die Lehre vom einfachen Satz. Wöchentliche orthographische Uebungen.
Collaborator Brandscheid.

VI. Cl. wöch. 3 St. Lesen und Erklären poetischer und prosaischer Stücke aus Rauch's Lesebuch. Aufsätze. Deklamation. Collaborator Otto.

V. Cl. wöch. 2 St. Sprachliche und sachliche Erklärung ausgewählter Stücke aus Rauch's Lesebuch. Aufsätze erzählenden und schildernden Inhalts. Deklamation.
Conrector Schulz.

IV. Cl. wöch. 2 St. Erklärung ausgewählter prosaischer und poetischer Stücke aus Spieß Lesebuch. Anfangsgründe der deutschen Metrik mit Uebungen, Aufsätze, Declamation, Dramatische Leseproben. Oberschulr. Muth.

III. Cl. wöch. 2 St. Deutsche Metrik mit Uebungen: Erklärung prosaischer und poetischer Stücke aus Spieß Lesebuch und Muth's Vorschule der Dichtkunst. Größere Aufsätze. Declamation. Leseproben aus Schiller's Wallenstein und Göthe's Iphigenie. Derselbe.

II. Cl. wöch. 2 St. Das deutsche Volks- und Kunstepos. Das Wichtigste aus der Rhetorik. Schriftliche Arbeiten in gebundener und ungebundener Rede. Declamation und Uebungen im freien Vortrag. Themata der schriftlichen Arbeiten: 1) Die Weltstellung und Gliederung Mitteleuropa's. 2) Schilderung Walhallas. 3) Die drei höchsten Götter der Germanen nach ihrer Thätigkeit für die Menschen. 4) Baldurs Tod. 5) Das Nibelungenlied, ein Urbild deutscher Poesie. 6) Die hohen Schönheiten der Gudrundichtung. 7) Selbstgewählte Scene aus Parcival. 8) Die Hauptideen der Ritterpoesie. 9) Lob des Kaisers Otto. 10) Kaiser Heinrich IV. Monolog bei dem Abfall seines Sohnes Heinrich. 11) Die nothwendigen Eigenschaften eines tüchtigen Redners. 12) Die verschiedenen Gattungen der Beredsamkeit. 13) Das hohe Gut der Freundschaft. 14) Morgengebet eines Gymnasiasten.
Schulz.

I. Cl. wöch. 3 St. Die deutsche Literatur von Opitz bis auf die Gegenwart. Schriftliche Arbeiten in gebundener und ungebundener Rede. Themata derselben: 1) Das Schöne in der Natur. 2) Der Weltbaum der germanischen Sage. 3) Der Kampf auf Wigrid. 4) Argos und Attika. 5) Die Bauwerke Roms in ihrem Zusammenhang mit den verschiedenen Seiten des Staatslebens. 6) Nürnberg, eine deutsche Stadt. 7) Kaiser Heinrich I. als Neubegründer Deutschlands. 8) Die Unterrichtsgegenstände des Gymnasiums in ihrer Beziehung zu den verschiedenen Seiten der höheren Menschenbildung. 9) Die vaterländische Richtung in unserer neueren Kunst. 10) Die deutsche Baukunst. 11) Haydn. 12) Klopstock. 13) Die Wahl des Berufes. 14) Die Wahl der Universität. 15) Ueber die Gestaltung des Lebens zu einem sittlichen Ganzen. — Declamation und Uebung im freien Vortrag. Schulz.

b) Französische Sprache.

V. Cl. wöch. 4 St. Regelmäßige Formenlehre mit schriftlichen und mündlichen Uebungen aus Plötz I., 1—5. Memoriren der zu den Exercitien gehörigen Vocabeln. Stellung der persönlichen Fürwörter. Conrector Becker.

IV. Cl. wöch. 3 St. Wiederholung der regelmäßigen Formenlehre. Unregelmäßige Zeitwörter mit mündlichen und schriftlichen Uebungen aus Plötz I, 5, und Plötz II, 1—3. Uebersetzung der französischen Stücke von Plötz I, und Lüdecking I, 1—5. Memoriren der Wörter aller gelesenen und übersetzten Stücke. Derselbe.

III. Cl. wöch. 3 St. Wiederholung der ganzen Formenlehre. Uebersetzung aller Stücke aus Albrecht's Uebungsbuch II, 40—130. Lüdecking I. 1, 16—63; 2, 1—12. Memoriren von Wörtern und einigen Gedichten aus Lüdecking I. Exercitien. Derselbe.

II. Cl. wöch. 3 St. Schriftliche und mündliche Uebersetzung der letzten 100 Stücke aus Albrecht's Uebungsbuch II. Lüdecking II. 1, 6—11; 3, 9—12. Memorirübungen: Lüdecking II. 7, 16—25. Exercitien. Controle der Privatarbeiten. Derselbe.

I. Cl. wöch 3 St. Stilübungen aus Barbieux „Aufgaben zum Antibarb." 1—30. Extemporalien, Aufsätze. Memorirübungen. Molière: „L'Avare"; Corneille: „Le Cid." Ueberblick der zwei letzten Perioden der Literaturgeschichte. Controle der Privatlektüre. Derselbe.

c) Lateinische Sprache.

VII. Cl wöch 9 St. Die Formenlehre des Regelmäßigen wurde nach Putsche's Grammatik gelernt und eingeübt, die betreffenden Beispiele in Spieß' Uebungsbuch mündlich und schriftlich übersetzt. Memoriren von Vocabeln. 1 Exercit. schol. wöchentlich. Brandscheid.

VI. Cl. wöch 9 St. Wiederholung der regelmäßigen und Einübung der unregelmäßigen Formenlehre und der leichtesten syntaktischen Regeln nach Spieß II. Abth. 1, 2. (6 St.) Lesen und Memoriren der Fabeln und Erzählungen in Spieß II. Abth. 1, 3. (2 St.) Exercit. schol. (1 St.) Memoriren von Vocabeln aus Mahtzsch. Otto.

V. Cl. wöch. 9 St. Theilweise Wiederholung der Formenlehre. Casuslehre nach Putsche und Uebersetzung der betreffenden Aufgaben in Spieß' Uebungsbuch. Ex. schol. Aus C. Nepos: Miltiades, Themistocles, Aristides, Cimon, Alcibiades, Epaminondas, Timoleon, Hamilcar und Hannibal. Aus Friedemanns poet. Anthologie einige leichtere Stücke. Schulz.

IV. Cl. wöch. 9 St. Theilweise Wiederholung der Formenlehre. Casuslehre. Exercitt. domest. und schol. Im Sommer 3, im Winter 4 St. — Caesar B. G. IV. V. VI., zum Theil memorirt. 3 St. — Im Winter Stücke aus Ovid's Metamorphosen in Friedemann's poet. Anthologie. 2 St. Conrector Stoll.

Im Sommer: Lat. Metrik und Uebungen im elegischen Versmaße 1 St. Uebersetzung und Erklärung ausgewählter Elegien aus Friedemann's poet. Anthologie, nebst Memorirübungen. 2 St. Muth.

III. Cl. wöch. 10 St. Cic. oratt. Catil. I—IV und p. Archia mit Memorirübungen. 3 St. Einübung der Regeln vom Gebrauch der Tempora und Modi, von der orat. obliq. und der Participialconstruktion nebst schriftlicher Uebersetzung der betreff. Beispiele in Krebs Anleitung. 1 St. Exercitia extemp. 1 St. Privatlectüre Caesar. b. g. lib. IV, V & VI controlirt in wöchentl. 1 St. Conrector Francke.

Im Sommer: Liv. I, 1—14. 2 St. Stoll.

Lat. Metrik mit Uebungen im elegischen und sapphischen Versmaße. 1 St. — Uebersetzung und Erklärung ausgewählter Stücke aus Ovid's Metamorphosen: Ajax und Ulysses; Ceyx und Halcyone; die Musen; Ceres und Proserpina; Cäsar's Vergötterung ꝛc. nebst Memorirübungen. 2 St. Muth.

Im Winter: Liv. I. c. 15—44. 2 St. Derselbe.

II. Cl. wöch. 10 St. Nach einer Einleitung in Cicero's Leben und Schriften wurde Cicero's Laelius, dann dessen oratio p. Sestio statarisch gelesen. 3 St. wöch.

Livii Ann. lib. V. c. 31 — lib. VI. fin. mehr cursorisch, aber hin und wieder mit Uebungen im Lateinsprechen besonders für die Obersecundaner. 2 St. wöch.

Geist Aufgaben zum Uebers. aus dem Deutschen in's Latein. Abth. I. Briefe 21—25. Daneben Krebs Anleit. zum Lateinschr. ausgewählte Abschnitte über die Consec. temp. und die Modi. 1 St. wöch.

Exercitia extemporalia aus dem Latein. in's Deutsche und aus dem Deutschen in's Latein. 1 St. wöch. Professor Krebs.

Die Privatlektüre der Obersecunda begriff Sallust. coniur. Cat. u. bell. Iug. u. Liv. lib. XXI; die der Untersecunda Cic. orr. Catil. u. p. Archia u. Liv. lib. III. Krebs.

Im Sommer: Lat. Metrik mit Uebungen in den Horazischen Versmaßen. 1 St. Virgil. Bucol. I. V. VII. Virgil. Georg. I. nebst Memorirübungen. 2 St. Muth.

Mündliche und schriftliche Uebersetzung auserlesener Oden aus dem 2. und 3. Buche des Horaz. Memorirübungen. 2 St. Die lyrischen Versmaße des Horaz wiederholt mit praktischen Versuchen. 1 St. Der Director

I. Cl. wöch. 8 St. Cursorische Lectüre der Oden bis zum 5. Buche fortgesetzt; aus diesem 2 und 16. Die Episteln stat. gelesen I, 1—20. 3 St. Der Director

Cic. de officiis libb. I & II abwechselnd deutsch und latein. interpretirt; lib. III als Privatlektüre, im Sommer Cic. de natura deorum lib. I—II im Wintersemester 4 St. Schriftliche Uebersetzungen aus Nägelbach's Materialien und Stilübungen II. Heft. Nürnb. 1852. 1 St. Exercit. extemp. 1 St. Für zwei Aufsätze war die Wahl des Gegenstandes frei gegeben, für die übrigen folgende Themata bestimmt: 1) Claud. in Rufin. I, 215. Natura beatis — Omnibus esse dedit, si quis cognoverit ut. 2) Ovid. Am. 3, 65. Utendum est aetate, cito pede labitur aetas, — Nec bona tam sequitur, quam bona prima fuit. 3) Ovid. Trist. 5, 8, 31. Si numeras annos soles et nubila toto, — Invenies nitidum saepius ipsa diem. 4) Anthol. gr. Pal. 10, 39. Θησαυρὸς μέγας ἐσ ἀγαθὸς φίλος, Ἡλιόδωρε. — Τῷ καὶ τηρῆσαι τοῦτο ἐπισταμένῳ. 5) Anthol. gr. Br. III, 199, 238. Ἀγνὸ χρὴ νηοῖο θυώδεος ἐντὸς ἰόντα — Ἔμμεναι· ἁγνείη ἔστι φρονεῖν ὅσια. Francke.

d) Griechische Sprache.

IV. Cl. wöch. 5 St. Die Formenlehre bis zu d verbis auf μι; mündliche Uebersetzung der entsprechend Stücke in Halm's Lesebuch und Elementarbuch, der letzter zum Theil auch schriftlich; wöchentliche Exercitien n Dictaten. Professor Schenck.

III. Cl. wöch. 6 St. Verba liquida, die auf μι u die anomala. Gelesen wurden die entsprechenden Beispi in Halm's griech. Lesebuch, dann verschiedene Erzählung und Lucians Charon aus dem zweiten Cursus. Außerd schriftliche Uebersetzungen mehrerer Abschnitte aus Halm Elementarbuch. 3 St. Exercitia schol. 1 St. Franc

Hom. Od. α. γ. 2 St. Otto.

II Cl. wöch. 6 St. Aus Stoll's hist. Chreste Thukydid. p. 159—183; dann Platon. Apolog. So statarisch. 2 St. wöchentl.

Hom. Odyss. XV—XVII. Iliad. I & II. m cursor. aber doch mit fleißiger Berücksichtigung der Form und Constructionen, sowie des ästhet. Theils der Int pretation. 2 St. wöchentl.

Franke Aufg. zum Uebers. in's Griech. Curs. I & Nr. I. 9—14, II. 14, 15, 18, 19, 22, 23, III. 1, IV. 19—22; V. A. a. 2, 9; V. A. b. 1, 2, 13, 14, 22, 23, 26, 38, 40; c. 1, 2, 7, 14, 15; B. 1, 2, VI. 11, 15; VIII. 7, 17, 29. 1 St. wöch.

Exercitia extemp. aus dem Deutsch. in's Gri und aus dem Griech. in's Deutsche. 1 St. wöch.

Die Privatlektüre der Obersecunda begriff mehrere
ücher von Xenoph. Anab. dann von den Memorabil.;
e der Untersecunda Abschnitte aus Xenoph. Anab. nach
toll's hist. Chrest. Krebs.

I. Cl. wöch. 9 St. Nach einer Einleitung in De-
osthenes Leben und Schriften, dessen Olynth. I—III.
atar. erklärt. 2 St. wöch.

Franke Aufg. zum Uebers. in's Griech. Curs. III.
r. 11—13, 15, 16, 21—24, 42—44, 61. Daneben
xercitia extemp. aus dem Deutschen in's Griech. und
ngekehrt. 1 St. wöch. Krebs.

Sophocles Oed. Rex und Oed. Col. 3 St.

Privatim: lyrische Stücke aus Stoll's Anthol. griech.
yriker II. und Hom. Il. I—XII. Stoll.

e) Hebräische Sprache.

II. Cl. 1. Abtheil. wöch. 2 St. Nach Gesenius und
rückner die Formenlehre bis zu den Verbis contractis
ngeübt durch schriftliche und mündliche Uebersetzung ent-
rechender Beispiele. Lectüre: 1. Mos. I—II, 3. Francke.

I. Cl. 2. Abth. wöch. 2 St. Beendigung der Formen-
hre in ihren wesentlichsten Theilen, mit Analysiren und
ebersetzen entsprechender Aufgaben des Hülfsbuchs. Lectüre
esenius Leseb. Abth. I. Abschn. 3—5, g. Derselbe.

I. Cl. 1. Abth. wöch. 2 St. Vocalisiren der in Brück-
r's Hülfsbuch enthaltenen unpunktirten Stücke aus dem
uen Testament; Uebersetzung der daselbst gegebenen Bei-
iele über die unregelmäßigen Nomina, Zahlwörter und
artikeln. Lectüre: Gesenius Leseb. Abth. I. Abschn. 7
a und Abth. II. Derselbe.

f) Englische Sprache.

II. Abth. wöch. 2 St. Mündliche und schriftliche Ueber-
zung der Uebungen aus Schirm's Elementarbuch, S.
—160. Memoriren von Wörtern. Becker.

I. Abth. wöch. 2 St. Mündliche und schriftliche Ueb-
gen nach Wagner's Grammatik. Vollendung von J.
üller's Lesebuch. Gespräche. Derselbe.

B. Sachunterricht.

a) Mathematik.

VII. Cl. wöch. 4 St. Die 4 Grundoperationen mit
inen und angewandten ganzen Zahlen; Rechnen mit
rüchen, mündlich und schriftlich. Sauer.

VI. Cl. wöch. 5 St. a. Arithmetik. Mündliches
d schriftliches Rechnen mit benannten Zahlen. 3 St.
Derselbe.

b. Geometrie. Die verschiedenen Arten der Aus-
hnung, die Winkel im Allgemeinen und die des Dreiecks
sbesondere. Die Congruenz der Dreiecke und die daraus
geleiteten Eigenschaften derselben. 2 St. Derselbe.

V. Cl. wöch. 4 St. a. Arithmetik. Die Decimal-
brüche; der zusammengesetzte Zweisatz; Ketten- und Ge-
sellschaftsrechnung; die geometrische Proportion in ihrer
Anwendung auf Aufgaben des gewöhnlichen Lebens; al-
gebraische Aufgaben. 2 St. Derselbe.

b. Geometrie. Die Congruenzsätze der Dreiecke wie-
derholt und darangeknüpft: die Eigenschaften der Dreiecke
in Bezug auf Seiten und Winkel, nebst Uebertragung auf
die Vielecke. Die Projectionen, schiefen und parallelen
Linien. Das Parallelogramm; das Trapez. Die Con-
gruenz der Vielecke; gleichliegende Punkte und Linien in
denselben. 2 St. Dr. Eickemeyer.

IV. Cl. wöch. 4 St. a. Arithmetik. Wiederholung
der Zahlenlehre mit tiefer eingehender Betrachtung, beson-
ders in Betreff der Theilbarkeit der Zahlen und der damit
zusammenhängenden Neunerprobe, der gewöhnlichen und der
Decimalbrüche sowie der Rechnung mit benannten Zahlen.
Die Verhältnisse und Verhältnißgleichungen. 2 St.
Derselbe.

b. Geometrie. Wiederholung des Früheren, und im
Anschlusse daran die Congruenz der Vielecke; die gleichlie-
genden Punkte und Linien in denselben. Der Kreis, die
Linien und Winkel desselben. Uebungsaufgaben zur Wie-
derholung und Anwendung des vorausgegangenen Lehr-
stoffes. 2 St. Derselbe.

III. Cl. wöch. 4 St. a. Arithmetik. Die Quadrat-
erhebung und Ausziehung der Quadratwurzel in vollstän-
diger Ausführung. Die Lehre von den Verhältnissen und
Verhältnißgleichungen. Die entgegengesetzten Größen. Die
vier Grundoperationen mit allgemeinen Größen. Gleichungen
des ersten Grades mit einer Unbekannten. 2 St. Derselbe.

b. Geometrie. Die Lehre von der Aehnlichkeit der
Dreiecke und Vielecke. Die numerischen Eigenschaften der
Dreiecke und Vierecke. Die Inhaltsgleichheit und Bestim-
mungen des Flächeninhaltes beliebiger geradliniger Figuren.
Vergleichung des Inhaltes ähnlicher Figuren. Wo sich
Veranlassung dazu darbot, wurden zugleich Theile des
vorausgegangenen Unterrichtes wiederholt. 2 St. Derselbe.

II. Cl. wöch. 4 St. a. Arithmetik. Die Rechnung
mit Potenzen und Anwendung auf die logarithmischen
Rechnungen; die arithmetische und geometrische Progression;
Zinseszinsrechnung und Anwendung der geometrischen Reihe
auf dieselbe. Schenck.

b. Die Gleichungen des ersten Grades mit mehreren
Unbekannten, ebenso die Gleichungen des zweiten Grades.
Die Lehre von den Potenz- und Wurzelgrößen.
Dr. Eickemeyer.

b. Geometrie. Im Sommer: IIa. Fortsetzung und
Beendigung der ebenen Trigonometrie nebst Anwendung auf
eine Reihe von Aufgaben, nebst Anweisung der trigono-
metrischen Aufnahmen mittelst des Theodoliten.
Derselbe.

Im Winter: Stereometrie (nicht vollendet). Schenck.

IIb. 2 St. Uebungsaufgaben zur Wiederholung der Aehnlichkeitslehre. Die regelmäßigen Vielecke und der Kreis. Berechnung des Umfanges und Inhaltes desselben und seiner Theile. Ebene Trigonometrie (nicht beendet). Dr. Eickemeyer.

I. Cl. wöch. 2 St. Wiederholungen; der binomische Lehrsatz; Stereometrie beendigt; Anfangsgründe der analytischen Geometrie (gerade Linie, Kreis, das Wesentlichste von den Kegelschnitten). Schenck.

b) Naturwissenschaft.

VII. Cl. wöch. 2 St. Im Sommer: Beschreibung und Vergleichung ausgewählter, von den Schülern selbst gesammelter Pflanzen-Species.

Im Winter: Dieselben Uebungen angestellt mit ausgewählten Species aus der Klasse der Säugethiere. In dieser, wie in allen übrigen Klassen, wurde der Unterricht an die Betrachtung natürlicher Exemplare oder guter Abbildungen angeknüpft. Schenck.

VI. Cl. wöch. 2 St. Beschreibung und Vergleichung ausgewählter Exemplare aus den Klassen der Vögel, Amphibien und Fische, und aus dem Kreise der wirbellosen Thiere. Derselbe.

V. Cl. wöch. 2 St. Naturgeschichte der Säugethiere und Vögel, mit Rücksicht auf systematische Eintheilung. Derselbe.

IV. Cl. wöch. 2 St. Im Sommer: Botanik; im Winter: Amphibien und Fische, systematisch. Derselbe.

III. Cl. wöch. 2 St. Wirbellose Thiere, besonders Insekten. Derselbe.

II. Cl. wöch. 2 St. Anorganische Chemie nach Stöckhardt. Dr. Eickemeyer.

I. Cl. wöch. 2 St. Physik nach Greiß. Die statische und dynamische Electricität. Die Mechanik. Derselbe.

c) Geographie.

VII. Cl. wöch. 3 St. Mathematische und physikalische Vorbegriffe. Die Meere und ihre Theile; allgemeine Uebersicht der fünf Erdtheile. Sauer.

VI. Cl. wöch. 3 St. Mathematische Geographie in einer dem Standpunkte der Klasse angemessenen Ausdehnung; in gleicher Weise wurden die Erscheinungen der Erdoberfläche und in der Atmosphäre physikalisch erklärt. Die fünf Erdtheile im Allgemeinen, mit besonderer Berücksichtigung von Europa, und der Staaten. Das Herzogthum Nassau und die angrenzenden Landestheile. Kartenzeichnen. Dr. Eickemeyer.

V. Cl. wöch. 3 St. Die meisten Länder von Europa. Otto.

IV. Cl. wöch. 2 St. Europa. Schulz.

d) Geschichte.

VII. Cl. wöch. 2 St. Im Sommer: Die morgenländische und die griechische Geschichte bis zum trojanischen Kriege, biographisch. Sauer.

Im Winter: Die griechische Geschichte. Schulz.

VI. Cl. wöch. 2 St. Schluß der römischen Geschichte. Die mittlere und neuere Geschichte bis zum westphälischen Frieden. Biographisch. Brandscheid.

V. Cl. wöch. 2 St. Orientalische und griechisch-macedonische Geschichte mit steter Berücksichtigung der alten Geographie. Otto.

IV. Cl. wöch. 2 St. Römische Geschichte mit Berücksichtigung der Geographie der alten Welt. Otto.

III. Cl. wöch. 2 St. Die deutsche Geschichte bis zu Maximilian I. Schulz.

II. b Cl. wöch. 3 St. Deutsche Geschichte von Rudolph von Habsburg bis 1763. Stoll.

II. a Cl. wöch. 3 St. Geographische und historische Uebersicht der alten asiatischen Reiche. Geographie und Geschichte Griechenlands. Derselbe.

I. Cl. wöch. 3 St. Deutsche Geschichte mit theilweiser Berücksichtigung der Geschichte der übrigen europäischen Reiche von den Kreuzzügen bis 1815. Derselbe.

e) Akademische Hodegetik.

I. Cl. wöch. 2 St. im Winter. Nothwendige Vorbedingungen für den akadem. Lehrcursus, im Ganzen und Einzelnen nach den Berufsfächern. Der Director.

f) Religionsunterricht.

a. Evangelischer Religionsunterricht.

VII. & VI. Cl. comb. wöch. 2 St. Biblische Geschichte, Bibelsprüche und Gesangbuchlieder. Sauer.

V. & IV. Cl. comb. wöch. 2 St. Die Pflichtenlehre nach dem evang. Landeskatechismus. Erklärung und sorgfältige Erlernung vieler Bibelsprüche und ausgewählter Lieder aus dem Gesangbuche. Mündliche und schriftliche Predigtwiederholung. Dörr, Stadtpfarrer.

III. & II. Cl. comb. wöch. 2 St. Mündliche und schriftliche Predigtwiederholung. Den 1. und 2. Artikel der christlichen Lehre. Das Evangelium Johannis gelesen, erklärt und die wichtigsten Stellen memorirt. Derselbe.

I Cl. wöch. 2 St. Wiederholung der Predigten durch freie mündliche Vorträge der Schüler. Aus dem 2. Artikel der christlichen Lehre den 2. Abschnitt von dem Erlöser und seinen Werken, sodann einen Theil des 3. Artikels von der Heiligung. Der Hebräerbrief wurde in der Ursprache gelesen, übersetzt, erklärt, und die wichtigsten Stellen desselben wurden nach der lutherischen Uebersetzung memorirt. Derselbe.

b. Katholischer Religionsunterricht.

VII. & VI. Cl. comb. wöch. 2 St. a. Geschichte des alten Testaments nach Schuster. b. Das 3. Hauptstück des kleinen Diözesankatechismus. Roll, Pfarrer.

V. & IV. Cl. comb. wöch. 2 St. Das 3. Hauptstück
großen Diöcesankatechismus. Derselbe.
I. Cl. wöch. 2 St. Die katholische Sittenlehre nach
rtin. Derselbe.

C. Kunstübungen.

a) Kalligraphie.

VII. Cl. wöch. 3 St. VI. Cl. wöch. 2 St. Schreibungen in den vier Alphabeten, ausgeführt in Worten
Sätzen Sauer.
V. Cl. wöch. 2 St. IV.—I. Cl. wöch. 2 St. Fortzte Schreibübungen, sowie Uebungen im Schnellschreiben
Dictaten. Außerdem die griechische Schrift. Derselbe.

b) Zeichnen.

a. Oeffentlich.

VII. Cl. wöch. 2 St. Anfangsgründe im freien Handhnen. Uebungen gerader und gebogener Linien, Umrisse
facher Körperformen im Großen, an der Wandtafel.
Zeichnenlehrer Durst.
VI. Cl. wöch. 2 St. Freies Handzeichnen nach mathetischen Körpern mit Anwendung der Perspektive. Die
elnen Gesichtstheile bis zum Halbgesicht in leichter
attirung. Fragmente landschaftlicher Gegenstände
Derselbe.
V. Cl. wöch. 2 St. Wie oben in erhöhter Weise.
erstudien nach B. Adam. Köpfe, Hände und Füße
zur menschlichen Figur in halber Schattirung. Architonische Gegenstände, mit Plan und Ausführung.
Derselbe.
IV. Cl. wöch. 2 St Aufgaben wie oben mit gerten Ansprüchen. Ausgeführte Köpfe, Figuren und
dschaften. Derselbe.

b. Privatim

wurde der Zeichnenunterricht nach ausgeführten Landschaften und Köpfen, wie auch nach anatomischen Zeichnungen des menschlichen Körpers in 2 St. wöch. ertheilt; ingleichen der Unterricht einzelner plastischer Gesichtstheile auch nach einer der vorhandenen Büsten vorgenommen. Durst.

c) Gesang.

VII. & VI. Cl. wöch. 2 St. V. Cl. wöch. 1 St. Rhythmische und melodische Uebungen nach der Gesangschule von Anthes. Einübung ein- und mehrstimmiger Lieder und Choräle, sowie der betreffenden Stimmen zu den vierstimmigen Liedern in gemischtem Chor. Sauer.
IV.—II. Cl. wöch. 1 St. Rhythmische und melodische Uebungen, sowie Einübung der betreffenden Stimmen zu vierstimmigen Liedern und Chorälen in gemischtem Chor und im Männerchor. Derselbe.

D. Körperliche Uebungen.

a) Den Tanzunterricht

ertheilte während des Wintersemesters in 4 wöchentlichen Stunden Tanz- und Turnlehrer Liebich.

b) Turnübungen.

Diese leitete in der ersten Woche des Sommersemesters auf dem Turnplatz: im Winter über die Rigenvorsteher ein Derselbe.

c) Reitunterricht

wurde in besonderen Privatstunden ertheilt vom
Reitlehrer Stroh.

d) Bade- und Schwimmanstalt.

Das Baden und den Eislauf beaufsichtigte und den Schwimmunterricht ertheilte der hiesige Bürger und Damastweber G. Landmann.

Zusätze zum vorstehenden Lehr- und Stundenplan.

Der Privatfleiß und die Privatlektüre der Schüler, namentlich in den höheren Gymnasialssen unterlagen der regelmäßigen Aufsicht und Leitung der Ordinarien und Fachlehrer, die ür besondere Stunden verwendeten. — Am Unterricht im Hebräischen nahmen 11 Primaner 5 Secundaner Theil. — Den Unterricht im Englischen besuchten 24 Schüler aus den drei rsten Klassen.

III. Aesthetische Bildung.

An den im Sommersemester um 11 Uhr Vormittags, im Wintersemester um 1 Uhr erilten Privatstunden im Zeichnen nahmen 21 Zöglinge aus verschiedenen Klassen Theil. — en Tanzunterricht besuchten 24 Schüler. — Auch war es Primanern gestattet, von der undlichen Einladung der hiesigen Casino-Gesellschaft zum Besuche der Bälle Gebrauch zu chen.

IV. Disciplin.

Nennenswerthe Ueberschreitungen der Schulgesetze kamen nicht vor. Die Besuche der hüler in ihren Wohnungen fanden von Seiten der Lehrer wie in früheren Jahren statt. — e Schüler der jüngeren Klassen machten unter Begleitung ihrer Ordinarien einige Spaziernge in die Umgegend, während den Zöglingen der ersten Klasse der Gang nach Ahausen am onntage nach der Nachmittags-Kirche im Beisein eines Lehrers zu geselligen Erheiterungen im ommer bei günstigem Wetter gestattet war.

V. Physisches Wohl der Lehrer und Schüler.

Sowohl bei Lehrern wie bei Schülern kamen Erkrankungen, die den Besuch des Unterrichts hinderten, vor; am Meisten im Wintersemester, und ganz besonders im Monate December, wo die hier herrschende Grippe Viele ergriff und an's Haus fesselte. Nur sehr wenige Lehrer konnten sich eines ungestörten Wohlseins erfreuen. Doch können wir es nur mit Dank gegen die Vorsehung aussprechen, daß alle Erkrankungen einen im Ganzen kurzen und günstigen Verlauf hatten und in den letzten Monaten des Wintersemesters die Gesundheitsverhältnisse im Ganzen erfreulich waren.

B. Chronik des Gymnasiums.

Die Feier des hohen Geburtstags Seiner Hoheit des Herzogs am 24. Juli wurde in der Aula des Gymnasiums um 9 Uhr Vormittags gehalten. Die Festrede hielt Professor Krebs.

Die Aufnahme-Prüfung 1857—58 wurde am 30. April von 7 Uhr an Morgens gehalten, und in Folge derselben traten mit Anfang des Schuljahrs, das am 1. Mai feierlich eröffnet wurde, 33 neue Zöglinge ein, nämlich 18 in VII, 1 in VI, 2 in V, 5 in IV, 6 in III und 1 in II. Außerdem gesellten sich zu den Tertianern noch 2 Schüler vom Herzogl. Pädagogium zu Dillenburg. Die VI erhielt noch im Anfang des Wintersemesters einen Zuwachs durch einen Schüler aus dem Realgymnasium zu Wiesbaden, dessen Vater während des Schuljahres hierher versetzt worden war.

Die Herbstprüfung fand am 11. und 12. September Vor- und Nachmittags statt, worauf die vierwöchigen Herbstferien folgten. Außer diesen fanden noch zu Pfingsten 8 und zu Weihnachten 11 Tage Ferien statt.

Bei dem am Reformationsfeste gehaltenen Abendmahl in der Stadtkirche betheiligten sich die evangelischen Lehrer und Schüler.

Die 8 Oberprimaner, welche zu der am 3. Februar v. J. begonnenen Maturitätsprüfung zugelassen worden, bestanden dieselbe, und erhielten am 7. April, am Schlusse des öffentlichen Redeakts ihre Entlassung. Ihre Namen sind: Wilhelm Bauer von Herborn, Wilhelm Haas und Adolph Halbey von Weilburg, Alwin Lade aus Hirschberg, W. Oppermann aus Rüdesheim, Emil Schmidt aus Saalfeld, Adolph Senfft und Gustav Wolf aus Usingen.

Auch zu der Maturitätsprüfung vor Ostern l. J. sind 8 Primaner zugelassen worden, deren Prüfung noch im Gange ist.

C. Statistische Uebersicht.

a) Der Schüler.

Classen.	Stand während des Schuljahres.				Abgang.				Stand am Schlusse des Schuljahres.			
	Evang.	Kath.	Israel.	Summ.	Evang.	Kath.	Israel.	Summ.	Evang.	Kath.	Israel.	Summ
I.	18	2	—	20	—	—	—	—	18	2	—	20
II.	18	—	—	18	2	—	—	2	16	—	—	16
III.	23	—	—	23	2	—	—	2	21	—	—	21
IV.	14	1	1	16	1	—	—	1	13	1	1	15
V.	17	1	1	19	—	—	—	—	17	1	1	19
VI.	16	—	—	16	1	—	—	1	15	—	—	15
VII.	23	1	—	24	1	—	—	1	22	1		23
	129	5	2	136	7	—	—	7	122	5	2	129

b) Bibliothek und Apparate.

Die Verwaltung der Bibliothek führte der Collaborator Otto. Zum Ausleihen de Bücher waren 2 Stunden an 2 Wochentagen regelmäßig bestimmt. Zur Vermehrung de Bibliothek waren von Hoher Landesregierung 300 fl. im verflossenen Schuljahr bewilligt un verwendet worden. In gleicher zweckdienlicher Weise wurden die für naturhistor. und physikal Apparate verwilligten Summen verwendet.

D. Anfang des neuen Schuljahres.

Das neue Schuljahr beginnt am 21. April. An diesem Tage findet die Aufnahmeprüfung er zum Eintritt ins Gymnasium neu Angemeldeten auf Grund ihrer Schulzeugnisse von 7 Uhr Morgens an statt. Die Eröffnung des Sommersemesters und die förmliche Aufnahme der euen Schüler geschieht den Tag nach der Prüfung in der allgemeinen Versammlung der Lehrer nd Schüler um 7 Uhr Vormittags.

E. Verzeichniß der Schüler des Gymnasiums im Schuljahr 1857—58.

(Die mit * bezeichneten Schüler sind im Laufe des Schuljahres ausgetreten.)

Primaner.

A.

Becker, August, Homburg.
v. Dungern, Max, Frankfurt.
Hertling, Daniel, Strüth.
Krämer, Christian, Weilburg.
Lautz, Karl, Dillenburg.
Schenck, Albert, Dillenburg.
Schmidt, Karl, Herbornseelbach.
Seybert, Louis, Oberneisen.

B.

1) Albert, Karl, Runkel.
2) Ammann, August, Weilburg.
3) Cäsar, Wilhelm, Blessenbach.
4) Emminghaus, Bernhard, Rennerod.
5) Endres, Friedrich, Nochern.
6) Fenner von Fenneberg, Daniel Joseph, Weilburg.
7) Fuchs, Aug., Brandoberndorf.
8) Klein, Heinrich, Drommershausen.
9) Langsdorff, Herm., Limburg.
10) Mencke, Albert, Marienberg.
11) Vogel, August, Weilburg.
12) Zickendrath, Karl, Bergebersbach.

Secundaner.

A.

Bingel, Eduard, Obernhof.
Hartmann, Karl, Eppstein.
Kempf, Friedrich, Herborn.
Lade, Friedrich, Dillenburg.
Metzler, Wilhelm, Weilburg.
Reinewald, Friedrich, Kirberg.

7) Schenck, Friedrich, Dillenburg.
8) Schmidt, Gustav, Nastätten.

B.

1) Becker, Albert, Homburg.
2) Diels, Wilhelm, Herschbach.
3) *Hatzfeld, Ottmar, Essershausen.
4) Klein, Louis, Drommershausen.
5) Kröber, Karl, Idstein.
6) Lade, Karl, Dillenburg.
7) Lautz, Adolph, Dillenburg.
8) *Schmidtborn, Friedrich, Wiesbaden.
9) Stritter, Wilhelm, Weilburg.
10) Will, Heinrich, Homburg.

Tertianer.

Buderus, Albert, von der Christianshütte bei Schupbach.
Gießе, Wilhelm, Montabaur.
Güll, Ludwig, Runkel.
Haas, Rudolph, Dillenburg.
Hild, Ferdinand, Driedorf.
Lommel, Wilhelm, Weilburg.
v. Marschall, August, Weilburg.

8) Mencke, Rudolph, Marienberg.
9) Metzler, Otto, Weilburg.
10) *Mies, Julius, Weilburg.
11) Moser, Christian, Weilburg.
12) Musset, Franz, Marienberg.
13) Rhod, Edmund, Marienfels.
14) Rodrian, Edm., Baden-Baden.
15) Roth, Robert, Weilburg.
16) Stahl, Wilhelm, Weinbach.
17) Steiger, Heinrich, Limburg.
18) Stein, Otto, Runkel.
19) v. St. George, K., Braubach.
20) Strack, Heinrich, Weilburg.
21) Weil, Friedrich, Weilmünster.
22) Westerburg, W., Laufenselten.
23) *Winter, L., Langenschwalbach.

Quartaner.

Brinkmann, Julius, Weilburg.
Eickemeyer, Joseph, Weilburg.
Heberlein, Christian, Braubach.
Hein, Karl, Montabaur.
Heupel, Heinrich, Donsbach.
v. Hirsch, Julius, Würzburg.

7) Keller, Christian, Nauheim.
8) Metzler, Theodor, Weilburg.
9) Moser, August, Weilburg.
10) Müller, Adolph, Usingen.
11) Nöthlich, Emil, Weilburg.
12) Peuser, Wilhelm, Merenberg.
13) Quentel, Eugen, Weilburg.
14) *Schmidtborn, Ferdinand, Wiesbaden.
15) Stöckicht, Karl, Weilburg.
16) Thilenius, Otto, Höchst.

Quintaner.

Appel, Wilhelm, Weilburg.
Diels, Karl, Herschbach.
Dienstbach, Julius, Weilburg.
Dött, August, Weilburg.
Föhring, Karl, Weilburg.
Hatzfeld, Richard, Essershausen.
Hauch, Heinrich, Weilburg.

8) Hemming, Georg, Weilburg.
9) Kegel, Karl, Gaudernbach
10) Mühl, Wilhelm, Weilburg.
11) Oberwinder, H., Weilburg.
12) Schmidt, Wilhelm, Saalfeld in Sachsen-Meiningen.
13) Schraudebach, Rudolph, Weilmünster.
14) Schraudebach, Karl, Weilmünster.
15) Schulz, Karl, Weilburg.
16) Theis, Wilhelm, Weilburg.
17) Wallach, Eugen, Weilburg.
18) Weil, August, Weilburg.
19) Wingenroth, Ad., Weilburg.

Sextaner.

1) *Arnold, Georg, Wiesbaden.
2) Bartmann, Emil, Weilburg.
3) Baurhenn, Ferd., Weilburg.
4) Baurhenn, Albert, Weilburg.
5) Corcilius, Ernst, Grenzhausen
6) Emminghaus, Aug., Rennerod.
7) Halbey, Hermann, Weilburg.
8) Krück, Alfred, Weilburg.
9) Moser, Karl, Weilburg.
10) Nöthlich, Albert, Weilburg.
11) Ostwald, Christian, Weilburg.
12) Rompf, August, Weilburg.
13) Roth, Wilhelm, Weilburg.
14) Rübsamen, Wilh., Weilburg.
15) Schmidt, Leopold, Weilburg.
16) Strobel, Karl, Weilburg.

Septimaner.

1) Andrée, Emil, Weilburg.
2) Appel, Karl, Weilburg.
3) Bernhardt, Karl, Weilburg.
4) Braun, August, Weilburg.
5) Brühl, Joseph, vom Windhof bei Weilburg.
6) Döring, Karl, Weilburg.
7) Dörr, Hermann, Weilburg.
8) Göhring, Wilhelm, Weilburg
9) Görtz, Julius, Weilburg.
10) Götz, Karl, Weilburg.
11) Hermanni, August, Leun.
12) Hermanni, Wilhelm, Leun.
13) Krebs, Albert, Weilburg.
14) Kremer, Wilhelm, Odersbach.
15) Liebich, Julius, Weilburg.
16) v. Reichenau, Karl, Weilburg.
17) Rohs, Emil, Weilburg.
18) Rosenkranz, Rob., Weilburg
19) Schlicht, Friedrich, Weilburg
20) *Schmidtborn, Ernst, Wiesbaden.
21) Schneider, Wilh., Weilburg.
22) Schraudebach, August, Weilmünster.
23) Steiger, Karl, Limburg.
24) v. Ziegesar, Herm., Weilburg

F. Frühlingsprüfung.

Die öffentliche Prüfung wird am 29. März Vor- und Nachmittags und am 30. März Vormittags von 9 Uhr an gehalten werden. Die Schulfeierlichkeit findet am 30. März um 3 Uhr in der Aula statt, in folgender Ordnung:

1) Musik. Thema: „An Alexis send' ich dich," mit Variationen, arrangirt vom Musiklehrer vorgetragen vom Musikchor des Gymnasiums.
2) Declamation der Septimaner Dörr und v. Ziegesar, des Sextaners Corcilius und des Quartaners Heupel.
3) Französische Rede des Abiturienten Becker über das Thema: Romanticisme et Classicisme de la littérature française.
4) Lobgesang von Schnabel, vierstimmiges Chorlied.
5) Lateinische Rede des Abiturienten Seyberth über das Thema: Non doctrina potius quam voluntatis honestate vera hominis continetur excellentia ac dignitas.
6) Zweistimmiger Knabenchor. (VI und VII.)
7) Das Felsenkreuz von Kreutzer, vierstimmiges Chorlied.
8) Der Krieg auf der Wartburg, vorgetragen vom Tertianer Stein.
9) Gesang: Die Sehnsucht von Schiller, Musik von Romberg, gesungen vom Primaner Albert.
10) Das deutsche Haus, ein Gedicht, verfaßt und vorgetragen vom Abiturienten Krämer.
11) Gesang: Arie aus der Zauberflöte von Mozart, gesungen vom Primaner Mencke.
12) Der Abiturient v. Dungern redet „über das menschliche Leben als ein sittliches Ganze" und nimmt im Namen der Abgehenden von der Anstalt Abschied.
13) Vaterlandslied von Marschner, vierstimmiger Chorgesang.
14) Gesang: Unser Vaterland, gesungen vom Quintaner Schmidt.
15) Bundeslied von Mozart, vierstimmiger Männerchor, gesungen von I.
16) Vierstimmiges Chorlied, gesungen von sämmtlichen Schülern.

Sowohl zum Prüfungsact als zu der Schulfeierlichkeit ladet ergebenst ein

Der Director **Metzler.**

DE

MAXIMIS ET MINIMIS

FUNCTIONUM INVENIENDIS

DISSERTATIO

QUAM

VENIA ET CONSENSU

MAXIME VENERANDI SACRI SYNEDRII

WEXIONENSIS

PUBLICE PROPONIT

JOHAN EKSTRAND,

Philos. Magister et ad Reg. Gymn. Wexion. Philos. Lector,

RESPONDENTE

JOSEPHO NORDLUND,

Cive Gymn. Wexion.

IN AUDITORIO REG. GYMN. WEXION. MAJORI
DIE XXVII MAJI ANNI MDCCCXXVI.

WEXIONIÆ,

Litteris Reg. Privil. Gymn. Typogr.

Corrigenda:

P. 3 v. 14, $1 : \frac{dx}{dv}$ lege $1 : \frac{dv}{dx}$; p. 4 v. 12 ceteri, v. 15
cesse; p. 6 v. 10 æquationi; p. 8 v. 12 $2mx$ lege $2mxy$;
v. 1 numeratoris; p. 13 v. 2 oriuntur; p. 16 v. 13 et 1

gatio valorum, qui ***maximi*** vel ***minimi*** dicuntur, quorum
sit functio quædam data, permagni sane est momenti
ilitatis materies; a re igitur fore non putaverim, si, cum
men editurus sim Mathematicum, hanc susceperim tra-
lam.

§. 1. Quando x in functione quadam $v=fx$ valores suc-
ve tribuuntur varii, si mox crescit hæc functio, diminuitur
deinde; illa functionis conditio, quæ incrementa a decre-
is separat, functionis dicitur ***maximum;*** Si vero fx mi-
r primum, crescit vero deinde, valor ille, qui hos dis-
nat status, a ***minimo*** nomen habet.

Si p igitur est valor particularis, qui, dum in locum ip-
x supponitur atque substituitur, ***maximum*** efficiat vel
num, ipsa quoque functio, si adsit illud, major, si hoc,
bus istis minor necessario erit valoribus, qui ei compe-
t, sumtis atque pro x substitutis aliis quibusdam quan-
bus, $(p-\delta)$, $(p+\delta)$, quarum altera esset proxime mi-
altera vero proxime major p: proxime dico, idque con-
, quoniam functiones sunt, has quæ sæpius admittant vices.

Ex his itaque liquet hanc esse, cui in conditionibus, qui-
maximum minimumve functionis continetur, determinan-
nos committere debemus, viam, ut valori, quo maximum
numve functionis absolvi ponatur, illum, qui istum præ-
et subsequatur statum, comparemus valorem.

§. 2. Sit v functio proposita, x variabilis, ex qua pendeat,
itas et p valor ipsius x, qui maximum vel minimum ef-

ficiat functionis. Si v' novum ipsius v repræsentat valor qui provenit, posito $x=p+\delta$, ex principiis, quibus ni calculus, sic dictus differentialis, erit

$$v'=v+\frac{dv}{dx}(\delta)+\frac{d^2v}{2.dx^2}(\delta)^2+\text{etc.} \qquad \text{A).}$$

Status ipsius v, qui $x=p-\delta$ respondet, ex v' facili negoti rivatur, scribendo enim $-\delta$ in loco ipsius $+\delta$ illumqu insigniendo, habebimus

$$v_{,}=v+\frac{dv}{dx}(-\delta)+\frac{d^2v}{2.dx^2}(-\delta)^2+\text{etc.} \qquad \text{B).}$$

Differentiæ, quæ inter statum ipsius *maximi* vel mi (v) et antecedentem ($v_{,}$) et subsequentem (v') interce erunt itaque

$$v'-v=\frac{dv}{dx}(\delta)+\frac{d^2v}{2.dx^2}(\delta)^2+\text{etc.} \qquad \text{C).}$$

$$v_{,}-v=\frac{dv}{dx}(-\delta)+\frac{d^2v}{2.dx^2}(-\delta)^2+\text{etc.} \qquad \text{D).}$$

§. 3. Expressiones v' $v_{,}$ ejusdem esse debere signi ut differentiæ $v'-v$ & $v_{,}-v$, si maximum adsit, utræqu beant —, si vero adsit minimum, simul gaudeant +, videt quisque; in statu enim *maximi* erit semper $v>v'$, v et in casu *minimi* semper habebimus $v<v'$ $v<v_{,}$; quo dem vel ex ipsa maximi minimive definitione sequitur.

§. 4. Si seriem (C) diligentius examinemus eamqu mam induamus sequentem:

$$\left(\frac{dv}{dx}+\frac{d^2v}{dx^2}\delta+\text{etc.}\right)\delta,$$

per se patet, quo minor sit quantitas δ, eo quoque m fieri terminos $\frac{d^2v}{2dx^2}\delta$, $\frac{d^3v}{2.3dx^3}\delta^2$, etc., ita ut, δ data quacu quantitate minore posita, ipsi quoque fiant minores et, evanescant omnino. Unde seqvitur, terminum primum ita per posse assumi, ut summam omnium, qui sequantur

um superet. Et quum idem etiam de serie (D) va-
quis est, qui non videat, signum utriusque seriei a primo
m termino pendere debere. Series vero utraque signi
jusdem, si maximum adsit vel minimum (§. 3); termi-
taque primus in hoc casu signo gaudeat necesse est eo-
Signum autem idem in serie utraque primo competere
t termino, nisi exponens ipsius dignitatis δ numerus sit
vel fractio, quæ, in formam simplicissimam reducta, pari
at numeratore, et per se itaque signorum non efficiat va-
nem; coëfficientes enim differentiales $\frac{dv}{dx}$, $\frac{d^2v}{dx^2}$, $\frac{d^3v}{dx^3}$ etc.,
e functiones ipsius p, signum in serie utraque semper
nt idem. In statu itaque maximi vel minimi coëfficiens
entialis $\frac{dv}{dx}$, qui impari ipsius δ potentia afficiatur vel $=o$
i functio est integra, vel in 1: $\frac{dx}{dv}\left(\text{h.e}\frac{dx}{dv}\right)=o$ reduci possit
se est, si functio ipsa formam habet fractionis. Si autem
el $\frac{dx}{dv}=o$ vere et semper erit, $x=p$ posito; p quoque
æquationis $\frac{dv}{dx}=o$, vel $\frac{dx}{dv}=o$ sit necesse est. Conditio
, cui imprimis satisfacere debet quantitas p, si v
mum efficiet vel minimum, ea erit, ut æquationi $\frac{dv}{dx}$ vel
o faciat fidem. Præterea p, in locum ipsius x suppositum
e substitutum, coëfficientem non annihilet vel infinitum
at differentialem $\frac{d^2v}{dx^2}$ ordinis paris, vel, si accideret hoc,
l quoque annihilet necesse est vel infinitum reddat $\frac{d^3v}{dx^3}$,

non vero $\frac{d^4v}{dx^4}$, ita ut primus, non evanescens, coëfficiens ferentialis ordinis semper sit paris; ex iis enim, quæ supr cuimus, constat primum ordinisque imparis terminum s rum (C)(D), quibus differentiæ continentur, semper $=0$ debere; Si itaque coëfficientes, ordinis quoque paris evanesc simul, series utraque evaderet $=o$ et differentiæ, quæ inter v v & v' intercedere ponuntur et re vera adesse debent, in nih recideren, quod absurdum est. Quum insuper signum ut que seriei, quod $-$ sit necesse est, si maximum adsit, $+$ in casu minimi (§. 3), a primo ipsarum termino, ut sub tio hujus §. demonstravimus, pendet; p denique coëfficie differentialem ordinis paris, ante quem ceteræ evanescu quo itaque primus serierum terminus continetur, negati si casus adsit maximi, si contra fuerit, positivum effici eesse est.

§. 5. Si, quæ dicta sunt in §. 4, paucis comprehe et in compendium quasi mittere volumus, hæc oritur in ximis minimisve determinandis regula servanda:

"Primum quære coëfficientem differentialem $\frac{dv}{dx}$ *ordin paris; radices deinde, quæ satisfacere possunt* $\frac{dv}{dx}=o$, *vel* $\frac{d^2v}{dx^2}$ *etc. determina et singulas, dum fuerint inventæ, in dem in locum ipsius x suppone atque substitue, usque coëfficientem inveneris differentialem, non evanescentem. ximo respondet radix, si coëfficiens hic ordinis est pa negativus; si vero positivus est, minimum habebis. si conditiones non simul incidunt, nec minimum aderi maximum."*

§. 6. In dijudicando an maximum vel minimum nec ne, et, si adesset, in perquirendo utrum sit, opu

necessario ad coëfficientem differentialem ordinis paris $\frac{d^4v}{dx^4}$, etc. procedere; id enim in ipso $\frac{dv}{dx}=o$, vel in $\frac{dx}{dv}=o$ ri licet. Vis enim et natura functionis, quæ maximi vel ni erit capax, hæc est, ut, postquam punctum, ut ita , culminationis attigerit, in contrarias abeat partes, h. e. escens fuerit et paulatim crescendo maximum sit asse- decrescere et a positivo in negativum abire inci- necesse est; si e contrario decrescens fuerit, et decre- o sensim minimum attigerit, crescere tandem incipiat, negativo in positivum transeat statum, necesse erit. vero signum serierum (C) (D), quibus differentia in- tatum ipsius culminationis et proxime subsequen- et antecedentem repræsentatur, ut supra docuimus (§. 4),

no ipsarum termino $\frac{dv}{dx}$ pendet, posita δ ita parva, ut plu- n contineat maxima vel minima; per se patet, coëffi- em differentialem $\frac{dv}{dx}$ ante et post ipsum culminatio- unctum signis gaudere debere contrariis, illumque ipso oc punctum transitu signa mutare. Functio autem signa e nequit, nisi per o transeat, si integra sit, vel per o, per $\frac{1}{o}$, si fractionis habeat formam; $\frac{dv}{dx}$ itaque in ipso inationis puncto, aut o, aut infinitum sit necesse est.

litas p, quæ $\frac{dv}{dx}=o$, vel $\frac{dx}{dv}=o$ fidem facit, v maximum inimum reddere quidem posset, ut vero nobismet ipsis ersuasum, quantitatem illam v re vera maximum ef- , vel minimum, inquirendum erit, an coëfficiens dif- ialis $\frac{dv}{dx}$, in locum ipsius x suppositis quantitatibus

$(p-\delta)$, $(p+\delta)$, quarum altera proxime minor p, al
vero major, signa necessario mutet, quamvis vel min
poneretur δ. Si, debita substitutione facta, $\frac{dv}{dx}$ a pos
in negativum abiret statum, maximum aderit; si contra
set, minimum habebis. Si absit plane signorum vari
nec maximum, nec minimum auspicari licet.

§. 7. Ex nuperrime allatis hæc altera in maximis m
misve functionum inveniendis, desumitur regula, sequend

"Quære coëfficientem differentialem primum $\frac{dv}{dx}$, *radic*

p, *etc, quæ fidem facere possunt æquationi* $\frac{dv}{dx}=0$, *vel*

determina et in $\frac{dv}{dx}$, *et quidem in locum ipsius x, successiv*
pone atque substitue quantitates $(p-\delta)$, $(p+\delta)$ *vel* $(p$
$(p+\delta)$, *quarum altera proxime est minor, altera vero p*
me major radice inventa p, p *etc.; Si, facta substitut*
$\frac{dv}{dx}$ *signa variat, ita ut* $+$ *mutetur in* $-$, *maximum*
necesse est; Si vero $-$ *abit in* $+$, *minimum functioni*
sto erit. Ubi signorum abest immutatio, nec maximum
rit nec minimum."

§. 8. Sit functio $v=p+m(x-q)^n$, cujus maximu
minimum erit determinandum.

Differentiando obtinetur $\frac{dv}{dx}=nm(x-q)^{n-1}$. Si
merus est integer >1, $x=q$ reddat necesse est $nm(x-q$
$=0$; Si vero n fractio est <1, $x=q$ efficiet $\frac{nm}{\infty}(x-q$

tum; q igitur est radix, quæ æque $\frac{dv}{dx}=0$, atque $\frac{dx}{dv}=0$ acere possit.

Ut dijudicetur, an q respondeat maximo, vel minimo, ne, substituendum erit in $\frac{dv}{dx}$, et quidem in locum ipsius antitates, $x,=q-\delta$, $x'=q+\delta$, quarum altera proxime inor, altera vero major ipso x. Quo facto, proveniunt

1) $nm(-\delta)^{n-1}$, 2) $nm(+\delta)^{n-1}$

ulæ, quæ signis diversæ esse nequeunt, nisi n numerus ar. Quo posito, minimum aderit, si m quantitas est va; Si m foret negativa, maximum functionis e con- haberet locum.

§. 9. Sit $y=\frac{x}{1+x^2}$. Differentiando provenit $\frac{dy}{dx}=$ $\frac{x^2}{(1+x^2)^2}=0$; unde $x=\pm 1$. In $\frac{dy}{dx}$, et quidem in locum ip- x, suppositis

$x,=1-\delta$, $x'=1+\delta$,

bimus 1) $\frac{2\delta-\delta^2}{4-8\delta+8\delta^2-4\delta^3+\delta^4}$ 2) $\frac{-2\delta-\delta^2}{4+8\delta+8\delta^2+4\delta^3+\delta^4}$

Si ad numeratorem utriusque fractionis adtendamus, vi- s facile signum ipsius ex $\pm 2\delta$ pendere; posita enim δ itate infinite parva, evanescat necesse est δ^2, dignitas δ, gradus altioris. Si denominatorem examinemus, ap- signum ipsius sequi debere terminum primum (4); ter- enim 8δ, $8\delta^2$, $4\delta^3$, δ^4, sive addantur quantitati datæ sive inde deducantur, utpote in δ multiplicati, ideoque te parvi, signum ipsius immutare nequeunt; redeant ita- fractiones, inventæ, necesse est in

1) $\frac{2\delta}{4} = +$ 2) $\frac{-2\delta}{4} = -$,

quibus signorum variatio satis superque indicatur. Et qu
$+$ abit in $-$, oriatur necesse est maximum, $y = +\frac{1}{2}$, sup
sito in æquatione data $+1$ in locum ipsius x.

Ut dijudicetur, an valor negativus ipsius x, vel
maximum minimumve efficiat nec ne, in $\frac{dy}{dx}$ et quiden
locum ipsius x deinceps substituendum erit $x, = -1$
$x' = -1 + \delta$. Quo facto, provenient

1) $\frac{-2\delta}{4} = -$ 2) $\frac{2\delta}{4} = +$

Signa mutantur: et $-$ abit in $+$; minimum igitur a
necesse est, $y = -\frac{1}{2}$, posito $x = -1$ in æquatione data

§. 10. Sit $y^2 - 2mxy + x^2 = a^2$. Æquatio differentialis
$(y - mx)dy - (my - x)dx = 0$; unde $\frac{dy}{dx} = \frac{my - x}{y - mx} = 0$;

quare $my - x = 0$; et $y = \frac{x}{m}$.

Ut obtineatur valor ipsius x, substituamus $\frac{x}{m}$ in æ
tione proposita et quidem in locum ipsius y, et habebi
$\frac{x^2}{m^2} - x^2 - a^2 = 0$; unde sponte fluit $x = \frac{ma}{(1-m^2)^{\frac{1}{2}}}$; quare $y = \frac{a}{(1-m}$

In $\frac{dy}{dx}$, et quidem in locum ipsius y, supponentes dein
$y_{,} = \frac{a}{(1-m^2)^{\frac{1}{2}}} - \delta$; $y' = \frac{a}{(1-m^2)^{\frac{1}{2}}} + \delta$, habebimus

$$) \frac{m\delta(1-m^2)^{\frac{1}{2}}}{a(m^2-1)} = + \quad 2) \frac{-m\delta(1-m^2)^{\frac{1}{2}}}{a(m^2-1)} = -$$

minatore et numeratore utrinque in — 1 ductis et nis, qui signorum non efficiunt variationem, neglectis; um + mutatur in —, maximum adsit necesse est

$$\frac{a}{1-m^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Ponendo denominatorem ipsius $\frac{dy}{dx} = o$, ut fiat infinitus oefficiens differentialis, habebimus $y = mx$, quæ, cum æquadata conjuncta, dabit $x = \frac{a}{(1-m^2)^{\frac{1}{2}}}$, $y = \frac{ma}{(1-m^2)^{\frac{1}{2}}}$, valoqui se ad nuperrime inventos conformant et maximum ut ipsius x.

§. 11. Quantitatem datam (b) in duas partes ita divi- ut potentia unius (m) in alterius (n) ducta, maximum t.

x una pars; altera erit b—x, et functionem habebimus $x^m(b-x)^n$, cujus maximum erit determinandum. Difiando obtinetur

$$-mx^{m-1}(b-x)^n - nx^m(b-x)^{n-1} = x^{m-1}(b-x)^{n-1}$$

$-mx-nx] = o$; unde $x = \frac{mb}{m+n}$. Substitutis in $\frac{dy}{dx}$, et qui-

in locum ipsius x, $x, = \frac{mb}{m+n} - \delta$, $x' = \frac{mb}{m+n} + \delta$, prove-, terminis, qui signorum non efficiunt mutationem, neg-. formulæ sequentes:

$$1)\frac{(m\mathfrak{b})^{m-1}(n\mathfrak{b})^{n-1}(\delta)}{(m+n)^{m+n-3}} = +\,2)\frac{(m\mathfrak{b})^{m-1}(n\mathfrak{b})^{n-1}(-\delta)}{(m+n)^{m+n-3}}$$

quibus maximum $y = \frac{m^m n^n \mathfrak{b}^{m+n}}{(m+n)^{m+n}}$, in æquatione data

x substituto $\frac{m\mathfrak{b}}{m+n}$, adesse probatur. Hinc sequitur, si n
rus ita divideretur, ut partes, in se ductæ, efficerent m
mum, sumendas esse partes ipsius dimidias; in hoc enim
$m=1$, $n=1$; quare $x=\frac{\mathfrak{b}}{2}$.

§. 12. Diametros conjugatos Elipseos, inter se for
tes angulum minimum, invenire.

Sint Diametri quæsiti x, y; axis major $2a$, axis r
$2b$; ex natura Elipseos erit $x^2+y^2 = a^2+b^2$; sit an
quæsitus v; erit quoque $\sin v = \frac{ab}{xy} = \frac{ab}{y(a^2+b^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}$
de differentiando $\frac{d\sin v}{dy} = \frac{-ab(a^2+b^2-2y^2)}{y^2(a^2+b^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$; quar

$a^2+b^2-2y^2=0$, $y=\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=x$;

Quæsiti igitur Diametri inter se erunt æquales. Ut diju
tur, an angulus v sit minimus, substituendum erit in $\frac{d.}{}$

et quidem in locum ipsius y, $y_1=\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}-\delta$, y

$\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}+\delta$.

facto, et terminis muneratoris æque ac denominatoris, signum quoti mutare nequeunt, neglectis, provenient 1) $\frac{-4ab\delta}{p^4} = -$, 2) $\frac{4ab\delta}{p^4} = +$; posito brevitatis caus-

$= \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$. Quoniam $-$ abit in $+$, adsit necesse est

imum, sin $v = \frac{2ab}{a^2+b^2}$.

§ 13. Ex triangulis super una eademque basi b consti-, ejusdemque circuitus $2p$, illud, cujus superficies sit maxi- determinare.

Sit latus unum x, alterum erit $2p - b - x$, et superficies

guli $y = [p(p-b)(p-x)(b+x-p)]^{\frac{1}{2}}$; quare $y^2 = p(p-b)$ $-x)(b+x-p)$, et logarithmis utrinque sumtis, $2ly = lp +$ $-b)+l(p-x)+l(b+x-p)$; unde differentiando, $\frac{dy}{dx} =$ $\frac{(2p-2x-b)}{-x)(b+x-p)} = 0$; quare $2x = 2p - b$, et $x = 2p - b - x$, trianguli latera inter se erunt æqualia; quare ex omni- riangulis ejusdem circuitus aream illius, quod æquilaterale maximam esse, patet. Unde porro quoque probatur ex onis omnibus orbis ejusdem illi, quod æquilaterale sit, imam competere superficiem.

Si dubitarèt quis, an functio proposita maximi sit ca- nec ne, substituat in $\frac{dy}{dx}$ pro x x, $= \left(p - \frac{b}{2}\right) - \delta$, $x' =$ $\left.\frac{b}{2}\right) + \delta$; et habebit 1) $\frac{4y\delta}{b^2} = +$ 2) $\frac{-4y\delta}{b^2} = -$ mutantur: $+$ abit in $-$; ergo maximum adsit neces- t.

§. 14. Ex omnibus Parallelipipedis rectangulis et cubo

dato (c^3) æqualibus, data dimensione b, invenire illud, jus superficies sit minima.

Sint ceteræ duæ dimensiones, x, z; bxz erit $=c^3$; de facile derivatur $z=\frac{c^3}{bx}$, quare dimensiones erunt b, x, et superficies itaque $y=2bx+\frac{2c^3}{x}+\frac{2c^3}{b}$; unde $\frac{dy}{dx}=\frac{2(bx^2-c^3)}{x^2}=0$, $x=\left(\frac{c^3}{b}\right)^{\frac{1}{2}}=z$; data igitur una dimensione, alteræ duæ inter se erunt æquales. Pro x in $\frac{dy}{dx}$ substitutis $x,=\left(\frac{c^3}{b}\right)^{\frac{1}{2}}-\delta$, $x'=\left(\frac{c^3}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\delta$, oriuntur

1) $-4\delta\left(\frac{b^3}{c^3}\right)^{\frac{1}{2}}=-$ 2) $4\delta\left(\frac{b^3}{c^3}\right)^{\frac{1}{2}}=+$, quibus minimum re vera adesse probatur.

§. 15. Basi data $MN=b$, ex triangulis circa datum culum BAC describendis, illud, cujus area sit minima terminare.

Vide fig. ad prop. III. Eucl. Elem. libr. IV.

Sit radius circuli r, trianguli perimeter $2p$, $MB=MA=$ NB erit $=NC=b-x$, $CL=LA=p-b$; trianguli it lateribus existentibus $MN=b$, $NL=p-x$, $ML=p+x$ erit trianguli area, $y=[px(p-b)(b-x)]^{\frac{1}{2}}$, et $y^2=px(p-b)(b$ quum vero $y=rp$, erit quoque $yr^2=x(y-rb)(b-x)$ e $\frac{rbx^2-rb^2x}{x^2-bx+r^2}$; unde provenit $\frac{dy}{dx}=\frac{r^3b(2x-b)}{(x^2-bx+r^2)^2}$, $x=\frac{b}{2}$ po

s in $\frac{dy}{dx}$, et quidem in locum ipsius x, $x_1 = \frac{b}{2} - \delta$, $x' =$

δ, oriuntur formulæ.

1) $\frac{-32br^3\delta}{b^4-8r^2b^2+16r^4} = -$ 2) $\frac{32br^3\delta}{b^4-8r^2b^2+16r^4} = +$

quoniam — abit in +, adesse monstrant minimum, po-

$= \frac{b}{2}$, h. e. dum B medium ipsius sit MN. Reliqua

rianguli latera inter se erunt æqualia.

§. 16. Ex omnibus quadratis, in dato PQRS inscriptis,

ire minimum.

Vide fig. 150 apud Kjellin. Grund. till Geom. libr. IV.

es sume quascumque laterum quadrati dati, easque inter se æ-

es PA, SD, RC, QB; figura ABCD erit Qq; triangulum enim

= ADS = DRC = CQB; latera AD, DC, CB, BA æqualia erunt;

figura ADCB erit æquilateralis. Angulus PAB = SDA;

PAB + SAD = SDA + SAD = recto; quum vero PAB +

+ BAD = duobus rectis; BAD ipse erit angulus rectus;

modo probatur angulos ad D, C et B esse rectos; figu-

aque ABCD quadratum est.

Sit PS = m, PA = x, erit AS = $m - x$; est vero $(AB)^2 =$

$)^2 + (PB)^2 = (AP)^2 + (AS)^2 = 2x^2 + m^2 - 2mx = y^2$; unde

$$\text{enit } \frac{dy}{dx} = \frac{2x-m}{y} = \frac{2x-m}{(2x^2-2mx+m^2)^{\frac{1}{2}}} = 0, \; x = \frac{m}{2}$$

$\frac{y}{x}$, et quidem in locum ipsius x, successive suppositis

$\frac{1}{2}m - \delta$, $x' = \frac{1}{2}m + \delta$ et terminis in denominatore neglectis,

ignum ipsius immutare nequeunt, provenient 1) $\frac{-2\delta}{(\frac{1}{2}m^2)^{\frac{1}{2}}} = -$,

2) $\frac{2\delta}{(\frac{1}{2}m^2)^{\frac{1}{2}}} = +$, quibus minimum adesse probatur $x = \frac{1}{2}m$
e. puncto A in medio ipsius PS existente.

§. 17. Invenire triangulum æquicrurum minimum, ca datum Circulum describendum.

Vide fig. ad. prop. IV Eucl. lib. IV.

E centro circuli EFG perpendiculares DF, DG ducantur BC, AC ad contactum F et G. Sit $DF = r$, $DA = x$, $AG = (x^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}$; autem $AG : DG = AF : FC$, h. e. $(x^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}$ $x + r : FC = \frac{r(x+r)}{(x^2-r^2)^{\frac{1}{2}}}$; quare trianguli area, $y = \frac{r(x+r)}{(x^2-r}$
unde $\frac{dy}{dx} = \frac{r(x-2r)(x+r)}{(x-r)(x^2-r^2)^{\frac{1}{2}}} = 0$; quare $x = 2r$.

In $\frac{dy}{dx}$ pro x successive substitutis $x, = 2r - \delta$ $x' = 2r + \delta$ terminis in δ multiplicatis, sive sint addendi, sive subtra di, ubique neglectis, quoniam, utpote infinite parvi, signo non efficiant variationem, formulæ oriantur necesse est. 1) $\frac{-3\delta}{(3)^{\frac{1}{2}}}$

2) $\frac{3\delta}{(3)^{\frac{1}{2}}} = +$, quæ minimum, $x = 2r$, adesse probant.

§. 18. Cylindrum y, qui possit Cono dato AGBA tineri, invenire maximum.

Vide fig. 14. Forssell. Algebra 3. edit.

Pone $GF = a$, $BA = b$, $CD = x$. Ex triangulorum simi dine erit $AB : FG = CD : EG$, h. e. $b : a = x : EG = \frac{ax}{b}$;

$F = (FG - EG) = a - \frac{ax}{b}$. Area circuli ECD erit $= \frac{\pi x^2}{4}$;

ylindri itaque soliditas, $y = \frac{\pi x^2}{4}\left(\frac{ab - ax}{b}\right)$; unde $\frac{dy}{dx} =$

$\frac{2b - 3x}{4b}\Big) = 0$, $2b - 3x = 0$, $x = \frac{2b}{3}$. Qui valor ipsius x

imo respondet; in $\frac{dy}{dx}$ enim et pro x successive substi-

$x, = \frac{2b}{3} - \delta$, $x' = \frac{2b}{3} + \delta$, et terminis omnibus in δ mul-

tis, sive sint addendi, sive subtrahendi, quoniam sig-
totius variare nequeunt, neglectis, obtinebimus

$$1)\ \frac{a\pi\delta}{2} = +\qquad 2)\ \frac{-a\pi\delta}{2} = -$$

$EF = a - \frac{ax}{b}$, substituitur pro x $\frac{2}{3}b$, oritur $EF = \frac{1}{3}a$, h.
itudo Cylindri erit tertia pars Coni altitudinis.

§. 19. Ex omnibus, quæ Conum rectum incidendo for-
possint Parabolæ, illam, cujus superficies y sit maxi-
determinare.

Vide fig. 55. Schenmark. Geom. Anal.

Sit diameter ipsius Coni basis $BC = b$, latus Coni $AC = m$,
x. Quoniam $BC : CA = BF : Fe$, h. e. $b : m = x : Fe = \frac{mx}{b}$;

$(bx - x^2)^{\frac{1}{2}}$, erit area IKeI, $y = \frac{4m\pi}{3b}(bx - x^2)^{\frac{1}{2}}$; unde

$\frac{2m}{3b}\frac{(3b - 4x)x}{(bx - x^2)^{\frac{1}{2}}} = 0$, quare $x = \frac{3}{4}b$ quod maximo respon-

det; in $\frac{dy}{dx}$ enim pro x suppositis successive $x, = \frac{3}{4}b -$ $x' = \frac{3}{4}b + \delta$ et terminis, qui signorum non efficiunt varia nem totius, neglectis, provenient

1) $\frac{8m\delta}{b(3)^{\frac{1}{2}}} = +$ 2) $\frac{-8m\delta}{b(3)^{\frac{1}{2}}} = -$

20. Ex Cylindris ejusdem soliditatis c^3 illum, cujus perficies y sit minima, determinare.

Sit x diameter circuli, qui ipsius Cylindri sit basis; repræsentet altitudinem Cylindri. Circumferentia Circuli, jus diameter x, erit πx et ipsius superficies $\frac{1}{4}\pi x^2$; Solid igitur Cylindri; $c^3 = \frac{1}{4}\pi x^2 z$. Superficies Cylindri tot

$y = \frac{1}{2}\pi x^2 + \pi x z$; unde, eliminato z, provenit $y = \frac{1}{2}\pi x^2 +$

quare $\frac{dy}{dx} = \frac{\pi x^3 - 4c^3}{x^2} = 0$; $x = \left(\frac{4c^3}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$. Substitutis pro x

$x, = \left(\frac{4c^3}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} - \delta$, $x' = \left(\frac{4c^3}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} + \delta$, obtinebimus 1) $-3\delta = -$ 2) $+3\delta = +$. Signa variant, et $-$ mutatur in $+$; adest tur minimum.

Si in $c^3 = \frac{1}{4}\pi x^2 z$ pro x substituitur $\left(\frac{4c^3}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$, erit

$\left(\frac{4c^3}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = x$; Diameter igitur ipsius basis et altitudo Cyli inter se erunt æquales.

§. 21. Ex Conis omnibus ejusdem soliditatis datæ lum, cujus superficies s sit minima, determinare.

Vi

Vide fig. 14. Forssell. Algebra.

t AB = x, FG = y; Soliditas coni erit $v = \frac{\pi x^2 y}{3.4}$. Con-

Coni superficies $= \pi x \frac{AG}{2} = \frac{\pi x}{2}\left(\frac{x^2}{4}+y^2\right)^{\frac{1}{2}}$, et totius i-

Coni superficies $s = \frac{\pi x}{2}\left(\frac{x^2}{4}+y^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi x^2}{4}$; substituto au-

ro x pretio illius ex $v = \frac{\pi x^2 y}{3.4}$ derivato, erit $s =$

$\frac{-3\pi v y^3)^{\frac{1}{2}}+3v}{y}$; $\frac{ds}{dy} = \frac{\frac{3}{2}v\pi y^3 - 9v^2 - 3v(9v^2+3v\pi y^3)^{\frac{1}{2}}}{y^2(9v^2+3v\pi y^3)^{\frac{1}{2}}} = 0$;

$\frac{1}{2}\pi y^3 - 3v - (9v^2+3v\pi y)^2 = 0$; unde $y^3 = \frac{46.v}{\pi}$; ideoque

$\frac{3v}{\pi y} = x^2$; ergo $x : y = 1 : (2)^{\frac{1}{2}}$. Maximum adesse facile

in $\frac{ds}{dy}$ enim, et pro y successive substitutis, $\left(\frac{4.6.v}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} - \delta$,

$)^{\frac{1}{3}}+\delta$, provenient

1) $-\frac{1}{2}\pi\delta = -$, 2) $\frac{1}{2}\pi\delta = +$.

). 22. Ex omnibus Cylindris in Sphæra data inscribendis , cujus superficies convexa y erit maxima, determinare.

Vide fig. 352. Kjellin: Grund. till Geom. lib: 12.

idius Sphæræ AO = a; sit quoque OP = x; erit $PM^2 =$

5

a^2-x^2, PM$=(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$; Circumferentia circuli, cujus radi
$=[a^2-x^2]^{\frac{1}{2}}$, erit $=2\pi(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$; quare superficies conve
Cylindri, $y=4\pi x(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$; unde $\frac{dy}{dx}=4\pi\frac{(a^2-2x^2)}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}=0$, x
$(\frac{1}{2}a^2)^{\frac{1}{2}}$, quod maximo respondet; substitutis enim in
$x,=(\frac{1}{2}a^2)^{\frac{1}{2}}-\delta$, $x'=(\frac{1}{2}a^2)^{\frac{1}{2}}+\delta$, habebimus
1) $+16\pi\delta$, 2) $-16\pi\delta$. Pro x in PM$=(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$ supposi
$(\frac{1}{2}a^2)^{\frac{1}{2}}$, erit 2PM$=2(\frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}}=2x$; h. e. ipsius basis diam
ter et altitudo Cylindri inter se erunt æquales.

Si propositum fuisset Cylindrum in Sphæra inscribendu
cujus soliditas (s) foret maxima, determinare, habuissem
$s=\pi(a^2-x^2)2x$; unde $\frac{ds}{dx}=\pi(2a^2-6x^2)=0$, $x=(\frac{a^2}{3})^{\frac{1}{2}}=$
$\frac{1}{3}a(3)^{\frac{1}{2}}$.

§. 23. Huc usque *maxima* et *minima* functionum uni
solum variabilis consideravimus; restat nunc, ut pauca
maximis et *minimis* functionum variabilium duarum, w
$f(x,y)$, inveniendis dicamus.

Posito x et y simul variari, x fieri $x+\delta$; et y mutari
$y+\vartheta$; erit, assumto $\vartheta=\omega\delta$, $w'-w=$

$$\left(\frac{dw}{dx}+\omega\frac{dw}{dy}\right)\delta+\left(\frac{d^2w}{dx^2}+2\omega\frac{d^2w}{dxdy}+\omega^2\frac{d^2w}{dy^2}\right)\frac{\delta^2}{2} \qquad (\mathfrak{A})$$

Differentiam $w'-w$ inter duos successivos functionis c
jusdam valores, positis incrementis admodum parvis, si pr
mus valor functionis efficeret *minimum*, fore positivam; i
casu vero maximi illam e contrario esse negativam, per s
patet (§. 3). Si ad feriem ($\mathfrak{A}$) paullo diligentius attendamu

mus quoque facile, signum ipsius a termino primo, qui
a ipsius δ potentia afficiatur, pendere (§. 4). Quum
erminus primus signa variat, respectu habito ad impa-
sius δ dignitatem, et conditio *maximi* vel *minimi* sig-
non patitur variationem, necesse est, ut terminus ille,
ponens dignitatis ipsius δ numerus sit impar, evanescat
; quare

$$\frac{dw}{dx} + \omega \frac{dw}{dy} = 0 \quad \mathfrak{B})$$

m hæc æquatio vera erit, quæcumque sit quantitas ω;
sibi constent necesse est æquationes:

$$\frac{dw}{dx} = 0 \ (\mathfrak{C}), \quad \frac{dw}{dy} = 0 \ (\mathfrak{D}).$$

ntur x et y, inter æquationes ($\mathfrak{C}$) ($\mathfrak{D}$), quarum ra-
olum *maximum* efficere possunt vel *minimum;* ut vero
etur, an *maximum* vel *minimum* re vera efficiant nec
s, quando fuerint inventæ, substituamus necesse est in

$+$ etc.), qui terminus, utpote primus seriei, sibi con-

signi semper erit ejusdem, et quidem negativi, si
m adsit, positivi vero, si præsto esset *minimum*.
as vero hujus formæ: $P\omega^2 + 2Q\omega + R = 0$ dat $\omega = \frac{-Q \pm (Q^2 - PR)^{\frac{1}{2}}}{P}$, quæ signa non mutat, quæcumque sit ω,
dcumque ipsius sit signum, si modo $Q^2 < PR$, vel
, h. e. Ubi valores ipsius w *imaginarii* sunt, vel æ-
Sit itaque necesse est

$$\frac{d^2w}{dx^2}\frac{d^2w}{dy^2} - \left(\frac{d^2w}{dxdy}\right)^2 > 0 \quad (\mathfrak{E})$$

$$\frac{d^2w}{dx^2}\frac{d^2w}{dy^2} - \left(\frac{d^2w}{dxdy}\right)^2 = 0 \quad (\mathfrak{F})$$

$\frac{d^2w}{dy^2}$ signi igitur erunt ejusdem et quidem positivi,

si adsit *minimum*, negativi autem, si adforet *maximum*. bus si conditionibus fides non simul constat, nec *mini* auspicari licet, nec *maximum*. Quando radices æquatio (C) (D) terminum annihilant secundum seriei (A), ad tium erit procedendum, et quum hic $=o$ esse debet, ex nandus est terminus quartus, qui signo gaudeat necesse est si *maximum* adsit, + vero, si *minimum* præsto esset. sunt, quæ in *maximis minimisve* functionum variabilium dua determinandis, vulgo præcipiuntur, eandemque viam dete nandi *maxima* et *minima* functionum plurium variabilium ingrediendam, vel me non monente, sequitur.

§. 24. Ex iis, quæ in §. 6 dicta sunt de functio variabilis unius, et quæ in functiones quoque plurium v bilium nullo negotio transferuntur, facile colligitur, opus esse necessario ad terminum $\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \text{etc.}\right)\delta^2$, et qui se tur progredi et examinare in dijudicando, an *maximum*, *nimumve* adsit, nec ne; sed ex ipso $\frac{dw}{dx} + \omega\frac{dw}{dy} = o$ id percipi. Sit enim w functio variabilium x, y, z etc.; p x id jam constitutum esse pretium, quod *maximum minim ve* efficiat functionis w; non requiritur amplius, quam u id determinetur pretium ipsius y, h e differentianda functio w variando y solum, et, $\frac{dw}{dy} = o$ posito, radices, huic satisfacere possunt æquationi, erunt determinandæ. mili modo argumentantes invenimus, differentiandam ess variando x solum, ut, posito $\frac{dw}{dx} = o$, radices, quæ huic que fidem facere possint æquationi, eliciantur, et sic Radices æquationum $\frac{dw}{dx} = o$, $\frac{dw}{dy} = o$, etc. *maximum minim*

funct

tionis w efficere solum possunt; illæ vero ***maximum***, ***mi-***
mve re ipsa efficiunt, si, quæ conditionibus, quibus ***maxi-***
contineatur, simul satisfaciant, vel simul fidem faciant
mo, adsint ubique. Quare hæc, in ***maximis minimisve***
tionum plurium variabilium determinandis oritur regula,
anda:

"*Quære coëfficientes differentiales* $\frac{dw}{dx}, \frac{dw}{dy}, \frac{dw}{dz}$ *etc.*;
es, $x=p$, $y=q$, $z=r$, *quæ fidem facere possunt æquatio-*
$\frac{dw}{dx}=o$, $\frac{dw}{dy}=o$, $\frac{dw}{dz}=o$, *determina, et in* $\frac{dw}{dx}$ *pro* y *et*
bstitutis, q, r, *in locum ipsius* x *successive suppone* $p-\delta$,
; *in* $\frac{dw}{dy}$ *pro* x *et* z *suppositis* p, r, *in locum ipsius* y
ssive substitue $q-\delta$, $q+\delta$, *quantitates, quarum altera proxi-*
st minor, altera vero proxime major, radice inventa; et sic
eris. Si debita ubique facta substitutione $\frac{dw}{dx}, \frac{dw}{dy}$ *etc. signa*
nt, ita ut ubique + *in* — *simul abeat, functionis aderit*
imum; si vero — *simul et ubique transit in* +, *mi-*
um præsto erit; sin secus, nec maximum aderit, nec
imum."

§. 25. Ut, qui sit allatæ regulæ usus, constet, ex omni-
riangulis ejusdem perimetri illud, cujus superficies ***s*** sit
ma determinare, proponatur.

Sit perimeter $2p$, per x et y insigniantur duo latera,
um erit $2p-x-y$, et superficies trianguli $s=$
$-x)(p-y)(x+y-p)]^{\frac{1}{2}}$, et logarithmis utrinque sumtis $ls=$

$\frac{1}{2}[lp+l(p-x)+l(x+y-p)]$; unde $\frac{ds}{dx}=\frac{1}{2}s\frac{(p-x)-(x+$
$=0$ α), $\frac{ds}{dy}=\frac{1}{2}s\frac{(p-y)-(x+y-p)}{(p-y)(x+y-p)}$ β)

Ex (α) et (β) provenit $x+y-p=p-x=p-y$; ex $p-x$ oritur $x=y$, et ex $x+y-p=p-y$ $y=2p-x-y$ pro tur; latera igitur trianguli inter se erunt æqualia et quodque $=\frac{1}{3}(2p)$.

Qui certior fieri cupit *maximum* vel *minimum* ades ne, in $\frac{ds}{dx}$, et quidem in locum ipsius y supposito $\frac{1}{3}(2p$ x successive substituat $x,=\frac{1}{3}(2p)-\delta$, $x'=\frac{1}{3}(2p)+\delta$, minis, qui signum totius immutare nequeunt, neglectis, l

1) $\frac{9s\delta}{p^2}=+$, 2) $\frac{-9s\delta}{p^2}=-$.

Signorum mutatio $+$ in $-$ adesse indicat *maxim* spectu habito ad x. *Maximum* vero simul adsit nces respectu habito ad y, si functio s, quæ et ab x et y pendet, *maximum* attigisse erit dicenda. Examinandus est coëfficiens differentialis $\frac{ds}{dy}$, et in illo, pro x sup $\frac{1}{3}(2p)$, in locum ipsius y successive substituendum eri $\frac{1}{3}(2p)-\delta$, $y'=\frac{1}{3}(2p)+\delta$, et provenient 1) $\frac{9s\delta}{p^2}=+$, 2) $\frac{-9s}{p^2}$

Signa mutantur: et quoniam $+$ abit in $-$, etiam heic mum adesse, patet; quare *maximum* functionis s resp necesse est $x=\frac{1}{3}(2p)$, $y=\frac{1}{3}(2p)$.

im ersten Male in Legendre's schon erwähnter Abhandlung von 1787, gl. 74 auftritt. Mir ist es indess nicht gelungen den Ausdruck darin finden, während allerdings »operation géodésique« dort von Legen- re gebraucht wird.

issant, Traité de Géodésie, T. II, Paris 1805, S. 216.

ssel, Astronomische Nachrichten, Bd. IV, 1825, S. 241; wieder- gedruckt in den Gesammelten Abhandlungen Bd. III, Leipzig 1876, 5. Es ist übrigens zu bemerken, dass die Bezeichnung »geodätische nien« in dieser beschränkten Bedeutung auch gegenwärtig noch ge- aucht wird, was der betreffende Artikel in Meyer's Konversations- xikon, 4. Auflage, Bd. VII, 1887, S. 124 beweist.

cobi, Comptes rendus, T. VII. S. 284; dieser Brief Jacobi's an Arago, tirt Königsberg, den 28. December 1838 fehlt in den Gesammelten erken. Sein Resultat ist ausführlich auseinandergesetzt in den rliner Monatsberichten April 1839; wieder abgedruckt Gesammelte erke, Bd. II, S. 57.

achimthal, Crelles Journal, Bd. 26, 1843, S. 155: Observationes lineis brevissimis et curvis curvaturae in superficiebus secundi adus.

asles, Journal de Mathématiques pures et appliquées, T. XI, 1846, 5: Sur les lignes géodésiques et les lignes de courbure des surfaces second degré, und weitere Bemerkungen Comptes rendus T. XXII, 63, 313 und 517.

ouville, Journal de Mathématiques pures et appliquées, T. IX, 44, S. 401: De la ligne géodésique sur un ellipsoïde quelconque, d weitere Bemerkungen ebendaselbst, T. XI, S. 21 und 345, T. XII, 410, sowie Comptes rendus, T. XIX, 1844, S. 1261.

chael Roberts, Journal de Mathématiques pures et appliquées, XI, 1846, S. 1: Sur quelques propriétés des lignes géodésiques et s lignes de courbure de l'ellipsoïde.

ouville, Journal de Mathématiques, T. IX, 1844, S. 404; Comptes ndus, T. XIX, 1844, S. 1261.

cobi, Crelles Journal, Bd. 17, 1837, S. 68: Zur Theorie der Varia- nsrechnung und der Differentialgleichungen der Dynamik, wieder- gedruckt Gesammelte Werke, Bd. IV, S. 39.

Friedrich Engel, *Die höheren Differentialquotienten.*

Während bei den Punkttransformationen eines Rau
Dimensionenzahl jeder Punktmannigfaltigkeit dieses Rau
halten bleibt, ist das bei den Berührungstransformation
der Fall. In der von Lie geschaffenen Theorie der Berü
transformationen eines $(n+1)$-fach ausgedehnten Raum
erscheinen daher alle Punktmannigfaltigkeiten des R_{n+1}
einander gleichberechtigt, die Punktmannigfaltigkeiten v
schiedener Dimensionenzahl sind nur verschiedene Fä
allgemeinen Begriffs: Elementmannigfaltigkeit. Es ist
welche überraschende Einfachheit Lie der Theorie der p
Differentialgleichungen erster Ordnung durch die Ein
dieses Begriffes gegeben hat.

Für Lie sind als Lösungen einer partiellen Diffe
gleichung erster Ordnung des R_{n+1} nicht blos n-fach
dehnte Punktmannigfaltigkeiten dieses Raumes zuläss
dern auch Punktmannigfaltigkeiten, deren Dimensio
geringer ist als n. Es ist nun klar, dass man sich bei Betr
von Differentialgleichungen höherer Ordnung auf de
Standpunkt stellen muss. In der That hat Lie schon längs
aufmerksam gemacht, dass eine partielle Differentialg
zweiter Ordnung im gewöhnlichen Raume unter Umstän
gewissen Curven befriedigt wird. Zum Beispiel wird d
rentialgleichung der Minimalflächen von allen Curven
Länge Null erfüllt, weshalb auch Lie diesen Curven de
»Minimalcurven« gegeben hat.

Meines Wissens hat bisher noch niemand gezeigt,
diese begrifflichen Betrachtungen analytisch begründe
Während wir in dem Lieschen Begriffe Element und in
mentcoordinaten einen analytischen Apparat besitzen,

tialgleichungen erster Ordnung vollkommen ausreicht, derartiger Apparat für die Differentialgleichungen zwei- höherer Ordnung noch gänzlich. Im Folgenden soll ein gemacht werden, diesem Mangel abzuhelfen.

§ 1.

r betrachten hier den gewöhnlichen Raum und werden ens für die Differentialquotienten zweiter Ordnung einen chen Apparat entwickeln, der die Gleichberechtigung ven und Punkte mit den Flächen auch analytisch zum k bringt.

Elementmannigfaltigkeit aufgefasst wird die Fläche: x, y) durch die drei Gleichungen:

$$z = f(x, y), \quad p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}$$

llt. Jedem Elemente erster Ordnung: x, y, z, p, q der st daher ein ganz bestimmtes Element zweiter Ordnung: p, q, r, s, t zugeordnet, dessen Coordinaten aus den ngen:

$$\begin{cases} dp = r\,dx + s\,dy \\ dq = s\,dx + t\,dy \end{cases}$$

hülfenahme von (1) berechnet werden können. Anders i einer Curve: $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$. Als Elementmannig- t wird die durch die Gleichungen:

$$y = f(x), \quad z = \varphi(x), \quad p = \varphi'(x) - qf'(x)$$

llt, aber die Gleichungen (3) und (2) liefern zusammen- en nicht zu jedem Elemente erster Ordnung: x, y, z, p, q ve ein ganz bestimmtes Element zweiter Ordnung, son- liefern ganz unbrauchbare Gleichungen. In der That, nd (2) folgt wegen der Willkürlichkeit von dx und dq:

$$f' = 0, \quad \varphi'' - qf'' = r + sf'$$
$$1 = 0, \quad s + tf' = 0,$$

keinen Sinn hat.

ran liegt das? Es kann nur darin seinen Grund haben, t nicht brauchbar sind, wenn man die Elemente zweiter einer Curve analytisch darstellen will.

Um diesem Mangel abzuhelfen, deuten wir die Gleic
(2) geometrisch. Wenn wir $dx : dy : dp : dq$ als homogen
dinaten in einem Raume von drei Dimensionen auffas
stellen die Gleichungen (2) ∞^3 Gerade dar, die einem g
linearen Complex angehören, und jedes Werthsystem
liefert eine Gerade dieses Complexes. Hieraus geht n
sofort hervor, warum r, s, t nicht ausreichen, wenn
Elemente zweiter Ordnung einer Curve bestimmen w
Gleichungen (2) stellen nämlich offenbar nicht alle
jenes linearen Complexes dar. Es ist daher zu erwart
wir zu einem andern Ergebnisse gelangen, wenn wir st
solche homogene Coordinaten einführen, dass wir alle
unsers linearen Complexes umfassen können.

Wir bewerkstelligen das, indem wir für r, s, t d
nach:

$$-\frac{r}{u}, \quad -\frac{s}{u}, \quad -\frac{t}{u}$$

setzen und zu den vier homogenen Coordinaten r, s, t,
eine fünfte v hinzufügen, die mit ihnen durch die G
zweiten Grades:

$$(4) \qquad rt - s^2 + uv = 0$$

verknüpft ist. Dann werden die Geraden unsers linear
plexes durch die Gleichungen:

$$(5) \qquad \begin{cases} u\,dp + r\,dx + s\,dy = 0 \\ u\,dq + s\,dx + t\,dy = 0 \\ t\,dp - s\,dq - v\,dx = 0 \\ s\,dp - r\,dq + v\,dy = 0 \end{cases}$$

dargestellt und wir sind sicher, dass uns keine Gerade d
plexes entgeht.

Verbinden wir jetzt die Gleichungen (3) und (5), so
wir, da dx und dq willkürlich sind, zur Bestimmung der E
zweiter Ordnung: $x, y, z, p, q, r : s : t : u : v$ unsrer C
Gleichungen:

$$(6) \qquad \begin{cases} r = [f'(x)]^2\, t \\ s = -f'(x)\, t \\ u = 0 \\ v = \{\varphi''(x) - q f''(x)\}\, t\,, \end{cases}$$

nen die Gleichung (4) offenbar eine Folge ist. Wir finden
ass jetzt auch bei unsrer Curve jedem Elemente erster
g: x, y, z, p, q ein ganz bestimmtes Element zweiter
g zugeordnet ist.
derselben Weise ergiebt sich, dass die Elemente zweiter
g des Punktes: $x = a$, $y = b$, $z = c$ durch die Glei-
n:

$$r = s = t = u = 0$$

ellt werden; es gehört also auch zu jedem Elemente erster
g: x, y, z, p, q dieses Punktes ein ganz bestimmtes Ele-
weiter Ordnung.
sre Absicht ist nunmehr erreicht. Wir haben für die
te zweiter Ordnung solche Coordinaten aufgestellt, dass
, Curven und Punkte als ganz gleichberechtigte Gebilde
nen. Wir wollen jetzt nur noch einige Anwendungen von
Coordinaten machen.
ist klar, dass $u = 0$ in unsern Coordinaten die Differen-
hung aller Curven ist und $v = 0$ die Differentialgleichung
wickelbaren Flächen. Die Monge-Ampèresche Gleichung:

$$(x, y, z, p, q)\, r + \beta s + \gamma t + \delta (rt - s^2) + \varepsilon = 0$$

unsern Coordinaten eine lineare homogene Gleichung:

$$\alpha r + \beta s + \gamma t + \delta v - \varepsilon u = 0$$

en r, s, t, u, v. Dass sie bei allen Berührungstransfor-
en in eine Gleichung von derselben Form übergeht, kommt
um Ausdruck, dass r, s, t, u, v bei jeder Berührungs-
rmation linear und homogen transformirt werden.
hliesslich wollen wir noch alle Curven aufsuchen, die der
tialgleichung der Minimalflächen genügen.
e Differentialgleichung der Minimalflächen lautet:

$$(1 + q^2)\, r - 2pqs + (1 + p^2)\, t = 0 ,$$

ält also in unsern Coordinaten ihre bekannte Form. Soll
Curve: $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$ dieser Gleichung genügen, so
ie Gleichung (8) vermöge (3) und (6) bestehen, es muss also:

$$q^2) f'^2 t + 2(\varphi' - qf')\, qf' t + (1 + (\varphi' - qf')^2)\, t = 0$$

, oder, da t nicht verschwinden kann:

$$1 + f'^2 + \varphi'^2 = 0 ,$$

Damit ist das von LIE auf anderm Wege gefundene Erg
dass die Minimalcurven der Differentialgleichung der M
flächen genügen, analytisch begründet.

Es liegt auf der Hand, dass man die vorhin durchge
Betrachtungen auch auf die partiellen Differentialquo
zweiter Ordnung in Räumen von mehr Dimensionen übe
kann. Ich behalte mir vor, das später einmal auszuführ

§ 2.

Die Coordinaten: x, y, z, p, q der Elemente erster O
sind mit zwei Mängeln behaftet, sie versagen nämlich
für alle Elemente, deren Ebenen der z-Axe parallel si
zweitens für alle Elemente, deren Punkte unendlich fe
Deshalb gehen uns alle Elementmannigfaltigkeiten verlo
lauter Elemente von diesen beiden Arten enthalten. M
aber diese beiden Mängel vermeiden, wenn man die
schen Connexcoordinaten anwendet[1]), wenn man als
Element erster Ordnung durch acht Grössen: $x_1 \dots x_4$,
bestimmt, zwischen denen die Gleichung:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$

besteht.

Unsre Coordinaten für die Elemente zweiter Ordn
natürlich mit denselben Mängeln behaftet. Es fragt sic
ob und wie man diesen Mängeln abhelfen kann, das h
man für die Elemente zweiter und höherer Ordnung ei
lytischen Apparat schaffen kann, der dasselbe leistet
CLEBSCHschen Connexcoordinaten[2]). Wir wollen jetzt
wie diese Aufgabe für die Ebene gelöst werden kann, u
wenigstens andeuten, wie sie auch für den gewöhnlich
und für Räume von höherer Dimensionenzahl lösbar ist

---

1) Der erste der beiden Mängel war übrigens schon früher
beseitigt worden, durch Einführung dreier Verhältnissgrössen
an Stelle von p, q.

2) Im Jahre 1884 theilte mir F. KLEIN mit, dass er sich
dieser Frage beschäftigt habe, ohne zu einem befriedigenden
zu gelangen. Ich habe seitdem öfter versucht, die CLEBSCHsche
coordinaten auf Differentialquotienten höherer Ordnung auszudel
erst vor Kurzem bin ich zu den hier mitgetheilten Ergebnissen

der Ebene bedeutet die Gleichung: $dy - y'dx = 0$ nach
sdrucksweise, dass die beiden unendlich benachbarten
e erster Ordnung: x, y, y' und $x + dx, y + dy, y' + dy'$
t liegen. Die Gleichungen:

$$dy - y'dx = 0\,, \quad dy' - y''dx = 0$$

daher, dass je zwei unendlich benachbarte vereinigt
Elemente erster Ordnung ein Element zweiter Ord-
stimmen.
ten wir nun x, y, y' als Punktcoordinaten im gewöhn-
Raume, so können wir je zwei unendlich benachbarte
steme: x, y, y' und $x + dx, y + dy, y' + dy'$ als Be-
ngsstücke eines Linienelements dieses Raumes auffassen,
st als Bestimmungsstücke einer Figur, die aus einem
und aus einer hindurchgehenden Geraden besteht. Die
nente zweiter Ordnung: x, y, y', y'' der Ebene werden
Raume offenbar durch die ∞^4 Linienelemente abgebildet,
Gleichung: $dy - y'dx = 0$ genügen.
rmit ist aber noch keine eindeutig umkehrbare Abbil-
r ∞^4 Elemente zweiter Ordnung: x, y, y', y'' der Ebene
n, denn die ∞^3 Elemente erster Ordnung: x, y, y', das
ie Linienelemente der Ebene lassen sich nicht eindeutig
bar auf die ∞^3 Punkte eines ebenen dreifach aus-
en Raumes abbilden. Dagegen gelangen wir sofort zu
ndeutig umkehrbaren Abbildung der Elemente zweiter
g der Ebene, wenn wir die Linienelemente der Ebene
g umkehrbar auf die Punkte eines krummen R_3 in einem
ebenen Raume abbilden.
e solche Abbildung der Linienelemente der Ebene hat
ben. Jedem Linienelemente der Ebene ist nämlich ein-
mkehrbar eine ganz bestimmte infinitesimale projective
rmation der Ebene zugeordnet und zwar die, bei der
kte auf der Geraden und alle Geraden durch den Punkt
enelements in Ruhe bleiben. Demnach lassen sich die
enelemente der Ebene eindeutig umkehrbar auf die ∞^3
einer krummen dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit
lden, die in dem ebenen R_7 der ∞^7 infinitesimalen pro-
Transformationen der Ebene liegt. Diese M_3 gestattet
tgliedrige projective Gruppe des R_7, nämlich die ad-
Gruppe der allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene.

Die ∞^4 Elemente zweiter Ordnung: x, y, y', y'' de
werden nun in dem R_7 durch gewisse ∞^4 Linienelemer
M_3 abgebildet und zwar derart, dass jedem Punkte de
ebenes Büschel von ∞^1 solchen Linienelementen der
ordnet ist, die Bilder vom Elementen zweiter Ordnung d
sind. Bilden wir daher die ∞^{13} Linienelemente des R_7 e
umkehrbar auf die Punkte einer krummen Mannigfaltig
dreizehn Dimensionen in einem höheren ebenen Raum
es ist das jedenfalls in einem ebenen Raume R_{167} von
mensionen möglich — so werden die ∞^4 Elemente zwei
nung der Ebene eindeutig umkehrbar auf die ∞^4 Pun
krummen vierfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit M_4 di
abgebildet. Zugleich ist klar, dass diese M_4 eine acht
projective Gruppe des R_{167} gestattet, die mit der allg
projectiven Gruppe der Ebene gleichzusammengesetzt i

Diese unsre Abbildung der ∞^4 Elemente zweiter
der Ebene leistet für die Differentialquotienten zweiter
dasselbe wie die CLEBSCHschen Connexcoordinaten für
Ordnung; sie umfasst *alle* Elemente zweiter Ordnung d

Genau in derselben Weise erkennt man, dass d
Elemente n^{ter} Ordnung: $x, y, y', y'' \ldots y^{(n)}$ eindeutig u
auf die ∞^{n+2} Punkte einer krummen M_{n+2} in einer
Raume R von genügend hoher Dimensionenzahl a
werden können und dass diese M_{n+2} bei einer achtg
projectiven Gruppe G_8 dieses Raumes R invariant bleib
der allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene gleichzu
gesetzt ist. *Es ist klar, dass hierdurch die Bestimmung*
rentialinvarianten n^{ter} Ordnung der projectiven Gruppe
auf die Bestimmung der gewöhnlichen Invarianten der p
Gruppe G_8 in dem Raume R zurückgeführt ist.

Im gewöhnlichen Raume haben wir für zwei unen
nachbarte vereinigt liegende Elemente erster Ordnung
chung:

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0 \tag{10}$$

und wenn wir zu Elementen zweiter Ordnung überge
die beiden Gleichungen:

$$\begin{cases} dp - r\,dx - s\,dy = 0 \\ dq - s\,dx - t\,dy = 0\,, \end{cases} \tag{11}$$

stimmen also zwei unendlich benachbarte vereinigt
e Elemente erster Ordnung nicht blos ein Element zweiter
g, sondern ∞^1 verschiedene.

uten wir x, y, z, p, q als Punktcoordinaten in einem R_5,
et die Gleichung (10) jedem Punkte des R_5 ein ebenes
B_3 von ∞^3 Linienelementen zu und die Gleichungen (11)
nen in B_3 eine Schaar von ∞^3 ebenen Büscheln von je
enelementen. Fassen wir die ∞^3 Linienelemente von B_3
kte eines ebenen Raumes von drei Dimensionen auf, so
nen diese ∞^3 Büschel als die Geraden eines gewissen linea-
nplexes (vgl. S. 470), der offenbar durch die Gleichung:

$$dx\,\delta p - dp\,\delta x + dy\,\delta q - dq\,\delta y = 0$$

ellt wird. Demnach werden die ∞^8 Elemente zweiter
g: x, y, z, p, q, r, s, t des gewöhnlichen Raumes im R_5
∞^8 M_2-Elemente dargestellt; unter einem M_2-Element
en wir dabei mit Lie eine Figur, die aus einem Punkte
einer hindurchgehenden ebenen zweifach ausgedehnten
altigkeit besteht.

er diese Abbildung der Elemente zweiter Ordnung des
lichen Raumes ist noch nicht eindeutig umkehrbar. Um
ndeutig umkehrbare Abbildung zu erhalten, bilden wir
t nach dem Vorgange von Lie die ∞^5 Elemente erster
g, also die Flächenelemente des gewöhnlichen Raumes
g umkehrbar auf die ∞^5 Punkte einer krummen M_5 in
benen R_{14} ab, nämlich in dem ebenen R_{14} der ∞^{14} infi-
nlen projectiven Transformationen des gewöhnlichen
. Die ∞^8 Elemente zweiter Ordnung des R_3 werden
n dem R_{14} durch ∞^8 M_2-Elemente dieser M_5 abgebildet
ar so, dass durch jeden Punkt der M_5 ∞^3 dieser ∞^8 M_2-
te gehen. Ueberdies ist zu bemerken, dass unsre M_5 eine
ngliedrige projective Gruppe des R_{14} gestattet.

nmehr bilden wir die sämmtlichen M_2-Elemente des R_{14}
g umkehrbar auf die Punkte einer krummen Mannig-
t in einem genügend hohen ebenen Raume R ab. Dann
die ∞^8 Elemente 2. O. des gewöhnlichen Raumes in R ein-
mkehrbar durch die ∞^8 Punkte einer krummen Mannig-
t M_8 abgebildet und diese M_8 gestattet wiederum eine
ngliedrige projective Gruppe des Raumes R, die mit der
inen projectiven Gruppe des R_3 gleichzusammengesetzt ist.

In ähnlicher Weise kann man die Elemente n^{ter} Or des gewöhnlichen Raumes auf die Punkte einer krummen M faltigkeit in einem ebenen Raume von genügend grosser D sionenzahl eindeutig umkehrbar abbilden und erreicht da genau dasselbe wie für die Elemente erster Ordnung dur Clebschschen Connexcoordinaten. Zugleich ergiebt sich *dass die Bestimmung der Differentialinvarianten n^{ter} Ordnu allgemeinen projectiven Gruppe des gewöhnlichen Raumes Bestimmung der gewöhnlichen Invarianten einer fünfzehnglie projectiven Gruppe in einem ebenen Raume von genügender Dimensionenzahl zurückgeführt werden kann.*

Es versteht sich von selbst, dass alle diese Betracht auch auf Räume von mehr als drei Dimensionen anwendba

Ich habe im Vorstehenden mich überall damit be die Möglichkeit der besprochenen Abbildungen darzuthu bliebe jetzt noch zu zeigen, wie sich die Formeln gestalte jene Abbildungen analytisch ausdrücken. Ich will aber hi rauf nicht weiter eingehen und will nur erwähnen, dass forderlichen Formeln allerdings schon in den einfachsten recht weitläufig werden. Dieser Umstand beeinträchtigt na die praktische Anwendbarkeit unsrer Abbildungen aussero lich und stellt sie sogar in Frage. Dagegen kann er ihrem t tischen Werthe keinen Abbruch thun, denn es ist siche äusserst merkwürdige Thatsache, dass die Theorie der Di tialinvarianten jeder projectiven Gruppe auf die Theorie d wöhnlichen Invarianten einer Reihe von projectiven Grup höheren Räumen zurückgeführt werden kann.

Zum Schlusse möchte ich noch ausdrücklich erkläre ich, was die Methode der Abbildung auf höhere Räume a von meinem Freunde Study sehr viel gelernt habe. Nam ist seine Abbildung der Kegelschnitte der Ebene auf die einer krummen M_5 in einem ebenen R_{27} für mich besonde regend gewesen. Auch der schriftliche und mündliche V mit Study hat nicht unwesentlich zur vollen Klärung Gedanken beigetragen.

Sonderabdruck aus dem
Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. XIX. 1910. Heft 3/4.
Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Über stets konvergente Interpolationsformeln.

Von Georg Faber in Tübingen.

Während ich mich in der vorhergehenden Note mit solchen Orth
gonalfunktionen beschäftigt habe, nach welchen sich *jede* stetige Fun
tion in eine konvergente Reihe entwickeln läßt, will ich jetzt eine ve
wandte Aufgabe behandeln, nämlich Interpolationsformeln aufzustelle
mittels deren sich *jede* stetige Funktion mit beliebiger Genauigkeit da
stellen läßt. Um die Verwandtschaft der beiden Probleme hervortrete
zu lassen, brauche ich nur an den Zusammenhang zwischen der Theor
der Fourierschen Reihe und jener der trigonometrischen Interpolati
zu erinnern. Bei letzterer handelt es sich bekanntlich darum, endlic
trigonometrische Reihen $t_n(s)$ $(n = 2, 3, \ldots)$ aufzustellen, welche mit ein
gegebenen zwischen 0 und 2π stetigen Funktion $f(s)$ an den Stell
$s = \frac{2i\pi}{n}$ $(i = 0, 1, \ldots n-1)$ übereinstimmen und zu untersuchen,
die Beziehung

$$\lim_{n=\infty} t_n(s) = f(s) \tag{1}$$

für alle s zwischen Null und 2π besteht.

Ich habe diese Untersuchung durchgeführt und werde sie demnäch
veröffentlichen; es stellte sich unter anderem heraus, daß es steti
Funktionen $f(s)$ gibt, bei denen die in bekannter Weise gebildeten er
lichen trigonometrischen Reihen $t_n(s)$ mit unendlich wachsendem n
vergieren.

Dagegen möchte ich hier zeigen, daß sich andere sehr einfac
für jede stetige Funktion konvergente Interpolationsformeln aufstellen lass

Die stetige Funktion $f(s)$ sei zwischen 0 und 1 definiert; $s_0^{(n)}, s_1^{(n)}, \ldots s_n^{(n)}$ n der Größe nach geordnete Stellen dieses Intervalls; auch sei nfachheit halber angenommen, daß $s_0^{(n)} = 0$, $s_n^{(n)} = 1$ sei; n möge die 2, 3, . . . annehmen, und es sei

$$\lim_{n=\infty} s_{i+1}^{(n)} - s_i^{(n)} = 0$$

mäßig für $i = 0, \ldots, n-1$.

Man kann nun auf unendlich viele Weisen stetige Funktionen $R_i^{(n)}(x)$, die folgende Gleichungen befriedigen:

$$R_i^{(n)}(s_i^{(n)}) = 1 \qquad i = 0, 1, 2 \ldots n;\ n = 2, 3, \ldots$$

$$R_i^{(n)}(s_k^{(n)}) = 0 \qquad k \gtrless i.$$

Dann stimmt die Funktion

$$J_n(s) = R_0^{(n)}(s) f(s_0^{(n)}) + R_1^{(n)}(s) f(s_1^{(n)}) + \cdots + R_n^{(n)} f(s_n^{(n)})$$

(s) an den Stellen $s_0^{(n)}$, $s_1^{(n)}, \ldots s_n^{(n)}$ überein.

Die Funktionen $R_i^{(n)}(s)$ sollen nun die weitere Eigenschaft haben, ür jede stetige Funktion $f(s)$ die Beziehung

$$\lim_{n=\infty} J_n(s) = f(s)$$

mäßig für alle s des Intervalls $(0, 1)$ gilt.

Nehmen wir vorerst an, daß die Punkte $s_0^{(n)}$, $s_1^{(n)}, \ldots s_n^{(n)}$ äquidistant daß also $s_i^{(n)} = \frac{i}{n}$ sei, dann genügt es, $R_i^{(n)}(s)$ folgendermaßen zu eren:

$$R_i^{(n)}(s) = 0 \quad \text{für} \quad s \leqq \frac{i-1}{n} \quad \text{und für} \quad s \geqq \frac{i+1}{n},$$

$$R_i^{(n)}(s) = \cos^2\left(s - \frac{i}{n}\right)\frac{n\pi}{2} \quad \text{für} \quad \frac{i-1}{n} \leqq s \leqq \frac{i+1}{n}.$$

Liegt dann s z. B. im Intervall $\left(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right)$, so wird, da die übrigen anden auf der rechten Seite von (4) verschwinden,

$$\begin{aligned} J_n(s) &= f\left(\frac{i}{n}\right)\cos^2\left(s - \frac{i}{n}\right)\frac{n\pi}{2} + f\left(\frac{i+1}{n}\right)\cos^2\left(s - \frac{i+1}{n}\right)\frac{n\pi}{2} \\ &= f\left(\frac{i}{n}\right)\left(1 - \sin^2\left(s - \frac{i}{n}\right)\frac{n\pi}{2}\right) + f\left(\frac{i+1}{n}\right)\sin^2\left(s - \frac{i}{n}\right)\frac{n\pi}{2} \\ &= f\left(\frac{i}{n}\right) + \left(f\left(\frac{i+1}{n}\right) - f\frac{i}{n}\right)\sin^2\left(s - \frac{i}{n}\right)\frac{n\pi}{2} \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von $f(s)$ unterscheidet sich hier die rechte für hinreichend große Werte von n, so wenig als man nur will,

von $f\left(\frac{i}{n}\right)$, also auch von $f(s)$, womit die gleichmäßige Konverge
Interpolationsformel $J_n(s)$ bewiesen ist.

Man kann die Funktion $R_i^{(n)}(s)$ angenähert durch folgende
druck darstellen:

$$R_i^{(n)}(s) \sim e^{-(ns-i)^2 n^2} \cos^2(ns-i)\frac{\pi}{2}. \tag{8}$$

Die Approximation ist, wie man leicht sieht, eine so gut
man bei genügend großem n einen beliebig kleinen Fehler begeht,
man diesen Ausdruck für $R_i^{(n)}(s)$ $(i = 0 \ldots n)$ in (4) einsetzt (w
freilich die genaue Übereinstimmung von $J_n(s)$ und $f(s)$ an den
$s = \frac{i}{n}$ verloren geht).

Endlich kann man die rechte Seite von (8) nach Potenze
$(ns - i)$ entwickeln und nach so vielen Gliedern abbrechen, d
Rest gleichmäßig für alle s des Intervalls $(0, 1)$ dem absoluten B
nach kleiner als $\frac{1}{n^2}$ wird; man erreicht dies z. B., wenn man je
tenzreihe erst nach $(2n)^{2n^2}$ Gliedern abbricht.

Man bezeichne das, was nach diesen Veränderungen aus $R_i^{(n)}$
worden ist, mit $r_i^{(n)}(s)$; ebenso gehe $J_n(s)$ in $i_n(s)$ über; dann gilt
noch gleichmäßig für alle s

$$\lim i_n(s) = f(s), \tag{9}$$

und da $i_n(s)$ jetzt ein Polynom ist, haben wir mit Gleichung (9)
sehr einfachen Beweis des bekannten Weierstraßschen Satzes gew
wonach jede stetige Funktion sich durch ganze rationale Funk
mit beliebiger Genauigkeit approximieren läßt.

An Stelle von (6) gibt es unzählig viele andere Funktionen
welche die 2 Bedingungen (3) sowie (5) erfüllen; man kan
zwischen $s_{i-1}^{(n)}$ und $s_{i+1}^{(n)}$ die Funktion $R_i^{(n)}(s)$ als die gebrochene
welche die Punkte $s = s_{i-1}^{(n)}$, $y = 0$ und $s = s_{i+1}^{(n)}$, $y = 0$ mit dem
$s = s_i^{(n)}$, $y = 1$ verbindet, definieren; im übrigen sei $R_i^{(n)}(s) =$
Punkte $s_i^{(n)}$ brauchen jetzt nicht mehr äquidistant zu sein; die mit
Funktionen $R_i^{(n)}(s)$ gebildete Interpolationsformel $J_n(s)$ stellt da
Polygon dar, das der Kurve $y = f(s)$ mit Ecken in den Punkten
einbeschrieben ist.

Um eine analytische Darstellung dieser neuen Funktionen
zu finden, kann man folgendermaßen vorgehen; ich setze, um
zeichnung zu vereinfachen, wieder $s_i^{(n)} = \frac{i}{n}$ voraus:

Die Funktion

$$\varphi(s) = (s-1)e^{-s^{2n^4}} + 1 \tag{10}$$

für genügend große Werte von n unterhalb einer von 1 beliebig verschiedenen oberen Grenze und verläuft für positive s mit r Annäherung folgendermaßen: $\varphi(s) \sim s$ für $0 \leqq s \leqq 1$; $\varphi(s) \sim 1$ > 1; unabhängig von n ist

$$\varphi(0) = 0, \qquad \varphi(1) = 1.$$

Die Funktion

$$\psi(s) = \varphi(1 + s)\varphi(1 - s)$$

daher zwischen -1 und $+1$ die Schenkel des auf der Basis $+1$) mit der Höhe 1 errichteten gleichschenkligen Dreiecks dar leibt im übrigen unter einer endlichen Grenze; die Funktion

$$\chi(s) = e^{-s^{2n^4}}\psi(s)$$

n verläuft zwischen -1 und $+1$ angenähert ebenso, außerhalb Intervalls aber beliebig nahe der s-Achse; man bemerke noch, ets absolut genau

$$\chi(1) = \chi(-1) = 0; \qquad \chi(0) = 1$$

ie Funktion $\chi(ns - i)$ gibt die gesuchte analytische angenäherte llung von $R_i^{(n)}(s)$.

an kann übrigens leicht erreichen, daß der mit $\lim n = \infty$ gegen nvergierende Ausdruck:

$$(s) = \chi(ns)f(0) + \chi(ns-1)f\left(\frac{1}{n}\right) + \chi(ns-2)f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \chi(ns-n)f(1)$$

n Stellen $s = \frac{i}{n}$ mit $f(s)$ übereinstimmend bleibt und so den ter als Interpolationsformel behält; man hat nur in (14) die onen $\chi(ns - i)$ $(i = 0, 1, \ldots n)$ durch $\frac{\chi(ns-i)\omega_i(s)}{\omega_i\left(\frac{i}{n}\right)}$ zu ersetzen,

$\omega_i(s)$ durch die Gleichung

$$\omega_i(s) = \varphi(ns-1)\cdot\varphi(ns-2)\ldots\varphi(ns-\overline{i-2})$$
$$\cdot\varphi(i+2-ns)\cdot\varphi(i+3-ns)\ldots\varphi(n-ns)$$

n ist. Nach den Eigenschaften der Funktion $\varphi(s)$ (10) ist für s, die zwischen $\frac{i-1}{n}$ und $\frac{i+1}{n}$ liegen, der neu hinzugekommene $\frac{\omega_i(s)}{\omega_i\left(\frac{i}{n}\right)}$ der Einheit beliebig nahe und bleibt für alle andern s bsoluten Betrage nach unterhalb einer sich von 1 beliebig wenig heidenden oberen Grenze. Innerhalb der gewollten Genauigkeits-

grenzen wird daher an der Gestalt der Kurve $y = J_n(s)$ nichts geänd
nur sind jetzt für $s = \frac{i}{n}$ in $J_n(s)$ alle Summanden gleich Null bis
den einen $\frac{\chi(ns-i)\omega_i(s)}{\omega_i\left(\frac{i}{n}\right)} f\left(\frac{i}{n}\right)$, der sich für $s = \frac{i}{n}$ auf $f\left(\frac{i}{n}\right)$ reduziert

Die transzendenten Funktionen $\frac{\chi(ns-i)\omega_i(s)}{\omega_i\left(\frac{i}{n}\right)}$ lassen sich nachträg
leicht durch Polynome $\frac{P_i(s)}{P_i\left(\frac{i}{n}\right)}$ ersetzen; $P_i(s)$ erhält man, indem
die einzelnen in $\chi(ns-i)\omega_i(s)$ auftretenden Exponentialfunktionen
Potenzen der vorkommenden Exponenten von e entwickelt und diese Re
abbricht, sobald der Rest für alle s zwischen 0 und 1 genügend
wird; der Nenner $P_i\left(\frac{i}{n}\right)$ ist hinzugefügt, damit das die Funk
$\frac{\chi(ns-i)\omega_i(s)}{\omega_i\left(\frac{i}{n}\right)}$ ersetzende Polynom genau wie diese Funktion für $s = \frac{i}{n}$
Wert 1 annimmt; die Nullstellen $s = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n} \cdots \frac{i-1}{n}, \frac{i+1}{n} \cdots 1$ ble
dem Polynom ohne weiteres erhalten; dies folgt, da ja

$$\chi(ns-i)\omega_i(s) = \varphi(ns)\cdot\varphi(ns-1)\cdots\varphi(ns-\overline{i-1})\varphi(i+1-ns$$
$$\varphi(n-ns)e^{-(ns-i)^2 n^4}$$

ist, daraus, daß das die Funktion $\varphi(ns-l)$ approximierende Poly
$(ns-l-1)\sum_0^k \frac{(-(ns-l)^{2n^4})^k}{k!} + 1$ für $s = \frac{l}{n}$ den Wert 0 anni
welches auch die ganze Zahl k sei.

Die ganze rationale Funktion

$$\sum_0^n \frac{P_i(s)}{P_i\left(\frac{i}{n}\right)} \cdot f\left(\frac{i}{n}\right) \tag{16}$$

ist ganz ähnlich gebaut wie die Lagrangesche Interpolationsfo
stimmt wie diese an den Stellen $s = s_i^{(n)}$ mit $f(s)$ überein, konve
aber im Gegensatz zur Lagrangeschen Interpolationsformel gleichm
nach der beliebigen stetigen Funktion $f(s)$, wenn n über alle Gr
wächst.

Ueber

die Integration

telbar integrabeler Differentialausdrücke.

Von

Dr. W. Feussner,
Privatdocent der Physik und Mathematik.

ckt aus den Sitzungsberichten der Gesellschaft zur Beförderung der gesammten Naturwissenschaften zu Marburg.
(2. Mai 1872).

Marburg.
N. G. Elwert'sche Universitäts-Buchdruckerei.
1872

Die Bedingungen der unmittelbaren Integrabilität sind seit der Gegenstand vielfacher Untersuchungen gewesen und e am häufigsten vorkommenden Arten von Differentialcken schon lange bekannt und bewiesen. Weniger hat ch mit dem Problem beschäftigt, wie das Integral darzu- sei, wenn die Bedingungsgleichungen erfüllt sind. Man ar für Differentiale 1ter Ordn. mit beliebig viel Variabeln r solche beliebiger Ordnung mit einer unabhängigen und oder auch mehreren abhängigen Variabeln das zunächst rbietende weitläufige Verfahren abzukürzen gesucht, aber die einfachste Form dafür gefunden. Die folgende Mitg hat nun lediglich zum Zweck diese kürzeste Form — lich für die eben angeführten Differentialausdrücke — lfe einer im Paragraph 1 erläuterten einfachen Bezeichweise herzustellen. Eine ausführlichere Behandlung des ns wird demnächst an einem anderen Orte erscheinen.

1.

enn V eine Funktion mehrerer Variabeln x, y, z ... et:

$$V = F(x, y, z \ldots)$$

ge $V^{(x)}$ (gelesen »V mit x«) eine Funktion bedeuten, die s denjenigen Gliedern von V besteht, welche mit x besind, $V^{[x]}$ (gelesen »V ohne x«) dagegen sei eine Funktion, nur diejenigen Glieder von V enthält, die von x frei sind. ch sind z. B. für

$$V = ax^2y + byz^2 + cxz + dy^2 + ex$$

nktionen

$$V^{(x)} = ax^2y + cxz + ex$$

$$V^{[x]} = byz^2 + dy^2.$$

Da diese in Klammern gesetzten Indices eine Trennu
stimmter Glieder von V von den übrigen bewirken, so
sie »Trennungsindices« oder »Trennungszeichen« benannt
und zwar wenn es auf eine Unterscheidung ankommt,
runden Klammern »einschliessende«, die mit eckigen
schliessende« Trennungsindices.

Analog mit $V^{(x)}$ und $V^{[x]}$ ist natürlich die Bedeutu
$V^{(y)}$, $V^{[y]}$, $V^{(z)}$, $V^{[z]}$ u. s. w., und es ergibt sich au
Schwierigkeit, wenn man diese Funktionen nochmals
was unter $V^{(x)(y)} = V^{(x,y)}$, $V^{(x)[y]}$, $V^{[x](y)}$, $V^{[x][y]} =$
u. s. w. zu verstehen ist. So ist für unser Beispiel

$$V^{(x,y)} = ax^2y\ ;\ V^{(x)[y]} = cxz + ex$$
$$V^{[x](y)} = byz^2 + dy^2\ ;\ V^{[x,y]} = o.$$

Es folgt nun aus der Definition sofort

(1) $V^{(x,y)} = V^{(y,x)}$; $V^{(x)[y]} = V^{[y](x)}$ u. s. f.

d. h. die Reihenfolge der Trennungsindices ist will
Ferner können wir ebenfalls in unmittelbarer Folge der De
V in mannigfaltiger Weise zerlegen; z. B.

(2) $V = V^{(x)} + V^{[x]} = V^{(x,y)} + V^{(x)[y]} + V^{[x](y)} + V$
$= V^{(x,y,z)} + V^{(x,y)[z]} + V^{(x,z)[y]} + V^{(x)[y,z]} + V^{[x}$
$+ V^{[x,z](y)} + V^{[x,y](z)} + V^{[x,y,z]}$ u. s. w.

oder auch

(3) $V = V^{(x)} + V^{[x](y)} + V^{[x,y](z)} + V^{[x,y,z]}$
$= V^{(z)} + V^{[z](y)} + V^{[y,z](x)} + V^{[x,y,z]}$ u. s. f.

Häufig kann es zweifelhaft scheinen, wie man eine Funk
in $V^{(x)}$ und $V^{[x]}$ zerlegen solle; so könnte man z. B.

$$V = (ax + b)^n$$

schwanken, ob man

$$V^{(x)} = (ax + b)^n\ ;\ V^{[x]} = o \quad \text{oder}$$
$$V^{(x)} = (ax + b)^n - b^n\ ;\ V^{[x]} = b^n$$

setzen solle. Es ist das durchaus gleichgültig, wenn m
wie das ja selbstverständlich ist, die für ein bestimmtes
mal gewählte Art der Trennung durch die ganze Rechnu
durch unverändert beibehält. Indessen ist es doch g

inkommen darüber zu treffen, und wir schliessen uns an i den einfachsten Fällen sich unmittelbar darbietende ren an. Ist nämlich V eine entwickelt gegebene ganze ıische Funktion, so ist es am natürlichsten, wie wir es chon oben gethan haben, unter $V^{(x)}$ das Aggregat der , welche Potenzen von x enthalten, und unter $V^{[x]}$ die ı Glieder zu verstehn. Es ist dann

$$V^{(x)} = \int \frac{d\,V}{d\,x}\, d\,x\ ,$$

das liegende d, das auch im Folgenden immer als Zeichen rtiellen Differentiation gebraucht wird, hier in dx andeutet, ei der Integration nur x als variabel angesehen werden nd wo selbstverständlich eine willkürliche Constante *nicht* gen ist.

s ist nun am einfachsten, dieser Gleichung (4) allgemeine keit zu geben, so dass durch sie und die Art, wie wir zu ren gewohnt sind, die Trennung von V in $V^{(x)}$ und $V^{[x]}$ mt ist.

s folgt dann ferner aus (4) unter Voraussetzung der keit der betreffenden Funktionen:

$$V^{(x,y)} = \iint \frac{d^2\,V}{dx\,dy}\, d\,x\,d\,y$$

$$V^{(x,y,z)} = \iiint \frac{d^3\,V}{dx\,dy\,dz}\, d\,x\,d\,y\,d\,z \quad \text{u. s. w.}$$

dem ergeben sich sofort die Formeln

$$\frac{d\,(V^{(x)})}{d\,y} = \left(\frac{d\,V}{d\,y}\right)^{(x)}\ ;\ \frac{d\,(V^{[x]})}{d\,y} = \left(\frac{d\,V}{d\,y}\right)^{[x]}\ ;\ \ldots.$$

$$\int V^{(x)}\,d\,y = (\int V\,dy)^{(x)}\ ;\ \int V^{[x]}\,d\,y = (\int V dy)^{[x]}\ ;\ \ldots..$$

bei partiellen Differentiationen (oder Integrationen) und ngen ist die Reihenfolge dieser Operationen willkürlich, ie in Beziehung auf verschiedene Variabeln auszuführen sind.

2.

edeutet nun V eine unbekannte Funktion mehrerer Varia- deren partielle Differentialquotienten nach diesen Variabeln en sind, und handelt es sich darum V zu bestimmen, so

führt das bekannte gewöhnliche Verfahren zu recht weitlä
Rechnungen und auch die Formel

$$V = \int_{x_0}^{x} \varphi(x,y,z..)dx + \int_{y_0}^{y} \chi(x_0,y,z..)dy + \int_{z_0}^{z} \psi(x_0,y_0,z.$$
$$+ \ldots + C$$

die man wohl aufgestellt hat (s. z. B. Moigno, leç. de
diff. etc. II, p. 490) und worin $\varphi(x,y,z..)$, $\chi(x,y,z..)$, $\psi(x$
die gegebenen partiellen Differentialquotienten von V n
y, z .., ferner x_0, y_0, z_0 .. beliebig zu wählende Constant
deuten, bringt im Allgemeinen keine Vereinfachung hervor
gegen führt uns die Anwendung der Betrachtungen des Parag
auf das allgemeine Verfahren, wie wir sogleich nachweisen
zu einer sehr einfachen Formel.

Ist V eine Funktion der n Variabeln $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$
werden die gegebenen Differentialquotienten von V nach
Variabeln der Reihe nach durch $X_1, X_2, X_3 \ldots X_n$ bezei
so hat man bekanntlich zunächst

$$V = \int X_1 \, dx_1 + f_1(x_2, x_3 \ldots x_n)$$

worin f_1 eine vorläufig unbestimmte Funktion von $x_2 \ldots x$
zeichnet. Daraus folgt weiter

$$\frac{dV}{dx_2} = X_2 = \int \frac{dX_1}{dx_2} dx_1 + \frac{df_1}{dx_2} \quad \text{also}$$

$$f_1 = \int X_2 \, dx_2 - \iint \frac{dX_1}{dx_2} dx_2 \, dx_1 + f_2(x_3 \ldots x_n) = \int X_2 \, d$$
$$- \int X_1^{(2)} dx_1 + f_2(x_3 \ldots x_n)$$

und

$$V = \int X_1^{[2]} dx_1 + \int X_2 \, dx_2 + f_2(x_3 \ldots x_n)$$

Wir haben hierbei $X^{(2)}$ und $X^{[2]}$ statt $X^{(x_2)}$ und $X^{[x_2]}$
Abkürzung gesetzt und werden auch fernerhin $X^{[2,3]}$
$X^{[x_2,x_3]}$ u. s. w. gebrauchen. Aus dem eben gefundenen
druck für V ergibt sich

$$\frac{dV}{dx_3} = X_3 = \int \frac{dX_1^{[2]}}{dx_3} dx_1 + \int \frac{dX_2}{dx_3} dx_2 + \frac{df_2}{dx_3} \text{ al}$$

$$f_2 = \int X_3 \, dx_3 - \int X_1^{[2](3)} dx_1 - \int X_2^{(3)} dx_2 + f_3(x_4 \ldots x_n$$

und damit

$\int X_1^{[2,3]}\, dx_1 + \int X_2^{[3]}\, dx_2 + \int X_3\, dx_3 + f_3(x_4 \ldots x_n)$

ersieht leicht, wie es weitergeht, man erhält:

$$\int X_1^{[2,3,4]}\, dx_1 + \int X_2^{[3,4]}\, dx_2 + \int X_3^{[4]}\, dx_3 + \int X_4 dx_4 + \\ + f_4(x_5 \ldots x_n)$$

; endlich

$$= \int X_1^{[2,3\ldots n]}\, dx_1 + \int X_2^{[3\ldots n]}\, dx_2 + \int X_3^{[4\ldots n]}\, dx_3 + \\ + \ldots + \int X_{n-1}^{[n]}\, dx_{n-1} + \int X_n\, dx_n + C.$$

es aber durchaus gleichgültig, in welcher Reihenfolge Integration der einzelnen partiellen Differentialquotienten vornehmen, und da wir n Differentialquotienten haben, ien wir n! verschiedene Anordnungen derselben treffen halten also auch ebensoviel verschieden gestaltete Formeln Sind z. B. a, b ... s, t beliebige Zahlen aus der Reihe n und integriren wir in dieser Ordnung, so kommt:

$$V = \int X_a^{[b\ldots s,t]}\, dx_a + \int X_b^{[c\ldots s,t]}\, dx_b + \ldots\ldots + \\ + \int X_s^{[t]}\, dx_s + \int X_t\, dx_t + C$$

sweise möge noch die Formel von V hier stehen, wo die olge der Integrationen gerade die entgegengesetzte von (7) ist. Wir haben dann in umgekehrter Ordnung ge-en:

$$V = \int X_1\, dx_1 + \int X_2^{[1]}\, dx_2 + \int X_3^{[1,2]}\, dx_3 + \ldots + \\ + \int X_n^{[1\ldots n-1]}\, dx_n + C.$$

besonders bemerkenswerth, dass in allen diesen Formeln, ürlich zu identischen Ausdrücken führen, keine Glieder vorkommen oder sich aufheben können, denn es ist n (7) das erste Integral eine Funktion von x_1 *allein*, eite kann eine Funktion von x_1 und x_2 sein, enthält *denfalls* in allen seinen Gliedern x_2, und so enthalten ipt alle Glieder irgend eines beliebig herausgegriffenen ls (z. B. des kten) eine Variabele (x_k), die in keinem angehenden Integrale vorkommt. Daraus folgt aber, dass r gegebene Formel die einfachste ist, die für die Ableitung

einer Funktion aus ihren bekannten partiellen Diff
quotienten aufgestellt werden kann.

Ein einfaches Beispiel (s. Moigno, leçons etc. II,
mag das Verfahren erläutern. Der Ausdruck

$$(2x_2^2 + 4ax_3^2x_1^2)x_1\,dx_1 + \left(\frac{1}{\sqrt{x_2^2+x_3^2}} + 3x_2 + 2x_1^2\right)$$
$$+ \left(4x_3^2 + 2ax_1^4 + \frac{1}{\sqrt{x_2^2+x_3^2}}\right)x_3\,d$$

erfüllt die bekannten Bedingungsgleichungen; wir habe

$$X_1 = (2x_2^2 + 4ax_3^2x_1^2)x_1 \;;\; X_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{x_2^2+x_3^2}} + 3x_2 +\right.$$
$$X_3 = \left(4x_3^2 + 2ax_1^4 + \frac{1}{\sqrt{x_2^2+x_3^2}}\right)x_3$$

Integriren wir nun nach Formel (7), so ist

$$V = \int X_1^{[2,3]}\,dx_1 + \int X_2^{[3]}\,dx_2 + \int X_3\,dx_3 + \text{Const.}$$
$$= \int 0\,dx_1 + \int (3x_2 + 2x_1^2)x_2\,dx_2 +$$
$$+ \int \left(4x_3^2 + 2ax_1^4 + \frac{1}{\sqrt{x_2^2+x_3^2}}\right)x_3\,d$$
$$= x_2^3 + x_1^2x_2^2 + x_3^4 + ax_1^4x_3^2 + \sqrt{x_2^2+x_3^2} + C.$$

Integriren wir dagegen nach Formel (7 b), so ist

$$V = \int X_1 dx_1 + \int X_2^{[1]}\,dx_2 + \int X_3^{[1,2]}\,dx_3 + \text{Const.}$$
$$= \int (2x_2^2 + 4ax_3^2x_1^2)x_1 dx_1 + \int \left(\frac{1}{\sqrt{x_2^2+x_3^2}} + 3x_2\right)$$
$$+ \int 4x_3^3\,dx_3 + C.$$
$$= x_1^2x_2^2 + ax_1^4x_3^2 + \sqrt{x_2^2+x_3^2} + x_2^3 + x_3^4 + C.$$

ein Ausdruck, der mit dem eben gefundenen identisch
es sein muss.

Wir können übrigens in viel einfacherer Weise u
auf das allgemeine Integrationsverfahren zurückzugre
Gleichungen (7), (7 a), (7 b) unmittelbar aus den For
seres ersten Paragraphen ableiten. Es ist nämlich
nach Gl. (3)

$$V = V^{(1)} + V^{[1](2)} + V^{[1,2](3)} + \ldots V^{[1\ldots n-1](n)} + V$$

ist das letzte Glied ein von sämmtlichen Variabeln freier
ıck, also eine Constante; alle übrigen Glieder können
ge Gl. (4) in Integrale verwandelt werden. Wir erhalten
ch:

$$\frac{dV}{dx_1}\,dx_1 + \int \frac{dV^{[1]}}{dx_2}\,dx_2 + \int \frac{dV^{[1,2]}}{dx_3}\,dx_3 + \ldots. +$$

$$+ \int \frac{dV^{[1\ldots n-1]}}{dx_n}\,dx_n + C.$$

die Gl. (5) und Einsetzung der X für die partiellen
ntialquotienten wird hieraus

$$X_1\,dx_1 + \int X_2^{[1]}\,dx_2 + \int X_3^{[1,2]}\,dx_3 + \ldots +$$

$$+ \int X_n^{[1\ldots n-1]}\,dx_n + C.$$

ınser Gleich. (7 b). Hätten wir eine andere Zerlegung
angewandt, so würden wir auch natürlich eine andere
der allgemeinen Form (7 a) enthaltenen Gleichungen be-
en haben. Zum Beispiel durch

$$^{n)} + V^{[n](n-1)} + V^{[n-1,n](n-2)} + \ldots. + V^{[2\ldots n](1)} + V^{[1\ldots n]}$$

eichung (7). —

3.

ir wenden uns nun zu den unmittelbar integrabelen
ntialausdrücken höherer Ordnung zwischen zwei Variabeln.
ınen wir die unabhängige Variabele mit x, die abhängige
und die successiven Differentialquotienten derselben nach
h $y_1, y_2 \ldots.$, so hat ein Differentialausdruck n^{ter} Ordnung
gemeinen die Form

$$V_0\,dx = F(x, y_0, y_1, \ldots y_n)\,dx$$

erselbe unmittelbar integrabel sein, d. h. können wir ohne
estimmte Art der Abhängigkeit zwischen y_0 und x anzu-
n das Integral

$$\overset{*}{V}_1 = \int V_0\,dx$$

len, so muss bekanntlich die Bedingungsgleichung erfüllt

$$Y_{00} - \frac{dY_{01}}{dx} + \frac{d^2 Y_{02}}{dx^2} - \ldots. (-1)^n \frac{d^n Y_{0n}}{dx^n} = 0,$$

worin für die partiellen Differentialquotienten von V_0 abkür
Bezeichnungen, nämlich

$$Y_{00} \text{ für } \frac{dV_0}{dy_0},\ Y_{01} \text{ für } \frac{dV_0}{dy_1},\ Y_{02} \text{ für } \frac{dV_0}{dy_2} \ldots.$$

angewandt sind. Bezeichnen wir analog die partiellen Differe
quotienten von V_1, welches dann eine Funktion von x
$y_1 \ldots. y_{n-1}$ ist, nämlich

$\frac{dV_1}{dy_0}$ durch Y_{10}, $\frac{dV_1}{dy_1}$ durch Y_{11}, $\frac{dV_1}{dy_2}$ durch $Y_{12} \ldots.$

$\frac{dV_1}{dx}$ durch X_1, so haben wir

$$(9)\quad \begin{cases} Y_{10} = Y_{01} - \frac{dY_{02}}{dx} + \frac{d^2Y_{03}}{dx^2} \ldots.. (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx} \\ Y_{11} = Y_{02} - \frac{dY_{03}}{dx} + \frac{d^2Y_{04}}{dx^2} \ldots.. (-1)^{n-2} \frac{d^{n-2}}{dx} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ Y_{1\,n-2} = Y_{0\,n-1} - \frac{dY_{0n}}{dx} \\ Y_{1\,n-1} = Y_{0n} \end{cases}$$

und

$$(10)\quad X_1 = V_0 - y_1 Y_{10} - y_2 Y_{11} - \ldots. - y_n Y_{1\,n}$$

Wenn also die Gleichung (8) erfüllt ist, so liefern un
Gleichungen (9) und (10) sämmtliche partielle Differe
quotienten von V_1. Damit ist aber unsere Aufgabe au
vorhin behandelten Fall reducirt, indem wir nur die Reih
dortigen Variabeln $x_1, x_2 \ldots$ durch unsere jetzigen x, y_0, y
zu ersetzen brauchen. Wir erhalten so z. B. nach Gl. (7

$$(11)\quad V_1 = \int X_1^{[y_0 \ldots y_{n-1}]}\, dx + \int Y_{10}^{[y_1 \ldots y_{n-1}]}\, dy_0 + \ldots.$$
$$+ \int Y_{1n-2}^{[y_{n-1}]}\, dy_{n-2} + \int Y_{1n-1}\, dy_{n-1} + C.$$

oder nach (7 b)

$$(11\,b)\quad V_1 = \int X_1\, dx + \int Y_{10}^{[x]}\, dy_0 + \int Y_{11}^{[x, y_0]}\, dy_1 + \ldots.$$
$$+ \int Y_{1n-1}^{[x, y_0 \ldots y_{n-2}]}\, dy_{n-1} + C.$$

Natürlich geben diese Formeln die Ausdrücke für V_1 in

sten Gestalt aus denselben Gründen wie im vorigen
aph die Gleichungen (7). Wir haben daher hiermit ganz
in anwendbare, möglichst einfache Formeln für die In-
on vollständiger Differentiale zweier Variabeln, während
sher von Poisson (Mém. de l'Ac. roy. XII), J. Binet
, leçons etc. II, p. 551 ff.), Stoffel und Bach (Journ.
h. p. Liouville. Sér. 2. t. 7. p. 49 ff.) aufgestellte For-
nancherlei unbequeme Vorbereitungen und schliessliche
onen erfordern oder nicht allgemein anwendbar sind. —
sich die Rechnung möglichst einfach gestalte, schlägt man
ten folgendes Verfahren ein. Mit Hülfe der aus (9) sich
den Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} Y_{1n-1} = Y_{0n} \;;\; Y_{1n-2} = Y_{0n-1} - \dfrac{dY_{1n-1}}{dx} \;;\; \ldots\ldots \\ \ldots\; Y_{10} = Y_{01} - \dfrac{dY_{11}}{dx} \end{array}\right\}$$

nt man zunächst die Grössen $Y_{1n-1} \ldots\ldots Y_{10}$, unter-
ob die Bedingungsgleichung der unmittelbaren Integra-
die man auch so:

$$Y_{00} - \frac{dY_{10}}{dx} = 0$$

en kann, erfüllt ist, stellt dann nach (10) X_1 her und
et endlich nach (11) oder (11 b) oder einer der übrigen
n Gleichungen V_1. Beispielsweise möge

$$V_0 = (10\,y_1 - 2\,y_0)\,y_2 - 2\,y_1^2 - \frac{x\,y_1}{y_0^2} + \frac{1}{y_0} + 2$$

t werden (s. Dienger, Diff. und Int. r. 3 A. II. S. 164).
nalten

$$Y_{11} = Y_{02} = 10\,y_1 - 2\,y_0$$

$$Y_{01} - \frac{dY_{11}}{dx} = -2\,y_1 - \frac{x}{y_0^2}\,,\quad Y_{10}^{[y_1]} = -\frac{x}{y_0^2}$$

$$_0 - y_2 Y_{11} - y_1 Y_{10} = \frac{1}{y_0} + 2\;;\quad X_1^{[y_0\,y_1]} = 2$$

ch (11)

$$V_1 = 5\,y_1^2 - 2\,y_0\,y_1 + \frac{x}{y_0} + 2\,x + C.$$

h dem hier entwickelten ist ein von Bertrand (Journ. de

Math p. p. Liouville t. 14 p. 123) angegebenes elegantes fahren; wie dort ist es auch bei dem unsrigen im Fal Nichtintegrabilität gewöhnlich nicht erforderlich die Rec bis zur Gl. (13) fortzusetzen, wenn man nämlich schon bei Vergleichung der Y_{1n}, Y_{1n-1} ..... erkennt, dass eine der Gleichungen

$$\frac{dY_{1p}}{dy_q} = \frac{dY_{1q}}{dy_p}$$

nicht erfüllt ist.

4.

Ganz dasselbe Verfahren, durch das wir im vorigen graph die Formel für zwei Variabele erhalten haben, wir auch einschlagen, wenn V_0 Funktion einer unabhä und mehrerer abhängigen Variabeln nebst den succ Differentialquotienten der letzteren ist. Beschränken w der Einfachheit wegen auf zwei abhängige Variabele (y_0 u und bezeichnen die partiellen Differentialquotienten von V_1 in Beziehung auf $y_0, y_1 .. y_n$ wie im vorigen Par und analog die in Beziehung auf $z_0, z_1 .. z_m$, so si kanntlich die Bedingungsgleichungen der unmittelbaren grabilität

$$(14)\quad \begin{cases} Y_{00} - \frac{dY_{01}}{dx} + \frac{d^2 Y_{02}}{dx^2} \ldots\ldots (-1)^n \frac{d^n Y_{0n}}{dx^n} = \\ Z_{00} - \frac{dZ_{01}}{dx} + \frac{d^2 Z_{02}}{dx^2} \ldots\ldots (-1)^m \frac{d^m Z_{0m}}{dx^m} = \end{cases}$$

und die partiellen Differentialquotienten von V_1:

$$Y_{10} = Y_{01} - \frac{dY_{02}}{dx} + \frac{d^2 Y_{03}}{dx^2} \ldots\ldots (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1} Y_{0n}}{dx^{n-1}}$$

$$Y_{11} = Y_{02} - \frac{dY_{03}}{dx} + \frac{d^2 Y_{04}}{dx^2} \ldots\ldots (-1)^{n-2} \frac{d^{n-2} Y_{0n}}{dx^{n-2}}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$Y_{1n-2} = Y_{0n-1} - \frac{dY_{0n}}{dx}$$

$$Y_{1n-1} = Y_{0n}$$

$$Z_{10} = Z_{01} - \frac{dZ_{02}}{dx} + \frac{d^2 Z_{03}}{dx^2} \ldots\ldots (-1)^{m-1} \frac{d^{m-1} Z_{0m}}{dx^{m-1}}$$

$$Z_{11} = Z_{02} - \frac{dZ_{03}}{dx} + \frac{d^2 Z_{04}}{dx^2} \ldots\ldots (-1)^{m-2} \frac{d^{m-2} Z_{0m}}{dx^{m-2}}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$Z_{1m-2} = Z_{0m-1} - \frac{dZ_{0m}}{dx}$$

$$Z_{1m-1} = Z_{0m}$$

wir nun V_1, das hier also eine Funktion von x, y_0, y_{n-1}, z_0, z_1 .... z_{m-1} ist, in analoger Weise, wie im Paragraph, so ist z. B.

$$V_1^{(x)} + V_1^{[x](y_0)} + V_1^{[x,y_0](y_1)} \ldots\ldots + V_1^{[x,y_0 \ldots y_{n-1}](z_0)} +$$

$$+ V_1^{[x,y_0 \ldots y_{n-1}z_0](z_1)} + \ldots\ldots + V_1^{[x,y_0 \ldots y_{n-1}z_0 \ldots z_{m-2}](z_{m-1})} +$$

$$+ V_1^{[x,y_0 \ldots z_{m-1}]}$$

nach

$$= \int X_1 dx + \int Y_{10}^{[x]} dy_0 + \ldots\ldots + \int Y_{1n-1}^{[x \ldots y^{n-2}]} dy_{n-1} +$$

$$\ldots y_{n-1}] \; dz_0 + \ldots + \int Z_{1m-1}^{[x \ldots y_{n-1},\; z_0 \ldots z_{m-2}]} \; dz_{m-1} + C.$$

derer Reihenfolge der Trennungsglieder würde man andere analog gebildete Ausdrücke für V_1 erhalten. sich bei mehr abhängigen Variabeln die Rechnung gebedarf keiner weiteren Bemerkung, da es aus dem Obigen bar ersichtlich ist.

5.

Schliesslich mag noch kurz der Fall erwähnt werde
die Funktion V_0, die hier der Einfachheit wegen nur als Fu
von x, y_0, $y_1 \ldots y_n$ angesehn werden soll, mehrmals hint
ander unmittelbare Integrationen zulässt. Sind so s aufein
folgende Integrationen möglich, so muss V_0 bekanntlich
Bedingungsgleichungen

$$(17) \qquad \sum_{r=p-1}^{r=n} (-1)^{r-p+1} \binom{r}{p-1} \frac{d^{r-p+1} Y_{0r}}{dx^{r-p+1}} = 0$$

erfüllen, wo p nach einander die Werthe $1, 2 \ldots . s$ anzun
hat. Man könnte nun nach dem Paragr. 3 die einzelne
grationen nach einander vornehmen und so schliesslich z
sten Integrale gelangen, aber man kann dieses auch unab
von den vorhergehenden darstellen und das wollen w
noch kurz betrachten. Wir wollen mit $V_1, V_2 \ldots V_s$ di
der Integrale von V_0 bezeichnen und die partiellen Diffe
quotienten dieser Funktionen mit den entsprechenden
versehen (so dass z. B. $Y_{23} = \frac{dV_2}{dy_3}$ ist). Ebenso nu
gewöhnlich die obigen Gleichungen (17) aus Gl. (8) in Pa
abgeleitet werden, können wir auch aus den Gleichungen
Werthe der partiellen Differentialquotienten aller V a
Wir erhalten dadurch:

$$(18) \qquad Y_{p,q} = \sum_{r=p+q}^{r=n} (-1)^{r-p-q} \binom{r-q-1}{p-1} \frac{d^{r-p-q} Y_{0r}}{dx^{r-p-q}}$$

also namentlich

$$(18a) \quad \begin{cases} Y_{s0} = \sum_{r=s}^{r=n} (-1)^{r-s} \binom{r-1}{s-1} \frac{d^{r-s} Y_{0r}}{dx^{r-s}} \\ Y_{s1} = \sum_{r=s+1}^{r=n} (-1)^{r-s-1} \binom{r-2}{s-1} \frac{d^{r-s-1} Y_{0r}}{dx^{r-s-1}} \\ \vdots \qquad \vdots \\ Y_{s,\,n-s-1} = Y_{0,n-1} - s \frac{d Y_{0n}}{dx} \\ Y_{s,\,n-s} = Y_{0,n} \end{cases}$$

Für das gesuchte V_s ergibt sich dann die Gleichung

$$_s = \iint \ldots \int (V_0 - S)^{[y_0 \cdots y_n]}\, dx^s + \int Y_{s0}^{[y_1 \cdots y_{n-s}]} dy_0 +$$

$$+ \int Y_{s1}^{[y_2 \cdots y_{n-s}]} dy_1 + \ldots + \int Y_{s,n-s} dy_{n-s} + C_s x^{s-1} +$$

$$+ C_{s-1} x^{s-2} + \ldots + C_1 \quad \text{worin}$$

$$= y_1 \left[Y_{10} + \frac{d Y_{20}}{dx} + \ldots + \frac{d^{s-1} Y_{s0}}{dx^{s-1}} \right] +$$

$$+ y_2 \left[Y_{11} + \frac{d Y_{21}}{dx} + \ldots \frac{d^{s-1} Y_{s1}}{dx^{s-1}} \right] + \ldots .$$

$$\sum_{=1}^{=s} \sum_{r=p+q}^{r=n} (-1)^{r-p-q} \binom{r-q-1}{p-1} y_{q+1} \frac{d^{r-p-q} \frac{d^{p-1} Y_{or}}{dx^{p-1}}}{dx^{r-p-q}}$$

iemlich complicirt aussehende Formel für S vereinfacht gemein durch die ausschliessenden Trennungsindices, mit dieses in (19) behaftet ist; denn da $S^{[y_0 \cdots y_n]}$ eine Funktion llein ist, so haben wir in (20) nur diejenigen Glieder

erentialquotienten $\dfrac{d^{r-p-q} \frac{d^{p-1} Y_{or}}{dx^{p-1}}}{dx^{r-p-q}}$ zu berücksichti-

che die Form $\frac{\varphi(x)}{y_{q+1}}$ haben, und die lassen sich fast ehr einfach und rasch bestimmen. Wir wollen hier nicht if die Ableitung der Formel (19) eingehen, sondern nur einem Beispiel ihre Anwendung erläutern. Es sei

$$_0 + xy_1 + y_2)^3 + 3(y_0 + xy_1 + y_2)(2y_1 + xy_2 + y_3) +$$

$$+ 3y_2 + xy_3 + y_4] e^{xy_0 + y_1} + \frac{2}{x^3}$$

eine dreimalige Integration zulässt. Wir haben nun, unmittelbar erkennt, sehr einfach:

$$[y_0 \cdots y_4] = \frac{2}{x^3}$$

$$Y_{0,3}^{[y_1]} - 3 \left(\frac{d Y_{04}}{dx} \right)^{[y_1]} = 0$$

$$_{04} = e^{xy_0 + y_1}$$

nach (19)

$$\int \frac{2}{x^3}\, dx + \int e^{xy_0 + y_1} dy_1 + C_3 x^2 + C_2 x + C_1$$

$$) + e^{xy_0 + y_1} + C_3 x^2 + C_2 x + C_1 .$$

65. Nachricht

über das Herzogliche

ristians-Gymnasium zu Eisenberg

auf

das Schuljahr 1898|99

mit welcher

zur Entlassung der Abiturienten

für

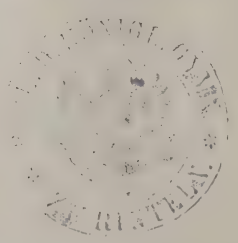
Mittwoch, den 15. März, vormittags 10 Uhr

ergebenst einladet

der Direktor.

Inhalt:

Ueber die Guldinsche Regel und ihre Verwertung im Unterricht von Prof. Dr. Fleck.
Schulnachrichten vom Direktor.



Eisenberg.
Paul Kaltenbach (früher H. Schnorrsche Hofbuchdruckerei).
1899.

gr.-Nr. 732.

...er die Guldinsche Regel und ihre Verwertung im Unterricht.

Vom

Professor Dr. Fleck.

r Ordnung der Reifeprüfung an unseren beiden Landesgymnasien sind bei der schriftlichen ng in der Mathematik vier gesonderte Aufgaben aus der Planimetrie, Stereometrie, Trigonometrie zu stellen, durch deren Bearbeitung der Schüler zeigen soll, daß er sich ausreichende Uebung endung seiner Kenntnisse erworben hat. Im Hinblick auf diese Forderung wird es sich der ngelegen sein lassen, durch vielfache Uebung bei seinen Schülern eine gewisse Gewandtheit im Aufgaben zu erreichen. Da aber diese Aufgaben, insofern ihre Bearbeitung eine selbständige soll, von den in der Klasse behandelten in angemessener Weise abweichen müssen, so ist es daß der Lehrer beim Unterricht über reichliches Uebungsmaterial verfügt. Berücksichtigt man nach den methodischen Bemerkungen zu den neuen Lehrplänen, sowie nach der Ordnung für prüfung in der Untersekunda der Nachdruck auf die Betrachtung der einfachen Körper gelegt rüfling eine Aufgabe über Körperberechnung gestellt werden soll, so wird man zugeben, daß rung bezw. eine möglichst vielseitige Gestaltung des stereometrischen Uebungsmaterials in der bracht erscheint, umsomehr, als gerade durch die Behandlung von stereometrischen Aufgaben Gelegenheit geboten wird, das räumliche Anschauungsvermögen zu bethätigen, die geometrischen stigen und gleichzeitig seine Uebung im Rechnen zu vervollkommnen.

zu diesem Zweck recht brauchbarer Satz ist die sogenannte Guldinsche Regel, welche im her betrachtet und zur Lösung von Aufgaben verwandt werden soll.

I. Ueber die Guldinsche Regel.

m eine Ebene um eine in ihr liegende Gerade (Achse) rotiert, so beschreibt jeder Punkt der er nicht in der Achse liegt, die Peripherie eines Kreises; eine in ihr liegende Strecke, welche en die Achse gerichtet ist, wird einen Kreis oder einen Kreisring beschreiben, je nachdem sie endigt oder nicht (ohne dieselbe zu schneiden). Ist die gegebene Strecke schief gegen die Achse beschreibt sie entweder den Mantel eines Kegels oder den eines Kegelstumpfes, je nachdem sie heranreicht oder nicht; läuft sie dagegen der Achse parallel, so wird als Umdrehungsfläche nantel entstehen. Grenzt man schließlich ein Stück jener Ebene durch Linien vollständig ab, dasselbe bei der Umdrehung der Ebene um die feste Achse einen ringförmigen Raum, einen (mathematischen) Rotationskörper nennt.

Guldinsche Regel lehrt die Oberflächen und die Volumina solcher Umdrehungskörper[1])

[1]) Dieselben lassen sich mittelst der Schwungmaschine auf mehrfache Weise leicht veranschaulichen.

So verschieden nun auch der Wortlaut[1]) dieser Regel gegeben wird, der Sinn ist d
der, daß die Fläche oder der Rauminhalt eines Körpers, welche durch die Umdrehung ei
gebildes oder einer begrenzten Fläche um eine in ihrer Ebene liegende, die Figur nicht schneid
entstehen, durch das Produkt der erzeugenden Größe (Länge des Liniengebildes oder Flächeninhalt
und der Peripherie des von ihrem Schwerpunkte beschriebenen Kreises gefunden wird.

Die Regel wird gewöhnlich die „Guldinsche Regel" genannt, weil Guldin[2]) dieselbe
Werke vorgetragen und auf viele Fälle angewandt hat; sie heißt aber auch „barycentrische Me
findet sich, wie wir später noch sehen werden, auch bei anderen Gelehrten damaliger und frü

Das von Guldin verfaßte und in Wien veröffentlichte Werk „Centrobaryca" besteht aus
von denen das erste „de centri gravitatis inventione" im J. 1635, das zweite „de usu centri g
1640 erschienen ist, während die beiden letzten „de fructu ex usu centri gravitatis collecto
gloria ab usu centri gravitatis parta" im J. 1641 veröffentlicht worden sind. Das 1. Buch en
die Definitionen für den Schwerpunkt, wie sie Aristoteles, Pappus[4]), Commandinus, Ubaldus
und Stevinius gegeben haben, ferner die allgemeinen Prinzipien über die Behandlung des Sch
und schließlich die Konstruktion desselben für gegebene Punkte, Strecken, Umfänge von geradlinig
krumme Linien, Umfänge von krumm- und gemischtlinigen Figuren, Oberflächen von Körpern
für Körper selbst. Das zweite Buch handelt von der Teilung und Ausmessung gerader un
Linien sowie gerad- und krummliniger Figuren, von der Lage des Schwerpunktes gegebener
Flächen in Bezug auf eine Drehungsachse sowie von der Ausmessung der Raumgrößen, w
Rotation von Punkten, Linien und Flächen entstehen, und giebt schließlich die allgemeine R
welcher diese berechnet werden können. In den beiden letzten Büchern findet sich die Anwendun
auf Körper, welche vorher schon von Kepler und Cavalieri behandelt worden waren; und vo
sind die beiden ersten Kapitel den von Archimedes behandelten Körpern gewidmet, im 3. Kap
„etliche Verhältnisse deutlicher und leichter demonstriert, als es von Euklid im 12. Buch seiner
geschehen ist, während das 4. Kapitel gegen Kepler, das 5. gegen Cavalieri gerichtet ist.

Was nun speziell die genannte Regel anlangt, so ist dieselbe im 8. Kapitel des 2.
läutert und im 3. Satze[5]) folgendermaßen gegeben: Regula generalis compositionis potestatum
cuiuscunque gradus haec est:

„Quantitas rotanda in viam rotationis ducta producit potestatem rotundam uno gra
potestate sive quantitate rotata".

Um den Inhalt dieser Regel allgemein verständlich wiedergeben zu können, muß m
daß in der Geometrie nur von so viel Potenzen die Rede sein kann, als es Dimensionen giebt,
dreien. Eine Potenz vom 1. Grade (Linie) entsteht durch die Bewegung eines Punktes[6]),
2. Grades (Fläche) durch die Bewegung einer Linie, und eine Potenz 3. Grades (Körper) du

---

[1]) Vergl. Wrobel, Kambly, Mehler, Lieber und Lühmann, Hubert Müller, Duhamel (übersetzt von
Baltzer, Meier Hirsch, Klügels und Hofmanns math. Wörterbuch und Cantor, Vorlesungen über Gesch. d. Ma

[2]) Paul Guldin war am 12. Juni 1577 in St. Gallen geboren und fing als Goldschmiedgesell an. J
jahre trat er zu Freisingen gegen den Willen seiner Eltern in den Jesuitenorden ein und verwandelte bei
änderung seinen früheren Namen Habakuk in Paul. Guldins Obere erkannten seine große mathematische
ließen ihn in Rom weiter ausbilden, wo er später selbst als Lehrer wirkte, bevor er zu gleicher Thätigke
dann nach Graz geschickt wurde. Er starb in Graz am 3. Nov. 1643. (Cantor, Vorlesungen über Gesch. der

[3]) Vollständig: „De usu centri gravitatis binarum specierum quantitatis continuae sive de co
resolutione potestatum rotundarum.".

[4]) A. Pappo Alexandrino autem lib. 8 collect. Mathematicarum sic definitur. etc.

[5]) Propositio III. Rationem compositionis ac mensurationis potestatum rotundarum exponere eiu
universalem tradere.

[6]) Obgleich Guldin von seiner Regel behauptet, daß sie „brevis, universalis, simplex atque an
omni gradui potestatum deserviens" sei, so glaubt er doch besonders darauf hinweisen zu müssen, daß die
Linie aus dem Punkte (Potenz vom nullten Grade), welcher keine Ausdehnung hat, nicht gegen die Regel v
Rotationsweg, welcher sonst den höheren Grad hervorbringt, hier selbst der höhere Grad ist.

r Fläche, wenn die Bewegung jedesmal auf dem kürzesten Wege ausgeführt wird. Derselbe Rotationsbewegung der von dem Schwerpunkte der rotierenden Größe beschriebene Kreis (via Die durch Umschwung entstandenen Raumgrößen werden Potestates rotundae genannt. Rotiert ine Linie, so bringt sie eine Rotationsfläche hervor, deren Inhalt durch das Produkt aus ihrer n Umfang des von ihrem Schwerpunkte [1]) beschriebenen Kreises gemessen wird; rotiert dagegen so findet man den Rauminhalt des erzeugten Körpers, wenn man den Inhalt der Fläche mit ie des von ihrem Schwerpunkte beschriebenen Kreises multipliziert. Die Guldinsche Regel kann ba folgendermaßen ausgesprochen werden: Der Inhalt der Fläche, welche durch Umdrehung um eine in ihrer Ebene liegende, sie nicht schneidende Achse entsteht, wird durch das Produkt ge der erzeugenden Linie und der Peripherie des von ihrem Schwerpunkte beschriebenen Kreises nd der Rauminhalt des Körpers, welcher durch Umdrehung einer ebenen Figur um eine in liegende, sie nicht schneidende Achse entsteht, wird durch das Produkt aus dem Flächeninhalte den Figur und der Peripherie des von ihrem Schwerpunkte beschriebenen Kreises gemessen. din war aber nicht der einzige und auch nicht der erste Gelehrte, welcher diesen Satz auf- Nach Cavalieris Behauptung [2]) soll Kepler den Ringinhalt als Produkt eines Querschnitts in e, welche der Mittelpunkt (gleichzeitig Schwerpunkt) des Querschnitts durchlaufe, berechnet und uldinsche Regel schon angewandt haben, und Guldins Begründung derselben soll gleichfalls derjenigen abweichen, welche Kepler in seiner Stereometria doliorum (1615), einer Fortsetzung und Conoide des Archimedes, ausgesprochen hat. Auch soll Antonio Rocca vor dem Erscheinen des n Guldins Centrobaryca einen ganz ähnlichen Satz aufgestellt haben. Ferner wird in Klügels rbuch, Artikel über Centrobaryca methodus, worauf auch Meier Hirsch und Baltzer hinweisen, antor die Bemerkung gemacht, daß sich der Satz schon in des Pappus math. Sammlungen Vorrede zum 7. Buch, und zwar schon in der 1. Ausgabe von 1588 finde. Die Regel aber, ben ist, lautet: „Figurae perfecta rotatione genitae proportionem habent compositam et ex ex rectis similiter ad axes ductis a gravitatis centris, quae in rotantibus sunt", d. h. das on Raumgrößen, welche durch vollständige Umdrehung erzeugt worden sind, ist einesteils zu- aus den rotierenden Größen, andernteils aus den Geraden, welche in ähnlicher Weise aus unkten der rotierenden Größen auf die Achse gezogen sind. Und weiter: „Figurae imperfecta nitae proportionem habent compositam et ex rotantibus et ex arcubus, quos centra in his scripserunt", d. h. das Verhältnis von Raumgrößen, welche durch unvollkommene Umdrehung nd, ist einesteils zusammengesetzt aus den rotierenden Größen, andernteils aus den Bögen, chwerpunkte beschrieben haben. Und schließlich: „Sed horum arcuum proportionem apparet esse et ex ductis ad axes et ex angulis, quos harum extremitates continent, si ad axes tatione genitarum sint", das will sagen: aber das Verhältnis dieser Bögen ist offenbar zu- einesteils aus den nach den Achsen gezogenen Linien, andernteils aus den Winkeln, welche einschließen, wenn sie nach den Achsen der durch Umdrehung entstandenen Raumgrößen ge- würden.

ist auffällig, daß Guldin von diesem Satze nichts erwähnt, obgleich er außer der Definition [3]) unktes auch das Werk des Pappus häufig anführt.

[1]) Bei dieser Gelegenheit kommt der bereits im 1. Buche angekündigte neue Gebrauch des Schwerpunkts zur welcher in der leichten und sicheren Zusammensetzung, Auflösung, und der aus diesen abgeleiteten Dimension, sw. jeder beliebigen Umdrehungsgröße bestehen soll.

[2]) Vergl. Cantor, Vorlesungen über Gesch. der Math.

[3]) Sie findet sich am Anfange des 8. Buches seiner *συναγωγή* nachdem er die Aufgabe, die er zu lösen gedenkt, liedert hat, zuvor aber das ganze Wissen vom Schwerpunkte in einem Zuge (uno tenore) auseinandersetzen , collect. math.)

Wenden wir uns nun dem Beweise der Guldinschen Regel zu!

Was zunächst Guldin selbst anlangt, so sucht er die Begründung des Satzes durch In erbringen, indem er in derselben Reihenfolge wie im I. Buche die Gebilde behandelt, für wel den Schwerpunkt gesucht hat. Ausgehend von 3 Punkten, welche auf einer zur Drehungsachse Geraden so liegen, daß der mittelste von den beiden äußeren gleichweit entfernt ist, zeigt er, daß welche sie bei der Umdrehung um die Achse beschreiben, zusammengenommen dreimal so groß die Peripherie des vom mittelsten beschriebenen Kreises. Dasselbe wird dann auch für drei P gewiesen, welche wie vorher von einander entfernt, aber auf einer Geraden liegen, die entwed zur Drehungsachse läuft oder unter schiefen Winkeln gegen dieselbe geneigt ist. Sind mehr als unter denselben Bedingungen wie vorher gegeben, so läßt sich die Summe der von ihnen be Kreislinien auf ähnliche Weise finden. Wenn aber mehrere Punkte ohne irgend welche bestimmt gegeben sind, so soll man die einzelnen Radien suchen und aus ihnen die Kreislinie so bestimm der gestellten Aufgabe genügt.

Die Umdrehung von Linien anlangend, geht er von der begrenzten Geraden aus. E welche senkrecht gegen die Rotationsachse gerichtet ist, beschreibt einen Kreisring, dessen Inhalt Produkt der rotierenden Strecke in den von ihrem Mittelpunkte beschriebenen Kreis ausgedrückt auch dem Mantel eines geraden Zylinders gleich ist, dessen Seitenlinie die gegebene Strecke Radius der Abstand des Mittelpunktes der gegebenen Strecke von der Drehungsachse ist. Da von einer Strecke, welche parallel zur Drehungsachse läuft oder mit ihr einen beliebigen Wi Soll die Summe der Rotationsflächen gefunden werden, welche zwei gegebene Strecken beschreibe man die Summe beider mit der Peripherie des Kreises multiplizieren, welchen der gemeinschaftlic punkt beider Strecken beschreibt. Dieses Verfahren wird auch auf mehr als zwei Strecken, a gleiche, aneinanderstoßende Sehnen eines Kreissegments, auf Umfänge von Dreiecken, Vierecken und Polygonen, auf krumme und gemischte Linien, Umfänge von Kreissegmenten und anderen Krei wie auf die Umfänge von solchen Figuren angewandt, welche durch Halbkreise oder Kreisbög werden. Zuletzt wird die Berechnung von Körpern abgehandelt, welche durch Rotation von F standen sind.

Mit dem gleichschenkligen Dreieck beginnend, läßt Guldin zunächst die Basis auf der A dann einen Winkelpunkt auf der Achse und die ihm gegenüberliegende Seite parallel oder eine senkrecht zur Achse gelegen sein. Hierauf wird das ungleichseitige Dreieck zu Grunde gelegt, Rechteck, Polygone, Kreis, Halbkreis, Segment, Sektor und andere Teile vom Kreise, Ellipse u

Für sämtliche Flächen war die Lage des Schwerpunktes im ersten Buch gesucht wo bekannt; und auch das Verhältnis, welches die erzeugte Rotationsgröße zu der erzeugenden hat, v von andern Mathematikern gefunden und erwiesen worden.

Durch vorstehende Ausführungen dürfte zur Genüge gezeigt worden sein, daß Guldin gemein giltigen, direkten Beweis nicht erbracht hat; denn die allgemeinen Betrachtungen, di Regel vorausschickt, können nicht als beweiskräftig angesehen werden. So hebt er hervor, daß di Teile einer rotierenden Fläche je nach ihrer verschiedenen Entfernung von der Drehungsachse schiedene Rotationsgrößen hervorbrächten, meint aber, daß sich dieselben ausglichen, wenn man d schaftlichen (mittleren) Rotationsweg die Kreislinie[1]) nähme, welche vom Schwerpunkte der Fläche beschrieben würde; denn, fährt er fort, soviel an den Teilen, welche diesseits oder innerhal Schwerpunkte beschriebenen Kreislinie liegen, an der Gleichheit fehlt, genau so viel haben die j außerhalb dieser Kreislinie liegenden darüber, und so gelangt man durch Kompensation

[1]) quae est sola et unica.

Und so schließt er, daß es vollkommen genügen werde, wenn er an möglichst vielen die Richtigkeit seines Verfahrens durch Induktion nachweise und andeute, daß seine t denen anderer, die sie anders abgeleitet hätten, genau übereinstimmten, oder auch wohl das, folgenden thun werde, dem Urteile des erfahrenen Geometers stillschweigend überlasse.

h dem Hinweis auf den mißglückten Versuch Guldins, einen allgemein giltigen, direkten iefern, gehen wir zu den eigentlichen Beweisen über, welche auf zwei statische Sätze gegründet er in der Guldinschen Regel eine Rolle spielende Schwerpunkt ein statisches Element ist.

n diesen verschiedenen Beweisarten dürfte sich für die Schule diejenige am besten eignen, welche echnung des Mantels und des Inhalts eines abgestumpften geraden Kegels beruht.

gt in einer Ebene auf einer Seite einer Geraden ein beliebiges Polygon ABCDEF . . . und die Ebene um jene Gerade rotieren, so beschreibt jede Seite des Vielecks den Mantel eines gestumpften Kegels. Bezeichnet man die Seiten der Reihe nach mit l_1, l_2, l_3 . . . . und die inkelpunkten A, B, C . . . . auf die Achse gefällten Lote mit a, b, c . . . . , so werden die egelmäntel durch die Produkte πl_1 (a+b), πl_2 (b+c), ... πl_n (n+a) ausgedrückt. Be- ferner die aus den Seitenmitten auf die Rotationsachse gefällten Lote mit s_1, s_2, s_3, . . s_n, h die Kegelmäntel auch durch die Produkte $2\pi s_1 l_1$, $2\pi s_2 l_2$, $2\pi s_3 l_3$, . . . , $2\pi s_n l_n$ und durch den Umfang des Polygons beschriebene Rotationsfläche durch das Produkt $s_2+l_3 s_3+ \ldots +l_n s_n$) darstellen. Nach einem Satze der Statik ist aber, da die Seitenmitten unkte der Seiten sind, die Summe $l_1 s_1+l_2 s_2+l_3 s_3+ \ldots +l_n s_n$ die Summe der Momente n Seiten in Beziehung auf die Drehungsachse und kann durch das Moment des ganzen Um- werden. Ist der Schwerpunkt des Umfangs S und das aus ihm auf die Drehungsachse ge- so ist das Moment $(l_1+l_2+l_3+ \ldots .)$ s oder Us und die gesamte Rotationsfläche $2\pi s.U$, Umfang des rotierenden Polygons bedeutet. Damit ist bewiesen, daß man die durch den Polygons beschriebene Rotationsfläche findet, wenn man diesen Umfang mit der Peripherie nem Schwerpunkte beschriebenen Kreises multipliziert.

satz. Der Beweis bleibt derselbe, wenn die gebrochene Linie keine geschlossene ist, also nicht eines Polygons darstellt; man hat dann nur ihre Länge statt des Umfanges der Figur zu er leuchtet ohne weiteres ein, daß der Beweis auch auf die krumme Linie angewandt werden h dieselbe als eine gebrochene, von unzählig vielen, unendlich kleinen Teilen ansehen läßt.

n den Inhalt eines Rotationskörpers zu finden, geht man am besten von einem Dreieck aus. lches mit einer dasselbe nicht schneidenden Geraden in einer Ebene und dreht sich letztere um als Achse, so beschreibt das Dreieck einen dreikantigen Ringkörper, dessen Inhalt einem Prisma elches das rotierende Dreieck zur Grundfläche und den Umfang des von seinem Schwerpunkte Kreises zur Höhe hat. Fällt man nämlich aus den Winkelpunkten des Dreiecks Lote auf die se und berechnet die Kegelstumpfe, welche durch Rotation der drei entstandenen Trapeze erzeugt erhält man den Rotationskörper als algebraische Summe dieser drei Kegelstumpfe, und zwar ch die eingeführten Lote und die rotierende Dreiecksfläche ausgedrückt; es läßt sich aber für die er 3 Lote der dreifache Abstand des Schwerpunkts der Dreiecksfläche von der Achse setzen, was h aus dem Satze[2]) ableitet: „Die Entfernung des Schwerpunktes eines jeden Dreiecks von

Bei der Besprechung des Schwerpunktes im 1. Kap. des 1. Buches sagt er: „Wir müssen beachten, daß jene der Raumgröße, welche durch den trennenden Punkt, die teilende Linie oder Ebene hervorgebracht werden, end sind in Bezug auf den Schwerpunkt des Ganzen, d. h. von gleichen Momenten sein ht aber, wenn sie getrennt gelegen, gleichsam in der Schwebe getrennt gewogen werden.

Bei Carnot (géom. de position, 1803,) findet sich der Satz für das Polygon und lautet: „Dans tout polygone he, il y a un centre des moyennes distances dont la propriété est que sa distance à un plan quelconque, est moyenne entre celles de tous les angles de ce polygone au même plan, c'est-á-dire égale à la somme de ernières divisées par leur nombre, en prenant négativement celles qui se trouvent du côté de ce plan où la plus petite".

irgend einer Ebene ist dem dritten Teile der Summe der Entfernungen seiner drei Spitzen von die gleich", was aber leichter direkt gefunden wird, wenn man die Transversale nach einer Seite des und das von der Mitte dieser Seite auf die Drehungsachse gefällte Perpendikel zu Hilfe nimmt man auf diese Weise den Rotationskörper eines Dreiecks gefunden, so kann man auch denjen jeden rotierenden Vielecks ableiten. Zu diesem Zwecke braucht man nur das Vieleck durch Di die einander nicht schneiden, in Dreiecke zu zerlegen und die dreikantigen Ringkörper zu addiere von den Teildreiecken beschrieben werden. Der entstehende Ausdruck enthält nun zwar die Su je einem Dreieck in den Abstand seines Schwerpunktes von der Drehungsachse, es läßt sich aber n Satze aus der Statik für diese Summe (Summe der Momente aller einzelnen Teile) das Produk ganzen Figur in die Entfernung ihres Schwerpunktes von der Drehungsachse (Moment der ganz setzen, so daß man den Inhalt des durch ein Vieleck beschriebenen Rotationskörpers findet, wenn Inhalt des Vielecks mit der Peripherie des von seinem Schwerpunkte beschriebenen Kreises multi

Zusatz. Da jede krummlinige Figur als ein Vieleck von unzählig vielen und unendli Seiten angesehen werden kann, so findet man den Inhalt des durch eine krummlinige Figur Rotationskörpers, wenn man den Inhalt dieser Figur mit der durch ihren Schwerpunkt be Kreislinie multipliziert.

Meier Hirsch[2]) zeigt übrigens, daß die Guldinsche Regel nur ein besonderer Fall von gemeineren Satze ist: „Wenn irgend eine gerad- oder krummlinige Figur sich längs einer geraden, oder doppelt gekrümmten Linie so bewegt, daß sie immer auf der Richtung ihrer Bewegung r bleibt, so giebt das Produkt der erzeugenden Figur in den Weg ihres Schwerpunktes den Inhalt Produkt der erzeugenden Linie in den Weg ihres Schwerpunktes die Fläche des beschriebenen Kö eine Figur, die sich um eine Achse dreht, immer rechtwinklig auf der Richtung ihrer Bewegung

Die Berechnung von Rotationskörpern, welche Kambly in seinen stereometrischen Nr. 124 bis 127 andeutet, basiert, wie die von Meier Hirsch, ebenfalls auf der Berechnung des rotierendes Dreieck ABC erzeugten Ringkörpers; nur wird der Satz, daß für die Summe der (a, b, c) der Winkelpunkte A, B und C, der dreifache Abstand des Schwerpunkts von der Dreh gesetzt werden kann, dadurch bewiesen, daß die zuerst gefundene Formel auf die drei Körper a wird, welche durch Rotation der drei gleichen Teildreiecke ABS, BCS und CAS entstehen, w Schwerpunkt des Dreiecks und s seinen Abstand von der Achse bedeutet.

Die Berechnung der Körper, welche durch Rotation eines Parallelogramms oder eines Polygons um eine Achse entstehen, wird auf diesen Satz zurückgeführt.

Baltzer geht bei seiner Ableitung des Satzes von einem Polygon aus, teilt aber das durch Diagonalen in Dreiecke, sondern verbindet die sämtlichen Winkelpunkte des Polygons m beliebigen Punkte auf der Rotationsachse und berechnet die Ringkörper der entstandenen Dreieck als Basen die Seiten des Polygons und als gemeinschaftliche Spitze den angenommenen Punk Drehungsachse haben. Die algebraische Summe der Ringkörper dieser Dreiecke giebt den Inhalt das Polygon erzeugten Rotationskörpers. Daß diese Ableitung nicht so einfach ist, wie die v Hirsch, mag folgende Betrachtung zeigen.

Ist AB eine Seite des rotierenden Vielecks und X der beliebige Punkt auf der Rotations sind ferner AA′ und BB′ die Lote aus den Endpunkten dieser Seite auf die Achse, so läßt sich d ABXB′ einerseits als Summe der Dreiecke ABX und XB′A, andererseits als Summe von A BB′X oder A′BB′ und BB′X oder, was dasselbe ist, durch das Dreieck A′BX darstellen. ist $\Delta ABX = \Delta A'BX - \Delta XB'A$. Es ist aber der vom Dreieck A′BX beschriebene Rotations

[1]) Vergl. Wrobel und Heußi.

[2]) Ebenso Baltzer.

el $\frac{1}{3}\pi \cdot \overline{BB'^2} \cdot \overline{A'X}$ oder $\frac{2}{3}\pi \cdot \overline{BB'} \cdot \triangle A'BX$. Bezeichnet man nun mit O, P und Q die Schwer- Dreiecke A'BX, XB'A und ABX und fällt die Lote $\overline{OO'}$, $\overline{PP'}$ und $\overline{QQ'}$ auf die Achse, so sind dieſe Dreiecke beſchriebenen Rotationskörper $2\pi \cdot \overline{OO'} \cdot \triangle A'BX$ (da $\overline{OO'} = \frac{1}{3}\overline{BB'}$), $2\pi \cdot \overline{PP'} \cdot \triangle XB'A$ $\overline{QQ'} \cdot \triangle ABX$. Es iſt aber nach dem betr. Satze aus der Statik:

$$\triangle A'BX \cdot \overline{OO'} - \triangle XB'A \cdot \overline{PP'} = \triangle ABX \cdot \overline{QQ'},$$

folglich auch $2\pi \cdot \overline{OO'} \cdot \triangle A'BX - 2\pi \cdot \overline{PP'} \cdot \triangle XB'A = 2\pi \cdot \overline{QQ'} \cdot \triangle ABX$.

Daher hat der von ABX beſchriebene Rotationskörper das Volum $2\pi \cdot \overline{QQ'} \cdot \triangle ABX$.

Drückt man auf dieſelbe Weiſe die Ringkörper der übrigen Dreiecke aus, bildet die algebraiſche und ſetzt für die algebraiſche Summe der Produkte der einzelnen Dreiecksflächen in die Abſtände werpunkte von der Achſe das Produkt der ganzen Polygonfläche in den Abſtand ihres Schwer- on der Achſe, ſo erhält man wiederum den von dem ebenen Vieleck beſchriebenen Rotationskörper ukt aus dem rotierenden Vieleck und dem von ſeinem Schwerpunkt beſchriebenen Wege.

Einfacher, als dieſe Ableitung, iſt die in dem Leitfaden der Elementar-Mathematik von Lieber Lühmann gegebene.

Ausgehend von einem Dreieck, welches um eine ſeiner Seiten als Achſe rotiert und daher einen el beſchreibt, kann man leicht zu einem Dreieck übergehen, welches mit einem Winkelpunkt auf liegt. Verlängert man die dieſem Winkelpunkte gegenüberliegende Seite bis zur Achſe, ſo läßt rotierende Dreieck als Differenz zweier Dreiecke darſtellen, die mit ihrer gemeinſchaftlichen Seite Achſe liegen, und der vom gegebenen Dreieck beſchriebene Rotationskörper erſcheint als Differenz ppelkegel. Liegt drittens ein Dreieck außerhalb der Achſe, ſo braucht man nur eine Seite des- s zum Durchſchnitt mit der Achſe zu verlängern und den Schnittpunkt mit dem dritten Winkel- s Dreiecks zu verbinden, um auf den vorhergehenden Fall zu kommen. Rotiert ſchließlich ein Dreiecken, ſo läßt ſich der für das außerhalb der Achſe liegende Dreieck gegebene Satz auf jedes einzelne und der vom ganzen Netz beſchriebene Körper mit Zuhilfenahme des mehrfach erwähnten Satzes Statik berechnen. Es bedarf kaum noch der Erwähnung, daß rotierende Polygone durch Di- in Dreiecke zerlegt und beliebige ebene Flächenſtücke als Netze von unzählig vielen und unendlich reiecken betrachtet werden können, womit der Satz allgemein bewieſen iſt, daß die Oberfläche ninhalt) eines Rotationskörpers dem Produkte der erzeugenden Linie (der erzeugenden Fläche) in welchen ihr Schwerpunkt beſchreibt, gleich iſt.

Eine weitere, ebenfalls vom Dreieck ausgehende, einfache Ableitung findet ſich in der Elementar- atik von Mehler. Es wird dabei ein Dreieck (ABC) zu Grunde gelegt, von welchem eine Seite nkelrecht gegen die Drehungsachſe gerichtet iſt und deſſen Winkelpunkte A, B und C bezw. die a, b und c von der Drehungsachſe haben, und zwar ſoll die gemeinſchaftliche Projektion der C und BC auf der Achſe die Strecke h ſein. Der durch das Dreieck erzeugte Rotationskörper läßt als Differenz zweier Kegelſtumpfe durch das Produkt $\frac{1}{3}\pi h\,(a-b)\,(a+b+c)$ oder, wenn man -b) den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks (F) einführt, durch $\frac{2}{3}\pi\,(a+b+c) \cdot F$ ausdrücken. Daß arithmetiſche Mittel aus den Abſtänden der Winkelpunkte von der Drehungsachſe $\frac{(a+b+c)}{3}$ der des Schwerpunktes von der letzteren geſetzt werden kann, läßt ſich leicht zeigen, wenn man von C Mitte der Gegenſeite AB die Transverſale zieht, dieſelbe in drei gleiche Teile teilt und die Ab- r beiden Teilpunkte von der Drehungsachſe benutzt.

Um hieraus den Rotationskörper zu finden, welcher durch ein beliebiges Polygon erzeugt wird, die Polygonfläche durch gerade Linien, welche durch die Winkelpunkte gehen und verlängert auf e ſenkrecht ſtehen, in Trapeze (bezw. in Trapeze und Dreiecke) zu zerlegen, und in jedem der ent- Trapeze eine Diagonale zu ziehen; es wird dadurch das Polygon in Dreiecke zerlegt, in denen e ſenkrecht gegen die Achſe gerichtet iſt, ſo daß man auf ſie den vorhin abgeleiteten Satz anwenden

kann und mit Hilfe des Satzes von den gleichen Momenten das Volumen des Rotationskörpers als Pro rotierenden Fläche in die von ihrem Schwerpunkte beschriebene Kreislinie findet.

Zum Schluß mag noch der Rotationskörper gedacht werden, welche in dem Lehrbuch der G von Heis u. Eschweiler (4. Aufl. 1867) behandelt sind.

Was die Rotationsflächen anlangt, so ist als erzeugende Linie zunächst der Perimeter eines r Polygons von gerader Seitenzahl zu Grunde gelegt, welches sich um eine in seiner Ebene, aber ga ihm liegende und einem seiner Durchmesser parallele Achse dreht. Da die Seiten des Polygon weise symmetrisch zu dem eingeführten Durchmesser liegen, so haben die Mittelpunkte von zwei symmet Seiten gleichen Abstand von dem Durchmesser. Bezeichnet man diesen Abstand mit d, die En des Polygonmittelpunktes (also auch des Durchmessers) von der Achse mit e und die Polygonseite so ist die Summe der beschriebenen Mantelflächen $2\pi c \cdot 2a$ und die ganze Oberfläche $2\pi e \cdot U$, we mit U den Umfang des Polygons bezeichnet. Der Satz kann — wie es in dem genannten Lehrb schieht — so ausgesprochen werden: Die Oberfläche ist so groß wie die Seitenfläche (oder der Man Analogie des Zylinders) eines senkrechten Prisma ist, wenn dieses das Polygon zur Basis und ei hat, welche der vom Mittelpunkt des Polygons beschriebenen Kreisperipherie an Länge gleichkom man kann ihn auch so fassen: Die Oberfläche ist dem Produkte aus dem Umfange des rotieren lygons in die von seinem Mittelpunkte (Schwerpunkte) beschriebene Kreislinie gleich.

Da die Rotationsfläche, welche die äußere — von der Drehungsachse entferntere — Hä Polygon-Umfangs beschreibt, größer ist als die, welche die der Achse nähere Hälfte beschreibt, so einem weiteren Satze der Ueberschuß der ersteren über die letztere angegeben. Schließlich werden bei auf die Oberfläche eines durch einen Kreis beschriebenen Ringes übertragen.

Bei der Inhaltsbestimmung der runden Körper wird im zweiten Abschnitt der Hilfssatz Spitze gestellt, daß der durch Umdrehung eines beliebigen Dreiecks (ABC) um eine in seiner Ebene und durch seine Spitze (A) gehende Achse beschriebene Körper einem Kegel gleich ist, dessen Gru dem von der Grundlinie (BC) des Dreiecks beschriebenen Mantel und dessen Höhe der Höhe des (AD) gleich ist; oder auch $\frac{2}{3}$ von einem Zylinder, dessen Grundfläche AD zum Radius hat, und dess die Projektion der Grundlinie BC auf der Achse ist. Dieser Satz wird für folgende 3 Fälle bewiesen Drehungsachse fällt mit der Seite AB zusammen; 2. Die Achse (durch A) liegt außerhalb, ohne einer Seite parallel zu sein; 3. Die Achse geht parallel zur Seite BC. In einem Zusatze wird hinz daß sich nichts am Resultate ändert, wenn das Dreieck gleichschenklig ist (AB=AC). Da jedoch n des letzten Satzes nur der Rotationskörper berechnet wird, welchen ein reguläres Halbpolygon dur drehung um seinen Grenzdurchmesser erzeugt, und daraus schließlich der Inhalt einer Kugel, eines sektors und anderes, was sonst bei der Behandlung der Kugel vorkommt, so gehe ich auf leitung dieser Sätze nicht näher ein, auch nicht auf den Ringkörper, welchen ein beliebiges Kreis beschreibt, weil sich derselbe als Ueberschuß einer Kugelschicht über den ihr eingeschriebenen Kegel darstellen läßt. Dagegen möchte ich noch einen Blick auf die Berechnung der Körper [1]) werfen, durch ein Trapez (mit 2 rechten Winkeln an der zur Achse parallelen Seite), ein reguläres Polyg gerader Seitenzahl und einen Kreis durch Umdrehung um eine in seiner Ebene, aber ganz au liegende Achse beschrieben werden.

1. In dem rotierenden Trapez ABCD seien die parallelen Seiten AB(a) und CD(c) senkre BC(h) und senkrecht gegen die Achse MN gerichtet. Die Seite BC habe den Abstand e von der A die Verlängerungen von AB und DC (bezw. von BA und CD) mögen die Achse in den Punkten E treffen; dann ist der vom Trapez beschriebene Ringkörper als Differenz eines Kegelstumpf eines Zylinders $\pi e(a+c)h + \frac{\pi h}{3}(a^2+ac+c^2)$ bezw. $\pi e(a+c)h - \frac{\pi h}{3}(a^2+ac+c^2)$ oder, wenn r

[1]) Dieselben sind auch in dem Lehrbuch der Elementaren Geometrie von F. J. Brockmann (2te Aufl. 1877) b

den doppelten Flächeninhalt des Trapezes (2F) einsetzt, $2\pi e \cdot F + \frac{\pi h}{3}(a^2+ac+c^2)$ bezw. $-\frac{\pi h}{3}(a^2+ac+c^2)$, d. h. der vom Trapez beschriebene Rotationskörper ist die Summe oder die aus einem Prisma, dessen Grundfläche das Trapez und dessen Höhe die mit dem Abstand e be- Kreislinie ist, und dem abgestumpften Kegel, welchen das Trapez bei seiner Umdrehung um lchse parallele Seite BC beschreiben würde.

Zusatz. Das Resultat erleidet keine Aenderung, wenn eine der parallelen Seiten des Trapezes d oder das Trapez in ein rechtwinkliges Dreieck übergeht, von welchem eine Kathete der Achse st.

Dreht sich nun ein reguläres Polygon von gerader Seitenzahl um eine zu einem Durchmesser Achse, und verbindet man je zwei zum Durchmesser symmetrisch gelegene Winkelpunkte durch eine so läßt sich auf die durch die entstandenen Trapeze erzeugten Ringkörper der vorige Satz an- und man erhält den neuen Satz: Der durch Rotation eines regulären Polygons von gerader l um eine zu einem Durchmesser desselben parallele Achse beschriebene Ringkörper ist so groß als dem Polygon errichtetes Prisma, dessen Höhe der vom Zentrum desselben beschriebenen Kreislinie Dabei übertrifft der äußere (vom entfernter liegenden Halbpolygon beschriebene) Teil des Ringes en (vom näher an der Achse liegenden Halbpolygon beschriebenen) um das doppelte des bei der ng des Halbpolygons um den Durchmesser als Achse erzeugten Körpers. Nimmt man die An- Seiten unendlich groß, so geht das Vieleck in den Kreis über und man kann den vorigen Satz ihn anwenden und so aussprechen: Der von einem Kreise bei der Umdrehung um eine in seiner ber ganz außer ihm liegende, Achse beschriebene Ring ist an Inhalt einem Zylinder gleich, dessen che der Kreis ist und dessen Höhe der vom Mittelpunkte beschriebenen Peripherie gleichkommt bertrifft der äußere Teil des Ringes den inneren (beide sind durch denjenigen Zylindermantel welchen der der Achse parallele Durchmesser des Kreises beschreibt) um das Doppelte einer Kugel, nselben Radius wie der Kreis hat. Bezeichnet man den Radius des Kreises mit r, den Abstand ittelpunktes von der Drehungsachse mit e, so ist die Oberfläche des von der äußeren Kreishälfte nen Ringteiles $O^a = 2\pi r(\pi e + 2r)$, die des inneren $O^i = 2\pi r(\pi e - 2r)$, also $O^a + O^i = 2\pi r \cdot 2\pi e$ und $= 8\pi r^2$. Die letzte Formel sagt, daß die Differenz der Oberflächen, welche die beiden Halbkreise (über Achse parallelen Durchmesser) beschreiben, unabhängig vom Abstande des Kreismittelpunktes von ungsachse, also für denselben Kreis konstant ist. Ebenso ergiebt sich für das Volumen, welches ganzen Kreise, resp. von der äußeren oder inneren Kreishälfte, beschrieben wird: $V_{(a+i)} = V_a + V^i =$, der von e unabhängige Ueberschuß des äußeren Teils über den innern: $V^a - V_i = \frac{8}{3}\pi r^3$ und $\pi r^2 + \frac{4}{3}\pi r^3$, $Vi = \pi e \cdot \pi r^2 - \frac{4}{3}\pi r^3$, welch' letztere Ausdrücke sich noch vereinfachen, wenn $e = r$ gesetzt h. wenn sich der Kreis um eine Tangente dreht und somit einen sogenannten geschlossenen Ring .

Da bei einem regulären Polygon der Mittelpunkt zugleich Schwerpunkt für den Umfang und die t, so kann man die letzten Sätze sofort in der Form der Guldinschen Regel ausdrücken und es ist ie Möglichkeit dargethan, dieselbe für einige besondere Fälle ohne Hilfssätze aus der Statik der örper abzuleiten.

II.

Ueber die Verwertung der Guldinschen Regel.

Da der Guldinsche Doppelsatz einesteils eine Beziehung zwischen der rotierenden Linie, de stande ihres Schwerpunktes von der Drehungsachse und der erzeugten Fläche, andernteils eine solche z der rotierenden Fläche, dem Abstande ihres Schwerpunktes von der Drehungsachse und dem er Rotationskörper ausdrückt, so läßt sich in jedem Falle jede der drei von einander abhängigen finden, wenn die beiden andern gegeben sind. Da aber hierbei nur der Abstand des Schwerpunkte die Beschaffenheit und Lage der rotierenden Größe in Betracht kommt, so fühlt man sich veranlaß Satz mit Rücksicht auf diesen Umstand noch näher zu betrachten. Lassen wir z. B. die Länge u Abstand des Schwerpunktes der rotierenden Linie unverändert und fragen wir, was mit der Linie ge kann, ohne daß sich die Rotationsfläche ändert, so erhalten wir aus der ersten Relation die A daß man dieselbe um ihren Mittelpunkt (Schwerpunkt) drehen oder auch diesen parallel zur Achse ver darf. In analoger Weise sagt uns die zweite Relation, daß man die rotierende Fläche um ihren S punkt drehen oder diesen parallel zur Achse verschieben darf, ohne daß sich der Inhalt des Rotationsk ändert. Aus diesen Betrachtungen ergeben sich ohne weiteres folgende Zusätze:

1. Alle Durchmesser eines und desselben Kreises beschreiben bei der Umdrehung des Kreis eine (außer ihm in seiner Ebene liegende) Achse gleichgroße Rotationsflächen.

2. Zwei verschiedene Strecken beschreiben gleiche Rotationsflächen, wenn sie sich umgekeh die Abstände ihrer Mittelpunkte von der Drehungsachse zu einander verhalten.

3. Kreisbögen dürfen durch Umdrehung um ihre Schwerpunkte in andere Lage gebracht w ohne daß sich ihre Rotationsflächen ändern.

4. Sollen ungleiche Bögen eines und desselben Kreises gleiche Rotationsflächen erzeugen, so sich dieselben umgekehrt wie die Abstände ihrer Schwerpunkte von der Drehungsachse verhalten.

5. Eine ebene Figur darf um den Schwerpunkt ihres Umfangs gedreht werden, ohne d die Oberfläche des Rotationskörpers ändert.

6. Zwei Kreislinien beschreiben gleiche Rotationsflächen, wenn ihre Radien den Abständen Mittelpunkte von der Drehungsachse umgekehrt proportioniert sind.

Mittels dieser Sätze läßt sich eine Art Verwandlung und Teilung von Rotationsflächen ausf ähnlich wie es in der Planimetrie mit ebenen Figuren geschieht.

---

7. Jede Fläche kann durch Drehung um ihren Schwerpunkt in eine andere Lage gebracht w ohne daß sich das Volumen des Rotationskörpers ändert.

8. Will man inhaltsgleiche Rotationskörper von verschiedener Form erzeugen, so braucht m die Fläche, welche rotieren soll, in eine andere zu verwandeln, deren Schwerpunkt denselben Abstan der Drehungsachse hat wie derjenige der gegebenen. Letzteres wird dann der Fall sein, wenn sich w Verwandlung der gegebenen Fläche ihr Schwerpunkt parallel zur Achse verschiebt.

9. Sollen verschiedene Flächen inhaltsgleiche Rotationskörper beschreiben, so müssen sich di umgekehrt wie die Abstände ihrer Schwerpunkte von der Achse verhalten.

10. Sollen ähnliche Polygone (oder Kreise) inhaltsgleiche Rotationskörper erzeugen, so müsse homologe Seiten (oder die Radien) den Quadratwurzeln aus den Abständen der Schwerpunkte vo Drehungsachse umgekehrt proportioniert sein.

Mit Hilfe der letzten vier Sätze kann man eine Art Vergleichung, Verwandlung und Teilun Rotationskörpern ausführen.

A. Raumgleichheit.

1. Errichtet man über der Strecke AB, welche der Drehungsachse parallel geht, mehrere Dreiecke her Höhe, so erzeugen dieselben bei der Rotation um die Achse inhaltsgleiche Ringkörper.

2. Gleich hohe Parallelogramme über derselben Grundlinie erzeugen bei der Umdrehung um eine insamen Grundlinie parallele Achse raumgleiche Rotationskörper.

3. Rotiert ein Trapez um eine zu den Grundlinien parallele Achse, so darf man jede Grundlinie Richtung verschieben, ohne daß sich das Volumen des Rotationskörpers ändert.

4. Zwei Ergänzungsparallelogramme erzeugen gleiche Rotationskörper, wenn die Achse der Di- des Hauptparallelogramms parallel ist, welche nicht durch den gemeinsamen Winkelpunkt der Er- parallelogramme geht.

B. Verwandlung und Teilung von Rotationskörpern.

Mit Hilfe der Sätze, welche für die Raumgleichheit von Rotationskörpern gegeben wurden, läßt weiteres eine Formveränderung des Volumens vornehmen.

1. Ein Ringkörper, der durch Rotation eines beliebigen Dreiecks um eine zu einer Seite parallele tstehen würde, kann sofort in einen andern, dessen Querschnitt ein gleichschenkliges oder recht- Dreieck ist, verwandelt werden, wenn man das gegebene Dreieck über derselben Grundlinie auf ngte Form bringt.

2. Hat ein Ringkörper als Querschnitt ein Parallelogramm, von welchem die Grundlinien der sachse parallel sind, so läßt sich leicht ein anderer, inhaltsgleicher finden, dessen Querschnitt ein gramm von besonderer Eigenschaft ist.

3. Rotiert ein Parallelogramm um eine Achse, welche einer seiner Diagonalen parallel ist, so die dieser Diagonale gegenüberliegenden Winkelpunkte der Teildreiecke parallel zu dieser Diagonale en, ohne daß sich das Volumen des Rotationskörpers ändert.

4. Rotierte ein Parallelogramm ABCD (Fig. 43) um eine beliebige Achse MN und wollte man gänzungsparallelogramm konstruieren, welches einen inhaltsgleichen Rotationskörper erzeugt, so an AQ ∥ MN und durch C diejenige Gerade ziehen, welche in den Verlängerungen von AB und gte und durch AQ (in O) halbiert würde. Bezeichnet man die Schnittpunkte dieser Linie auf den erungen von AB und AD mit E und F, zieht EG ∥ AF, FG ∥ AE und verlängert BC bis zum nitt mit FG in K, DC bis zum Durchschnitt mit EG in J, so ist CJGK das Parallelogramm, denselben Rotationskörper erzeugt wie ABCD.

---

5. Teilt man ein Dreieck ABC, dessen Seite AC der Drehungsachse MN parallel läuft, durch welche von B nach der Gegenseite AC gehen, in gleiche Teile, so wird der vom ganzen Dreieck Ringkörper durch die von den Teillinien des Dreiecks erzeugten Kegelstumpfmäntel in gleiche teilt.

6. Liegen die Gegenseiten AB und DC des Parallelogramms ABCD der Drehungsachse MN und teilt man diese Gegenseiten durch Parallelen zu den beiden übrigen Seiten des Parallelo- in gleiche Teile, so wird der durch Umdrehung des Parallelogramms entstehende Körper durch elzonen, welche die Teillinien beschreiben, in gleiche Teile geteilt.

7. Teilt man die Grundlinien eines Trapezes in gleichviel gleiche Teile und verbindet man, von iefen Seite aus gerechnet, die gleichvielten Teilpunkte, so wird der vom Trapez bei der Rotation zu seinen Grundlinien parallele Achse durch die Rotationsflächen der Teillinien des Trapezes in Teile geteilt.

Soll die Umdrehungsachse eine beliebige Lage haben, so muß man die erzeugende Fläche gleiche Teile teilen, daß dieselben mit ihr den Schwerpunkt gemeinsam haben.

8. Teilt man z. B. ein gleichseitiges Dreieck durch Parallelen zu den Seiten in gleiche Tei wird der durch Rotation des Dreiecks um eine beliebige (das Dreieck nicht schneidende) Achse entst Körper durch die Umwälzungsflächen der Teillinien des Dreiecks in gleiche Teile geteilt.

Zusatz. Da die mit den Seiten gleichlaufenden Teillinien wieder gleichseitige Dreiecke bild kann man auch jedes folgende in das vorhergehende einzeichnen.

9. Die im vorangehenden Zusatze angegebene Konstruktion ist nur eine Anwendung de gemeinen Satzes:[1]) Teilt man die Seiten eines Dreiecks (in derselben Richtung um das Dreieck h gehend) in demselben Verhältnis, so entsteht durch die Verbindung der Teilpunkte ein eingeschri Dreieck, welches denselben Schwerpunkt hat.

Anmerkung. Teilt man die Seiten des Dreiecks ABC im Verhältnis m:n, so beträgt da geschriebene Dreieck $\frac{m^3+n^3}{(m+n)^3} \cdot \Delta ABC$.

10. Rotiert ein gleichschenkliges Dreieck um eine zur Höhe nach der Basis parallele Achs teilt man das Dreieck durch Parallelen zur Basis in gleiche Teile, so wird der vom Dreieck erzeugte körper durch die von den Teillinien erzeugten Kreisringe in gleiche Teile geteilt.

11. Teilt man ein reguläres Polygon durch ähnliche Polygone, welche denselben Mitte haben, in gleiche Teile und läßt man die entstandene Figur um eine außerhalb derselben liegende rotieren, so wird der durch das gegebene Polygon erzeugte Ringkörper durch die Rotationsflächen, die Perimeter der teilenden Polygone beschreiben, in gleiche Teile geteilt.

Bemerkung. Die Seiten der ineinanderliegenden Polygone brauchen denen des gegebenen Pol und untereinander nicht parallel zu sein, nur dürfen die Seiten jedes folgenden diejenigen des v gehenden nicht schneiden.

12. Liegen in einer Ebene ein Kreis und eine ihn nicht schneidende Gerade und soll der Rotation der Kreisfläche um jene Gerade entstehende Ring in gleiche Teile geteilt werden, so braucht nur die Kreisfläche durch konzentrische Kreise in gleiche Teile zu teilen.

Zusatz. Zieht man in dem gegebenen Kreise den mit der Drehungsachse gleichlaufenden D messer, so darf man die Mittelpunkte der teilenden Kreise auf diesem Durchmesser bis zur gegens Berührung der Kreise verschieben.

13. Schneidet man aus einem Kreise, dessen Mittelpunkt C ist, den n^{ten} Teil dadurch heraus man, wie in Fig. 27, auf dem Durchmesser AB die gleichen Strecken CD und CE, jede gleich $\frac{1}{2}$ abträgt und über AD und AE Halbkreise nach der einen Seite des Durchmessers, über DB un solche nach der anderen Seite konstruiert, so wird der von dem mittleren Teile des Kreises beschr Rotationskörper der n^{te} Teil von dem durch den Kreis um eine auf der Verlängerung des Durchm AB senkrecht stehende Achse erzeugten Ringe.

NB. Am Resultate wird nichts geändert, wenn man die Teilfigur um das Zentrum C oder was dasselbe ist, wenn man den Kreis um eine beliebige Achse rotieren läßt.

---

[1]) Dieser Satz findet sich bei Pappus im 8. Buch, wo er so lautet: Sit triangulum $\alpha\beta\gamma$, et latera eius in e proportionem secentur in punctis $\eta, \vartheta, \varkappa$, ita ut sit $\alpha\eta:\eta\beta=\beta\vartheta:\delta\gamma=\gamma\varkappa:\varkappa\alpha$, et iungantur $\eta\vartheta$ $\vartheta\varkappa$ $\varkappa\eta$; dico triangula $\alpha\beta$ idem gravitatis centrum habere.

Da der Beweis ziemlich umständlich ist, so dürfte es sich empfehlen, folgende Darstellung zu wählen, die si facher beweisen läßt: Bestimmt man in einem Dreieck ABC durch die Transversalen AD und BE den Schwerpunkt zieht man von dem Punkte F aus, welcher die Seite AB im Verhältnis m : n teilt, die Gerade durch S bis zum Durch (G) mit DE; legt man ferner durch G eine Gerade, auf welcher durch die Seiten CA und CB die gleichen Stücke J HG abgeschnitten werden, so hat das Dreieck FHJ denselben Schwerpunkt wie ABC, und die Punkte H und J teil Seiten DC und CA auch im Verhältnis m : n.

C. Berechnung von Rotationskörpern.

Da die Berechnung von Rotationsflächen und -körpern einen bildenden Wert nicht besitzen würde, erzeugenden Linien und Flächen sowie die Abstände ihrer Schwerpunkte von der Drehungsachse eben wären, so sollen im folgenden nur solche Aufgaben behandelt werden, bei welchen eine oder e der zur Berechnung notwendigen Größen mit Hilfe von bekannten Beziehungen aus andern n) Größen erst abgeleitet werden muß.

Ueber die Lage des Schwerpunktes der Linien und Flächen, welche dabei benützt werden sollen, gende Sätze:

. Bei Figuren, die einen Mittelpunkt haben, fällt der Schwerpunkt des Umfangs und der Fläche Mittelpunkte zusammen.

. Hat die gegebene Figur eine Symmetrieachse, so liegt der Schwerpunkt auf ihr.

. Der Schwerpunkt einer Strecke ist ihr Mittelpunkt.

. Der Schwerpunkt vom Umfange eines Dreiecks[1]) ist der Mittelpunkt des Kreises, welcher dem nbeschrieben ist, dessen Winkelpunkte die Seitenmitten des gegebenen Dreiecks sind.

. Der Schwerpunkt der Dreiecksfläche ist der Durchschnitt der Mittellinien.

. (Fig. 2.) Der Schwerpunkt eines Trapezes ABCD (AB ∥ CD) liegt auf der Geraden, welche n E und F der parallelen Seiten AB(a) und DC(c) verbindet; sein Abstand von der größeren e AB ist $\frac{h}{3}\cdot\frac{a+2b}{a+b}$. Man findet ihn, wenn man das mittelste Drittel der Verbindungslinie s mag GH heißen — im umgekehrten Verhältnis der parallelen Seiten des Trapezes teilt. I = HE; GS : SH = a : c). Andere Ableitungen finden sich in den Lehrbüchern der Physik von Heußi und Wrobel.

. Der Schwerpunkt eines Kreisbogens b liegt auf dem nach seinem Mittelpunkte gezogenen und zwar im Abstande $\frac{rs}{b}$ vom Kreismittelpunkte, wenn s die zugehörige Sehne bezeichnet.

. Bezeichnet man den Bogen eines Kreissektors, dessen Radius r ist, mit b, die zugehörige Sehne ist der Abstand des Schwerpunkts vom Kreismittelpunkte $\frac{2rs}{3b}$.

. Für den Kreisabschnitt ist der Abstand des Schwerpunkts vom Kreismittelpunkte $\frac{s^3}{12F}$, wenn ne und F den Flächeninhalt des Segments bezeichnet.

Aufgaben.

Die rotierende Fläche sei

I. ein gleichseitiges Dreieck.

. Ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seite a ist, rotiere um eine Achse, deren Abstand vom Schwer- r Höhe des Dreiecks gleich ist. Man soll die Oberfläche O und den Inhalt V des Rotations- berechnen. Aufl. $O = 3\pi\sqrt{3}a^2$; $V = \frac{3\pi a^3}{4}$.

2. Der Schwerpunkt eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Höhe h gegeben ist, hat von der Drehungs- n Abstand, welcher der Summe aus den Radien des ein- und umgeschriebenen Kreises gleich ist. $=4\pi\sqrt{3}\,.\,h^2$; $V = \frac{2}{3}\pi\sqrt{3}h^3$

---

[1]) Bezeichnet man die Mitten der Seiten AB, BC und CA (Fig. 1.) des Dreiecks ABC mit D, E und F, so AB in D und AC in F wirkend annehmen und den Punkt G auf DF, in welchem beide Seiten dieselbe Wirkung bestimmen, daß DG : GF = AC : AB = DE : EF, d. h. daß ∢ DEF halbiert wird. Der Schwerpunkt des Umfangs uf EG liegen. Da dieselbe Betrachtung auch für zwei andere Seiten gilt, so ergiebt sich der Schwerpunkt des ls Durchschnitt der Winkelhalbierenden vom Dreieck DEF.

3. Die Seite (a) eines gleichseitigen Dreiecks sei um die Höhe desselben verlängert und punkte die senkrechte Drehungsachse errichtet. Wie groß ist der Rotationskörper?

$$O = 3\pi(\sqrt{3}+1)a^2; \quad V = \tfrac{3}{4}(3+\sqrt{3})\pi a^3.$$

4. (Fig 3.) Ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seite a, welches durch die Verbindu seiner Seitenmitten D, E und F in 4 kongruente gleichseitige Teildreiecke geteilt worden ist, rotiert zur Höhe AE im Abstande e parallel gezogene Achse MN. Es sollen die Ringkörper der T berechnet werden.

$$O_{(ADF)} = O_{(DEF)} = 3\pi ea; \quad O_{(DBE)} = 3\pi\left(e+\frac{a}{4}\right)a; \quad O_{(FEC)} = 3\pi\left(e-\frac{a}{4}\right)a.$$

$$O_{(ADF)} + O_{(DEF)} = O_{(DBE)} + O_{(FEC)} = 6\pi ea. \qquad O_{(ABC)} = 6\pi ea.$$

$$V_{(ADF)} = V_{(DEF)} = \frac{\pi}{8}\sqrt{3}\cdot ea^2; \quad V_{(DBE)} = \frac{\pi}{8}\sqrt{3}\left(e+\frac{a}{4}\right)a^2; \quad V_{(FEC)} = \frac{\pi}{8}\sqrt{3}\left(e-\frac{a}{4}\right)a^2.$$

$$V_{(ADF)} + V_{(DEF)} = V_{(DBE)} + V_{(FEC)} = \frac{\pi}{4}\sqrt{3}\cdot ea^2 = \tfrac{1}{2}V_{(ABC)}.$$

5. (Fig. 4.) In ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seite a sei ein ähnliches DEF g dessen Winkelpunkte die Seiten des ersteren (in demselben Sinne um das Dreieck herumgehend) im V 1 : 3 teilen. Die Oberflächen und die Volumina beider Dreiecke zu berechnen und zu vergleichen, das Dreieck ABC nicht schneidende Drehungsachse die Entfernung e von einer Seite desselben hat.

Bezeichnet man die Seiten DE, EF und FD mit a', so ist $\triangle DAF = EBD = FCE = \frac{3}{16}ABC$ $\triangle DEF = \frac{7}{16}ABC$. Daraus ergiebt sich die Seite $a' = \frac{a}{4}\sqrt{7}$. Es ist daher die Oberfläche des vo DEF beschriebenen Rotationskörpers $O' = \frac{3}{2}\pi\sqrt{7}\left(e+\frac{a}{6}\sqrt{3}\right)a$, während die vom Umfange des Drei beschriebene $O = 6\pi\left(e+\frac{a}{6}\sqrt{3}\right)a$ ist; also $O : O' = 1 : \frac{1}{4}\sqrt{7}$, d. h. die Oberflächen verhalten sich wie d der beiden Dreiecke, was sofort daraus geschlossen werden konnte, daß das Verhältnis der Oberflä Verhältnis der Umfänge, also auch dem der Seiten gleich sein müsse.

Ferner ist $V_{(ABC)} = 2\pi\left(e+\frac{a}{6}\sqrt{3}\right)\cdot\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ und $V_{(DEF)} = 2\pi\left(e+\frac{a}{6}\sqrt{3}\right)\cdot\frac{7}{16}\cdot\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, $V_{(ABC)} = \pi\left(e+\frac{a}{6}\sqrt{3}\right)\cdot\frac{a^2}{2}\sqrt{3}$ und $V_{(DEF)} = \pi\left(e+\frac{a}{6}\sqrt{3}\right)\frac{7a^2}{32}\sqrt{3}$; folglich $V_{(ABC)} : V_{(DEF)} = 1:$ man sofort aus dem Verhältnis der beiden rotierenden Dreiecksflächen folgern kann.

II. Die rotierende Figur ist ein Quadrat.

1. (Fig. 5.) Ein Quadrat, dessen Seite a ist, sei durch Parallelen zu den Seiten in 4 glei geteilt und rotiere um eine Achse, welche vom Mittelpunkte des Quadrats den Abstand e hat einer Seite parallel geht. Wie groß sind die Oberflächen und die Volumina der einzelnen Quad

$$O_{(AFEJ)} = O_{(FBGE)} = \pi(4e-a)a. \qquad O_{(JEHD)} = O_{(EGCH)} = \pi(4e+a)a.$$

$$V_{(AFEJ)} = V_{(FBGE)} = \frac{\pi}{8}(4e-a)a^2. \qquad V_{(JEHD)} = V_{(EGCH)} = \frac{\pi}{8}(4e+a)a^2.$$

$$V_{(AFEJ)} + V_{(EGCH)} = V_{(FBGE)} + V_{(JEHD)} = \pi ea^2.$$

2. Rotiert (Fig. 6.) die in voriger Aufgabe bezeichnete Figur um eine auf der Verlänge Diagonale CA senkrecht stehende Achse, so ist:

$$O_{(AFEJ)} = \pi a(4e-a\sqrt{2}); \quad O_{(FBGE)} = O_{(DJEH)} = 4\pi ea; \quad O_{(EGCH)} = \pi a(4e+a\sqrt{2}).$$

$$O_{(AFEJ)} + O_{(CHEG)} = 8\pi ea. \qquad O_{(DJEH)} + O_{(BGEF)} = 8\pi ea. \qquad O_{(ABCD)} = 8\pi ea.$$

Ringkörper, welcher vom Quadrat ABCD beschrieben wird, hat dieselbe Oberfläche wie die örper zusammen, welche von zwei nicht benachbarten Teilquadraten beschrieben werden.

$_{AFEJ)} = \frac{\pi}{8}(4e - a\sqrt{2})a^2$; $V_{(DJEH)} = V_{(BGEF)} = \frac{\pi}{2}ea^2$. $V_{(CHEG)} = \frac{\pi}{8}(4e + a\sqrt{2})a^2$.

$$V_{(AFEJ)} + V_{(CHEG)} = V_{(DJEH)} + V_{(BGEF)} = \pi e a^2.$$

Summen aus je zwei nicht benachbarten Ringkörpern sind einander gleich.

Wird in den beiden vorhergehenden Aufgaben die gegebene Figur um den Winkel α gedreht,) für zwei nicht benachbarte Teile der Schwerpunkt der einen um ebensoviel von der Drehungs-) der andere ihr nähert; überhaupt ist für zwei kongruente Teile der Hauptfigur die Summe sflächen und -volumina konstant, wenn die Schwerpunkte dieser Teile auf einer durch den der Hauptfigur gehenden Geraden liegen und von diesem gleichweit entfernt sind. Denn wäre in der Abstand des Schwerpunktes E der Hauptfigur von der Drehungsachse MN, wären ferner K_n und $S_1' K_1'$, $S_n' K_n'$ die Abstände der Schwerpunkte S_1 und S_n bezw. S_1' und S_n', n $S_1 K_1 + S_n K_n$ und $S_1' K_1' + S_n' K_n'$ der doppelten Strecke KE gleich setzen.

$+ V_{(Fn)} = 2\pi e_1 F_1 + 2\pi e_n F_n = 2\pi(e_1 + e_n)F = 4\pi eF$, da $F_1 = F_n$ und $e_1 + e_n = 2e$.

chneidet man aus einem Quadrat ein zweites heraus, welches denselben Schwerpunkt hat und den nten Teil des ersten beträgt, so ist der Inhalt der bei voller Umdrehung um eine Achse Röhre $2\pi e \cdot \frac{n-1}{n} F$ oder $2\pi e \cdot \frac{n-1}{n} \cdot a^2$, wenn die Seite des Quadrats a und der Abstand des s von der Achse e ist.

satz. Der Satz gilt auch für das Rechteck, aus welchem ein ähnliches mit demselben Schwer- sgeschnitten ist.

Teilt man die Seiten (a) eines Quadrats in derselben Richtung herumgehend im Verhältnis erbindet je zwei benachbarte Teilpunkte geradlinig, so entsteht ein eingeschriebenes Quadrat, $\frac{m^2+n^2}{(m+n)^2}a^2$ ist; folglich ist der Inhalt des von ihm beschriebenen Rotationskörpers $\frac{1^2}{2^2}a^2$, wenn e der Abstand des Schwerpunktes von der Drehungsachse ist.

atz. Bezeichnet man die halben Diagonalen der beiden Quadrate mit d und d', so verhalten körper beider Quadrate wie $d^2 : d'^2$. Macht man z. B. $d' = \frac{d}{2}\sqrt{3}$, so ergiebt sich für beide Verhältnis 4:3, oder der Unterschied beider Körper ist $\frac{1}{4}$ des größeren.

Einem gleichseitigen Dreieck, dessen Seite a ist, sei ein Quadrat eingezeichnet. Man soll den per berechnen, welchen das Quadrat erzeugt, wenn zwei Winkelpunkte desselben auf der zur se senkrechten Dreiecksseite liegen.

. (Fig. 8.) Da der Schwerpunkt des Quadrats denselben Abstand von der Drehungsachse hat s Dreiecks und da die Quadratseite $(2-\sqrt{3})\sqrt{3} \cdot a$ ist, so ist das Volumen, welches vom ugt wird, $6\pi e \cdot (7-4\sqrt{3})a^2$, und die Oberfläche $8\pi e(2\sqrt{3}-3)a$.

Fig. 9.) Über einer Seite (a) eines gleichseitigen Dreiecks sei nach außen ein Quadrat errichtet Verbindungslinie ihrer Schwerpunkte $\overline{SS'}$ im Abstande e die Parallele MN gezogen. Wie Rotationskörper, welchen die ganze Figur (Summe aus Dreieck und Quadrat) beschreibt?

$$V_\triangle + V_\square = 2\pi e\ (1 + \tfrac{1}{4}\sqrt{3})a^2.$$

ändert sich das Volumen, welches bei der Drehung der ganzen Figur um den Schwerpunkt vom Quadrate beschrieben wird?

. Die Achse soll immer außerhalb der Figur liegen.

ößter und kleinster Wert wird ausgedrückt durch $2\pi\left(e \pm \frac{3+\sqrt{3}a}{6}\right)a^2$.

III. Die rotierende Figur ist ein reguläres Polygon.

Da der Mittelpunkt des Polygons zugleich Schwerpunkt für den Umfang und die Flä bedarf es zur Berechnung von Oberfläche und Volumen des Rotationskörpers, welche durch di $2\pi e \,.\, U$ und $2\pi e \,.\, F$ dargestellt werden, nur der Einsetzung der Werte für den Umfang und de inhalt, die bei der Behandlung der regulären Polygone in der Sekunda gefunden wurden.

So kann man die Oberfläche $O_{(u_6)}$, welche vom Umfange eines regulären Sechsec Rotation um eine im Abstande e vom Mittelpunkte gezogene Achse erzeugt wird, sofort ausdrü $O_{(u_6)} = 2\pi e \,.\, U_6 = 12\pi e s_6$, wenn s_6 die Seite des Sechsecks bezeichnet, und

$$V_{(F_6)} = 2\pi e \,.\, F_6 = 2\pi e \,.\, \tfrac{3}{2}(s_6)^2\sqrt{3} = \tfrac{3}{2}\sqrt{3} \,.\, \pi e s_6{}^2.$$

Ebenso lassen sich die Umfänge und Flächen anderer Vielecke verwenden, wenn ma den Radius des umgeschriebenen Kreises ausgedrückt hat.

Soll ferner außer dem Radius des umgeschriebenen Kreises der Centriwinkel benützt erhält man für das reguläre Vieleck von n Seiten: $s_n = 2r \,.\, \sin\frac{180^0}{n}$, $U_n = 2nr \,.\, \sin\frac{180^0}{n}$,

$$F_n = \tfrac{1}{2}nr^2 \,.\, \sin\frac{360^0}{n}; \quad O_{(U_n)} = 4n\pi er \,.\, \sin\frac{180^0}{n}, \quad V_{(F_n)} = n\pi e r^2 \,.\, \sin\frac{360^0}{n}.$$

Diese allgemeine Lösung ergiebt die besonderen Resultate für $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 16,$ Ist statt des Radius r die Seite s_n gegeben, so braucht man nur aus der Gleichung $s_n = 2r \,.\, si$ Wert für r zu entnehmen und in die vorhergehenden Gleichungen einzusetzen; man erhält alsdann $U_n = ns_n$; $F_n = \frac{n}{4} s_n^2 \cot\frac{180^0}{n}$, $O_{(U_n)} = 2n\pi e s_n$, $V_{(F_n)} = \frac{n\pi}{2} e s_n^2 \cot\frac{180^0}{n}$ und kann für n deren Werte 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 16, 24, 30 usw einsetzen.

In ähnlicher Weise lassen sich die Rotationskörper berechnen, welche durch umgeschrie mäßige Vielecke erzeugt werden.

Ihre Behandlung bietet aber nur dann neue Anregung, wenn man sie mit den von umgeschriebenen Kreise erzeugten vergleicht, weshalb sie im Anschluß an den Kreis betrachtet wer

IV. Die rotierende Figur ist ein Parallelogramm.

1. Rotiert ein Parallelogramm um eine Gerade, die im Abstande e von dem Diago schnitt (Schwerpunkt) parallel zu einer Seite gezogen ist, so findet man Oberfläche und Rotationskörpers, wenn man in den Produkten $2\pi e \,.\, U$ und $2\pi e \,.\, F$ den Umfang (U) und de inhalt (F) durch die gegebenen Größen ausdrückt. Wären z. B. zwei anstoßende Seiten a und von ihnen eingeschlossene Winkel α gegeben, so hätte man für U $2(a+b)$, und für F $ab \sin$ Wäre dagegen nur Grundlinie und Höhe gegeben, so könnte man nur das Volumen des körpers berechnen; zur Berechnung der Oberfläche müßte noch eine Angabe über die schie (etwa über ihre Neigung gegen die Grundlinie) gemacht werden.

2. (Fig. 10.) Ueber der Seite DC(a) des Rechtecks ABCD sei nach außen das Paral DCFC von der Höhe h so konstruiert, daß einer seiner Winkel 60° wäre. Man soll die Ober den Inhalt des vom Parallelogramm erzeugten Rotationskörpers berechnen.

Aufl. Da die schiefe Seite $\frac{2}{3}h\sqrt{3}$ ist, so erhält man für den Umfang $2(a+\frac{2}{3}h\sqrt{3}$ die Oberfläche $2\pi\left(b+\frac{h}{2}\right)2\left(a+\frac{2}{3}h\sqrt{3}\right)$ oder $4\pi\left(b+\frac{h}{2}\right)\left(a+\frac{2}{3}h\sqrt{3}\right)$, wenn b die andere Seite de ist. Das Volumen ist $2\pi\left(b+\frac{h}{2}\right)ah$.

(Fig. 11.) Auf der Rotationsachse MN werde im Punkte A die Senkrechte AB (a) errichtet, geteilt und über dem größeren Abschnitte CB das Parallelogramm CBDE von der Höhe a so daß E senkrecht über B liegt. Man soll den Rotationskörper berechnen.

$$O = 2\pi\left[\sqrt{5}-1+\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right]a^2;\quad V = (\sqrt{5}-1)\,\pi\,a^3.$$

ie ändern sich die Resultate, wenn die obere Grundlinie des Parallelogramms in ihrer Richtung r geschoben wird?

(Fig. 12.) Die Strecke PC(a), welche die Rotationsachse MN in P unter dem Winkel α schneidet, geteilt, daß PA : AC = 2 : 3. Der größere Abschnitt AC bilde in seiner Lage die große eines Parallelogramms; als kleine Diagonale DB werden der kleinere Abschnitt PA angenommen, el zur Achse MN gelegt.

Man soll den Inhalt des von ABCD erzeugten Rotationskörpers berechnen.

ufl. Da der Flächeninhalt des Parallelogramms $0{,}12\ a^2 . \sin\alpha$, der Abstand des Schwerpunktes ehungsachse $0{,}7a \sin\alpha$ ist, so ergiebt sich $V_{(ABCD)} = 0{,}084 a^3 . \sin\alpha^2$.

(Fig. 13.) Konstruiert man im Parallelogramm ABCD, dessen Diagonale DB der Drehungs- arallel läuft, zwei Ergänzungsparallelogramme in der Weise, daß man durch die Mitte G Diagonale EC die Parallelen HJ und KL zu den Seiten des Parallelogramms zieht, so Ergänzungsparallelogramme inhaltsgleiche Rotationskörper beschreiben. Man soll ihre Größe für stimmen, daß die halben Diagonalen AE = EC = d, BE = ED = d', der von ihnen eingeschlossene el d und der Abstand ihres Durchschnittspunkts von der Drehungsachse EF = e gegeben sind.

ufl. Verbindet man G mit D und B, so sind die Mitten S_1 und S_2 der Verbindungslinien unkte der Ergänzungsparallelogramme. Da $S_1 S_2 \parallel DB \parallel MN$, so sind S_1 und S_2 gleichweit ntfernt; und da auch $\#\ DKGH = GJBL$, so müssen die von ihnen erzeugten Ringkörper raum- Um ihre Größe zu finden, mache $GR \perp DB$, dann ist der Abstand der Schwerpunkte S_1 der Drehungsachse $e + \frac{1}{2}\overline{GR}$, oder, da $GR = \frac{d}{2}\sin\alpha$, $e + \frac{d}{4}\sin\alpha$. Es ist aber auch $\frac{9}{16}$ ABCD und $\#\ HGLC = \frac{1}{16}$ ABCD, folglich $\#\ DKGH = JBLG = \frac{3}{16}$ ABCD $= \frac{3}{16} . 2\,dd' . \sin\alpha =$ und deshalb $V_{(DKGH)} = V_{(JBLG)} = 2\pi\left(e + \frac{d}{4}\sin\alpha\right) . \frac{3}{8}\,dd' . \sin\alpha = \frac{3}{4}\pi\left(e + \frac{d}{4}\sin\alpha\right) dd' . \sin\alpha$.

Ein Rhombus, dessen Diagonalen gegeben sind, und zwar die größere AC = 2d, die kleinere otiere um eine im Abstande e parallel zur kleineren Diagonale gezogene Achse. Es soll die und der Inhalt des Rotationskörpers berechnet werden. Aufl. $O = 8\pi e\sqrt{d^2+f^2}$; $V = 4\pi edf$.

ie ändern sich die Resultate, wenn man den Rhombus in seiner Ebene um den Winkel φ nach echts so dreht, daß der Winkelpunkt B an seiner Stelle bleibt?

Aufl. 1, $O = 8\pi(e - f\sin\varphi)\sqrt{d^2+f^2}$; $V = 4\pi(e - f\sin\varphi)df$.

„ 2, $O = 8\pi(e + f\sin\varphi)\sqrt{d^2+f^2}$; $V = 4\pi(e + f\sin\varphi)df$.

V. Die rotierende Figur ist ein Trapez.

(Fig 14.) Ein Trapez, von welchem die parallelen Seiten a und b, und die Höhe h gegeben um eine zur größeren Grundlinie a im Abstande e parallel gezogene Achse.

ufl. a) Liegt die größere Grundlinie a der Achse näher als die kleinere, so ist, da der Abstand punktes von der größeren Grundlinie $\frac{h(a+2b)}{3(a+b)}$ ist,

$$V_{Trpz} = 2\pi\left(e + \frac{h(a+2b)}{3(a+b)}\right)\frac{a+b}{2}h = \frac{\pi h}{3}\left(3e(a+b) + h(a+2b)\right)$$

Liegt die kleinere Grundlinie der Achse näher als die größere, so ist

$$V_{(Trpz} = 2\pi\left(e + \frac{h(a+2b}{3(a+b)}\right)\frac{a+b}{2}h = \frac{\pi h}{3}\left(3e(a+b) - h(a+2b)\right)$$

Zusatz. (Fig. 15.) Vereinigt man beide Trapeze zu einem Sechseck, so ist das Volu Rotationskörpers $2\pi e(a+b)h$, d. h. einem Prisma gleich, dessen Grundfläche das rotierende (sym Sechseck und dessen Höhe der von einem Punkte der Symmetrieachse (AB) beschriebene Kreis i dem Resultat folgt auch noch, daß man die Symmetrieachse AB sowie jede der parallelen Seite und $C_2 D_2$ in ihrer Richtung beliebig verschieben kann, ohne daß sich das Volumen ändert.

2. (Fig. 16.) Es seien wiederum die parallelen Seiten a und b ($a > b$) und die Höhe h eines gegeben; dasselbe rotiere um eine zu den Grundlinien im Abstande e von der kleineren gezogene Achse.

Aufl. Bezeichnet man den Abstand des Schwerpunktes von der kleineren Grundlinie des $\left(\frac{2a+b}{3(a+b)}h\right)$ mit η, so ergiebt sich, wenn die kleinere Seite der Drehungsachse näher liegt als die

$$V_1 = 2\pi(e+\eta)\frac{a+b}{2}h;$$ im andern Falle ist $V_2 = 2\pi(e-\eta)\frac{a+b}{2}h$.

Die Summe beider ist wiederum $2\pi e(a+b)h$.

1. Zusatz. Auch hier darf man die parallelen Seiten in ihrer Richtung verschieben, sich das Volumen ändert.

2. Zusatz. Läßt man in den beiden vorhergehenden Fällen eine Grundlinie verschwinden das Trapez in ein Dreieck über, welches um eine zu einer Seite parallel laufende Achse rotiert. Es

a) (Fig. 17.) $V_{(ABC_2)} = 2\pi\left(e-\frac{h}{3}\right).\triangle ABC_2$, $V_{(ABC_1)} = 2\pi\left(e+\frac{h}{3}\right).\triangle ABC_1$, oder,

da $\triangle ABC_2 = ABC_1 = \frac{gh}{2}$, $V_{(ABC_2)} = \pi\left(e-\frac{h}{3}\right)gh$, $V_{(ABC_1)} = \pi\left(e+\frac{h}{3}\right)gh$; folglich $V_{(AC_2 BC_1)} = 2\pi e$. das Volumen eines Rotationskörpers, welcher durch Umdrehung eines symmetrischen Vierecks AC_2 eine zur Symmetrieachse parallele Achse entsteht, ist dem Volumen eines Prisma gleich, wel rotierende Viereck zur Grundfläche und den von einem Punkte der Symmetrieachse beschrieben zur Höhe hat.

b. (Fig. 18.) Stoßen die beiden kongruenten Dreiecke mit ihren Spitzen in C zusammen u ihre Grundlinien parallel zur Rotationsachse, so sind die Volumina der Ringkörper:

$$V_{(ABC)} = 2\pi\left(e-\frac{2}{3}h\right).\triangle ABC, \text{ und } V_{(A'B'C)} = 2\pi\left(e+\frac{2}{3}h\right).\triangle A'B'C,$$

und da $\triangle ABC = A'B'C = \frac{gh}{2}$, so ist die Summe beider, wie vorher, $2\pi e\,gh$.

VI. Die rotierende Figur sei symmetrisch.

Rotiert (Fig. 19.) eine beliebige symmetrische Figur um eine zu ihrer Symmetrieachse Achse, bezeichnen wir den Abstand des Schwerpunkts jeder der beiden symmetrischen Hälften (F) Symmetrieachse mit η und hat diese von der Umdrehungsachse den Abstand e, so ist der Inhalt, die der Drehungsachse näher liegende Hälfte beschreibt: $2\pi(e-\eta)F$, und der, welchen die entfernter Hälfte beschreibt: $2\pi(e+\eta)F$. Nennen wir ferner jede Hälfte des Umfangs (abgesehen von der Sy achse) U und den Abstand ihres Schwerpunkts von der Symmetrieachse σ, so ist die Oberfläch die der Drehungsachse näher liegende Hälfte beschreibt, $2\pi(e-\sigma)U$ und die der entfernter liegenden $2\pi($

Da das Volumen bezw. die Oberfläche, welche die ganze Figur bei ihrer Umdrehung b $2\pi e.2F$ beziehungsweise $2\pi e.2U$ ist, so erhalten wir zwischen den von den symmetrischen Hälf Figur erzeugten Körpern und dem von der ganzen Figur erzeugten Körper die merkwürdige B daß der Kubikinhalt bezw. die Oberfläche (abgesehen von der durch die Symmetrieachse besc Cylinderfläche) eines Körpers, welcher durch Umdrehung der näher an der Rotationsachse (oder von ihr) liegenden Hälfte einer symmetrischen Figur entsteht, halb so groß ist wie das Volumen Oberfläche des durch die ganze Figur beschriebenen Körpers, vermindert oder vermehrt um das bezw. die Oberfläche des Körpers, welcher durch Rotation einer Hälfte um die Symmetrieachse

der Körper berechnet werden, welcher durch Rotation eines Halbkreises um eine zu seinem r (2r) im Abstande e parallel gezogene Achse erzeugt wird, so erhält man den Inhalt (Ober- ringförmigen Körpers $r^2 e\pi^2 + \frac{4}{3}r^3\pi$ oder $r^2 e\pi^2 - \frac{4}{3}r^3\pi$ ($2er\pi^2 + 4r^2\pi$ oder $2er\pi^2 - 4r^2\pi$), der Halbkreis der Drehungsachse seine konkave oder seine konvexe Seite zukehrt.

VII. Die rotierende Figur sei ein Kreis.

ezeichnet man den Radius eines Kreises mit r, den Abstand seines Mittelpunkts von der (ihn denden) Drehungsachse mit e, so ist für den Rotationskörper nach dem Guldinschen Doppelsatze äche $O = 4\pi^2 er$ und das Volumen $V = 2\pi er^2$. Da in diesen Ausdrücken als variabele Größen e vorkommen, so müssen sich die Oberflächen zweier Ringkörper, wenn die Mittelpunkte (Schwer- rotierenden Kreise gleiche Entfernungen von der Drehungsachse haben, wie die Radien der zu einander verhalten, die Volumina dagegen wie die Quadrate dieser Radien. Haben aber nden Kreise gleiche Radien, während die Abstände ihrer Mittelpunkte von der Drehungsachse sind, so verhalten sich sowohl die Oberflächen als auch die Volumina der Rotationskörper wie nde zu einander.

erhalten sich z. B. die Abstände der Mittelpunkte zweier Kreise mit demselben Radius wie $e : e'$, n sich die Oberflächen und die Volumina der Rotationskörper auch wie $e : e'$; haben dagegen ende Kreise, deren Mittelpunkte von der Drehungsachse gleichweit entfernt sind, die Radien so verhalten sich die Oberflächen ihrer Rotationskörper zu einander wie $r : r'$, während die im Verhältnis $r^2 : r'^2$ stehen.

ufgabe 1. (Fig. 20.) Die Fläche eines Kreises K durch einen konzentrischen Kreis K' so zu die beiden Teilflächen bei der Umdrehung um eine Achse gleiche Ringkörper beschreiben.

ufl. Bezeichnet man die Radien beider Kreise mit r und r', so muß die Proportion gelten:

$$r'^2 : r^2 = 1 : 2, \text{ woraus } r' = \frac{r}{2}\sqrt{2} \text{ folgt.}$$

B. Da sich der Abstand von der Drehungsachse nicht ändert, wenn man den Mittelpunkt eines Kreise auf einer durch ihn zur Drehungsachse parallel gezogenen Geraden verschiebt, so kann Teilung auch durch einen excentrischen Kreis ausführen.

ufgabe 2. (Fig. 21.) An einem Kreise mit dem Radius r sei ein umgeschriebenes und ein ein- es reguläres Sechseck sowie der dem letzteren eingeschriebene Kreis konstruiert. Es sollen die e der Oberflächen und der Volumina für die Rotationskörper dieser Figuren gesucht werden.

Aufl. $O(_{U_6}^{u}) : O(_{U_6}^{i}) = 1 : \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $O(2\pi r) : O(2\pi r') = 1 : \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

$$O(_{U_6}^{u}) : O(2\pi r) = O(_{U_6}^{i}) : O(2\pi r') = 2\sqrt{3} : \pi .$$

$V(_{F_6}^{u}) : V(_{F_6}^{i}) = V(\pi r^2) : V(\pi r'^2) = 1 : \frac{3}{4}$. $V(_{F_6}^{u}) : V(\pi r^2) = V(_{F_6}^{i})$; $V(\pi r'^2) = 2\sqrt{3} : \pi$.

ufgabe 3. In ein Quadrat, dessen Seite a ist und dessen Mittelpunkt von der Drehungsachse d e hat, seien 4 Kreise gezeichnet, von denen jeder zwei aneinanderstoßende Seiten und die beiden en Kreise berührt. Man soll die Oberflächen und die Volumina der Rotationskörper dieser den Fall berechnen, daß eine Diagonale des Quadrats parallel zur Drehungsachse läuft.

ufl. (Fig. 22.) Bezeichnet man die Kreise kurz mit K_1, K_2, K_3, K_4

Radien, da sie gleich sind, mit ϱ, die Abstände ihrer Mittelpunkte von der Drehungsachse mit und e_4, so ergiebt sich $\varrho = \frac{a}{4}$, $e_1 = e - \frac{a}{2}\sqrt{2}$, $e_2 = e_4 = e$, $e_3 = e + \frac{a}{2}\sqrt{2}$;

$$O_1 = \pi^2\left(e - \frac{a}{2}\sqrt{2}\right)a; \quad O_2 = O_4 = \pi^2 ea; \quad O_3 = \pi^2\left(e + \frac{a}{2}\sqrt{2}\right)a .$$

$$V_1 = \frac{\pi^2}{8}\left(e - \frac{a}{2}\sqrt{2}\right)a^2; \quad V_2 = V_4 = \frac{\pi^2}{8}ea^2; \quad V_3 = \frac{\pi^2}{8}\left(e + \frac{a}{2}\sqrt{2}\right)a^2.$$

Anmerkung. Die Summe der Oberflächen ist $4\pi^2 ea$, die Summe der Volumina $\frac{1}{2}\pi^2 ea^2$; rn sich nicht, wenn man das Quadrat um seinen Mittelpunkt dreht.

Aufgabe 4. In einen Kreis mit dem Radius r seien sieben gleiche Kreise so eing daß sechs von ihnen einander und den gegebenen sowie den inneren siebenten (konzentrischen) Wie groß sind die Oberflächen und die Volumina der Körper, welche diese Kreise bei der Rotc eine im Abstande e vom Mittelpunkte des gegebenen Kreises und senkrecht zur Verbindungslin Kreismittelpunkte gezogene Gerade erzeugen?

Aufl. (Fig. 23.) Bezeichnet man die äußeren Kreise — mit dem der Drehungsachse liegenden beginnend — mit K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, den in der Mitte liegenden mit K_7 und ihre Radien mit ϱ, so ergiebt sich $\varrho = \frac{r}{3}$ und $O_{(K_1)} = \frac{4\pi^2}{3}\left(e - \frac{2}{3}r\right)r$, $O_{(K_2)} = O_{(K_6)} = \frac{4}{3}\pi^2\left(e - \frac{1}{3}r\right)r$,

$$O_{(K_3)} = O_{(K_5)} = \frac{4}{3}\pi^2\left(e + \frac{r}{3}\right)r,\quad O_{(K_4)} = \frac{4}{3}\pi^2\left(e + \frac{2}{3}r\right)r,\quad O_{(K_7)} = \frac{4}{3}\pi^2 er;\quad V_{(K_1)} = \frac{2}{9}\pi^2\left(e - \frac{2}{3}r\right.$$

$$V_{(K_2)} = V_{(K_6)} = \frac{2}{9}\pi^2\left(e - \frac{1}{3}r\right)r^2,\quad V_{(K_3)} = V_{(K_5)} = \frac{2}{9}\pi^2\left(e + \frac{1}{3}r\right)r,\quad V_{(K_4)} = \frac{2}{9}\pi^2\left(e + \frac{2}{3}r\right)r \text{ und } V_{(K_7)} = \frac{2}{9}\pi^2$$

Anmerkung. Sowohl die Summe der Oberflächen, als auch die der Volumina ist denn zwei diametral gegenüberliegende Kreise ergänzen einander, d. h. sie erzeugen zusammen zwei R körper, deren Summe dem Rotationskörper gleich ist, welcher von einem doppelt so großen Kreis wird, dessen Mittelpunkt mit dem Schwerpunkte der ganzen Figur zusammenfällt.

$$\Sigma(O) = \frac{28}{3}\pi^2 er;\quad \Sigma(V) = \frac{14}{9}\pi^2 er^2.$$

VIII. Die rotierende Figur ist ein Teil des Kreises.

1. Über den beiden Hälften des Kreisdurchmessers 2r, welcher verlängert die Drehungsac recht schneiden würde, seien nach derselben Seite Halbkreise konstruiert. Wie groß sind die Ri welche die beiden von je drei Halbkreisen begrenzten Teile des gegebenen Kreises bei der um die Achse erzeugen?

Aufl. (Fig. 24.) Bezeichnet AB den Durchmesser des gegebenen Kreises, AC die eine andere Hälfte desselben und ist e wieder der Abstand des Kreismittelpunktes von der Drehungs erhält man: $V_{(AHB)} = V_{(AKB)} = \pi^2 er^2$. $V_{(AMC)} + V_{(CNB)} = 2\pi e \,.\, \pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2 er^2}{2}$;

folglich $V_{(AMCNBHA)} = \frac{1}{2}\pi^2 er^2$ und $V_{(AKBNCMA)} = \frac{3}{2}\pi^2 er^2$.

Die beiden Rotationskörper verhalten sich zu einander wie 1 : 3, was man auch aus d hältnis der beiden rotierenden Flächenteile des Kreises ableiten kann, da ihre Schwerpunkte gleich der Drehungsachse entfernt sind.

2. In einem Kreise mit dem Radius r, dessen Mittelpunkt von der Drehungsachse den A hat, sei der zur Drehungsachse senkrechte Durchmesser gezogen, und über den Hälften desselben se verschiedenen Seiten Halbkreise errichtet. Es sollen die Volumina der beiden Ringkörper berechnet welche bei der Rotation durch die beiden — von je drei Halbkreisen begrenzten — Hälften des erzeugt werden.

Aufl. (Fig. 25.) Nach derselben Bezeichnung wie in der vorhergehenden Aufgabe ist:

$$V_{(AHB)} = V_{(AKB)} = \pi^2 er^2;\quad V_{(AMC)} = \pi^2\left(e - \frac{r}{2}\right)\left(\frac{r}{2}\right)^2;\quad V_{(CNB)} = \pi^2\left(e + \frac{r}{2}\right)\left(\frac{r}{2}\right)^2;$$

folglich $V_{(AMCNBH)} = \pi^2\left(4e - r\right)\left(\frac{r}{2}\right)^2$ und $V_{(AKBNCM)} = \pi^2(4e + r)\left(\frac{r}{2}\right)^2$.

Bringt man die Ausdrücke auf die Formen $\pi^2\left(e - \frac{r}{4}\right)r^2$ und $\pi^2\left(e + \frac{r}{4}\right)r^2$, so stellen sie lumina der Rotationskörper dar, welche man erhält, nachdem man den Halbkreis ABH der D achse um den vierten Teil des Radius genähert und den Halbkreis AKB um ebensoviel von der D achse entfernt hat.

. In einem Kreise K, dessen Mittelpunkt C den Abstand e von der Drehungsachse hat, sei der gegen die Drehungsachse gerichtete Durchmesser AB gezogen und in D so geteilt, daß CD (d) an nd des Mittelpunkts C angesetzt erscheint; ferner seien die Kreise konstruiert, welche AD und DB nessern haben. Man soll die Rotationskörper berechnen, welche durch die 4 Teile des gegebenen it dem Radius r erzeugt werden.

lufl. (Fig. 26.) Bezeichnet man die Volumina, welche durch die Flächen der Kreise K, K_1 zeugt werden mit V, V_1 und V_2, so ist, da die zugehörigen Radien r, $\frac{r+d}{2}$, $\frac{r-d}{2}$ und die Ab- Kreismittelpunkte von der Drehungsachse e, $e-\frac{r-d}{2}$, $e+\frac{r+d}{2}$ sind,

r^2, $V_1 = 2\pi^2\left(e-\frac{r-d}{2}\right)\left(\frac{r+d}{2}\right)^2$ und $V_2 = 2\pi^2\left(e+\frac{r+d}{2}\right)\left(\frac{r-d}{2}\right)^2$; folglich der von jeder sichel- fläche (Arbelus) beschriebene Rotationskörper $2\pi^2\left(e+\frac{d}{2}\right)\left(\frac{h}{2}\right)^2$, wenn man die in D errichtete h einführt. Der letzte Ausdruck bezeichnet den Inhalt eines Ringkörpers, welcher durch einen r h als Durchmesser erzeugt wird, wenn man seinen Mittelpunkt auf der Mittelsenkrechten nbringt.

ßt der Abstand des Teilpunktes D e—d, statt e+d, so wird das Volumen, welches der Arbelus $2\pi^2\left(e-\frac{d}{2}\right)\left(\frac{h}{2}\right)^2$. Der spezielle Fall für e = r ergiebt die Werte $2\pi^2\left(r\pm\frac{d}{2}\right)\left(\frac{h}{2}\right)^2$.

Der Durchmesser AB (2r) eines Kreises K mit dem Mittelpunkte C werde durch die Teilpunkte D drei gleiche Teile geteilt. Errichtet man nun über AD und AE die Halbkreise AMD und AJE Seite, über DB und EB die Halbkreise DNB und EKB nach der andern Seite des Durchmessers, nach einem planimetrischen Satze die Kreisfläche in 3 gleiche Teile geteilt. Es sollen die örper der 3 Flächenteile für den Fall berechnet werden, daß sich die Figur um die in A an gelegte Tangente dreht.

lufl. (Fig. 27.) $V_{(ADM)} = \pi^2\left(\frac{r}{3}\right)^3$; $V_{(AEJ)} = 8\pi^2\left(\frac{r}{3}\right)^3$. $V_{(ABL)} = \pi^2 r 3$; $V_{(AHB)} = \pi^2 r 3$;

$V_{(DNB)} = 16\pi^2\left(\frac{r}{3}\right)^3$; $V_{(EKB)} = 5\pi^2\left(\frac{r}{3}\right)^3$. $V_{(AMDEJA)} = 7\pi^2\left(\frac{r}{3}\right)^3$; $V_{(AJEBLA)} = 19\pi^2\left(\frac{r}{3}\right)^3$,

$_{NDA)} = 11\pi^2\left(\frac{r}{3}\right)^3$; $V_{(DNBKED)} = 11\pi^2\left(\frac{r}{3}\right)^3$; $V_{(AHBNDMA)} = \frac{4}{9}\pi^2 r^3$; $V_{(AMDNBKEJA)} = \frac{2}{3}\pi^2 r^3$;

$V_{(AJEKBLA)} = \frac{8}{9}\pi^2 r^3$. $V_{(AHBNDMA)} : V_{(AMDNBKEJA)} : V_{(AJEKBLA)} = 2:3:4$.

Vollte man nur den Inhalt des Rotationskörpers wissen, welchen der mittelste Teil erzeugt, so nan nur zu beachten, daß dieser Teil seinen Schwerpunkt in C, dem Schwerpunkte des ganzen at, dessen Rotationskörper $2\pi^2 r^3$ ist, und deshalb einen Körper erzeugt, welcher der dritte Teil des ganzen Kreises ist. Auch ist aus dieser Betrachtung ersichtlich, daß der mittelste Teil um C erden kann, ohne daß sich das Volumen seines Rotationskörpers ändert.

. Schneidet man auf dem Durchmesser AB eines Kreises K mit dem Mittelpunkt C und dem von C aus die gleichen Strecken CE und CD (d) ab, konstruiert über AD und EB die Halbkreise ADM nach einer Seite und über DE den Halbkreis DEH nach der andern Seite des Durchmessers, er Kreis durch die aus den 3 Halbkreisen bestehende Linie in zwei Teile geteilt, von denen der OHENBKA das Salinum des Archimedes heißt.

Man soll die Rotationskörper berechnen, welche durch die beiden Teile entstehen, wenn man die in A als Achse nimmt.

Aufl. (Fig. 28.) Da beide Flächenteile ihre Schwerpunkte auf der durch C parallel zur D achse gezogenen Geraden haben, so ist der Abstand eines jeden dem Radius (r) des Kreises gleich.

Die Flächen aber sind:

$F_{(ADM)} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{r-d}{2}\right)^2$, $F_{(EBN)} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{r-d}{2}\right)^2$, $F_{(DEH)} = \frac{\pi}{2}d^2$, $F_{(ABK)} = F_{(ABL)} = \frac{\pi}{2}r^2$; folglich

$F_{(AMDHENBKA)} = \pi\left(\frac{r+d}{2}\right)^2$, d. i. der Flächeninhalt des Kreises über KH als Durchmesser.

$$F_{(AMDHENBLA)} = \pi\left(\frac{3r+d}{2}\right)\left(\frac{r+d}{2}\right) = \pi\left(r+\frac{r+d}{2}\right)\left(\frac{r-d}{2}\right);$$

Bezeichnet man die im Mittelpunkte von AD oder EB errichtete Ordinate des gegebenen mit h, so ist $\left(r+\frac{r+d}{2}\right)\left(\frac{r-d}{2}\right) = h^2$ und demnach πh^2 der Flächeninhalt eines Kreises, welche als Radius beschrieben worden ist.

Daher ist: $V_{(AMDHENBKA)} = 2\pi^2 r\left(\frac{r+d}{2}\right)^2$ und $V_{(AMDHENBLA)} = 2\pi^2 r h^2$.

IX. Schwerpunktsbestimmungen von Flächen.

Aus der eingangs erwähnten Relation zwischen einer rotierenden Linie (l), dem Abstand Schwerpunktes von der Drehungsachse (e) und der erzeugten Fläche (F) läßt sich der Abstand des punktes von der Drehungsachse finden. Es ist aber $F = 2\pi el$, also $e = \frac{F}{2\pi l}$. Ebenso kann m bloße Division den Abstand e′ des Schwerpunktes einer rotierenden Fläche F′ finden, wenn man halt V des Rotationskörpers weiß; es ist aber $V = 2\pi e' F'$, also $e' = \frac{V}{2\pi F'}$. Da aber die Lag Punktes durch eine Ortslinie noch nicht bestimmt ist, so muß man, wenn nicht bereits eine solche ist, die obige Bestimmung für eine zweite Drehungsachse vornehmen.

Aufg. 1. Man soll die Lage des Schwerpunktes für eine halbe Kreisfläche bestimmen.

Aufl. Es bedarf keines Beweises, daß der Schwerpunkt S der halben Kreisfläche auf de Durchmesser (AB) winkelrecht stehenden Radius (CD) liegen muß. Bezeichnet man seinen Abst mit x, so muß nach dem Guldinschen Satze sein: $2\pi x F = V$, oder, wenn man die bekannten W F und V einsetzt, $2\pi x \cdot \frac{\pi}{2} r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3$, und schließlich $x = \frac{4r}{3\pi}$.

Zusatz. Wollte man den Abstand des Schwerpunktes x für den Bogen haben, so brauch nur die andere Relation $2\pi el = F$ zu nehmen und erhielte: $2\pi x' \cdot \pi r = 4\pi r^2$, woraus sich $x' = \frac{2r}{\pi}$

2. Wo liegt der Schwerpunkt eines Quadranten?

Aufl. (Fig. 29.) Da der Schwerpunkt S auf der Halbierungslinie des rechten Winkels (CD muß, so braucht man nur seinen Abstand von einem der beiden Begrenzungsradien als Achse zu Nennt man diesen Abstand x, so erhält man

$$2\pi x \cdot \frac{\pi r^2}{4} = \frac{2}{3}\pi r^3;\ x = \frac{4r}{3\pi}.$$ Hieraus ergiebt sich $\overline{CS} = \frac{4r}{3\pi}\sqrt{2}$.

3. Es soll die Lage des Schwerpunkts für einen beliebigen Kreissektor bestimmt werden.

Aufl. (Fig. 30.) Der Schwerpunkt S liegt auf der Halbierungslinie des Centriwinkels.

Läßt man den Sektor um einen seiner Radien (AC) rotieren, so beschreibt er einen Kug (sog. Kugelkegel), dessen Inhalt $\frac{2}{3}\pi r^2 h$ ist. Führt man die Sehne $(\overline{AB})s$ und den Bogen $\overset{\frown}{AB}(b)$ ergiebt sich $F = \frac{b}{2}r$, $V = \frac{\pi}{3}s^2 r$ und der Abstand des Schwerpunkts $x = \frac{s^2}{3b}\cdot\left(\frac{240^0}{\alpha^0}\right)\cdot\frac{r\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\pi}$, we den Centriwinkel α und den Radius benützen will. Der Abstand des Schwerpunkts vom Mitt ergiebt sich, wenn man den Wert für x durch $\sin\frac{\alpha}{2}$ dividiert, $SC = \frac{2s}{3b}r$.

. Die Lage des Schwerpunkts für den Kreisabschnitt zu suchen.

Aufl. (Fig. 31.) Der Rotationskörper des Segments, welches um einen der nach den End- es Bogens gezogenen Radius rotiert, ist die Differenz eines Kugelsegments und eines Kegels von öhe über demselben Grundkreise. Nennt man die Höhe h, den Radius des Grundkreises ϱ, so $= \frac{\pi}{6} h(\varrho^2 + h^2) = \frac{\pi}{6} h s^2$. Bezeichnet man ferner den Flächeninhalt des Sektors mit F, den Abstand seines kts von dem als Drehungsachse angenommenen Radius mit x, so muß nach dem Guldinschen Satze sein: $\frac{\pi}{6} h \cdot s^2$ und daraus $x = \frac{s^2}{12F} h$. Aus $h : s = \frac{s}{2} : r$ ergiebt sich $h = \frac{s^2}{2r}$ und demnach $x = \frac{s^4}{24rF}$.

Will man den Abstand des Schwerpunkts vom Kreismittelpunkte C haben, so kann man die n $x : SC = h : s = s : 2r$ benützen. Man erhält dann $SC = \frac{2r}{s} x$, oder wenn man für x den ert einsetzt, $\overline{SC} = \frac{s^3}{12F}$.

lm für das Segment den Abstand des Schwerpunkts von der Sehne zu finden, hat man von vor- Werte den Abstand der Sehne vom Kreismittelpunkte abzuziehen.

. Aufl. (Fig. 32.) Bezeichnet man den Bogen mit b, die Sehne mit s, ihren Abstand vom kte mit ϱ und zieht man die Drehungsachse durch C parallel zur Sehne, so läßt sich der vom bei der Umdrehung erzeugte Ring als Differenz einer Kugelschicht und eines Zylinders darstellen. man den Flächeninhalt des Segments mit F, das Volumen des von ihm erzeugten Ringes erhält man $V = \frac{\pi s^3}{6}$, und aus $2\pi x F = \frac{\pi s^3}{6}$ ergiebt sich $x = \frac{s^3}{12F}$.

. (Fig. 33.) Kreis K mit dem Radius R werde durch Kreis K′ mit dem Radius r von innen Man soll den Schwerpunkt der mondsichelförmigen Figur bestimmen.

Aufl. Es ist klar, daß der Schwerpunkt auf der Centrallinie beider Kreise liegen muß. Be- an den Abstand des Schwerpunkts (S) der Figur (F) vom Mittelpunkte (C) des großen Kreises id nimmt man als Rotationsachse die beiden Kreisen gemeinschaftliche Tangente an, so erhält t: $2\pi(R+x)\pi(R^2-r^2) = 2\pi^2(R^3-r^3)$ und daraus $R + x = \frac{R^2+Rr+r^2}{R+r}$ oder $x = \frac{r^2}{R+r}$.

$C'C = R - r$, so findet man das Verhältnis $C'C : x = (R-r)\,r : \frac{r^2}{R+r}$

$= (R^2-r^2) : r^2$

$= \pi(R^2-r^2) : \pi r^2$,

Abstand des gesuchten Schwerpunktes verhält sich zur Centrallinie wie der Flächeninhalt des reises zum Flächeninhalte der von den beiden Kreisen begrenzten Figur.

. Über dem Abschnitt AD(2r) eines Halbkreisdurchmessers AB(2R) sei ein zweiter Halbkreis selben Seite wie der erste) konstruiert. Es soll der Schwerpunkt der krallenförmigen Figur rden.

Aufl. (Fig. 34.) Eine Ortslinie des gesuchten Schwerpunkts S′ muß nach der vorhergehenden die in S (dem Schwerpunkte des Mündchens) auf dem Durchmesser errichtete Ordinate sein. Um änge dieser Ordinate (y) zu finden, lasse man die Figur um den Durchmesser rotieren; es ergiebt die Gleichung: $2\pi y \cdot \pi(R^2 - r^2) = \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$ und daraus $y = \frac{4(R^2+Rr+r^2)}{3\pi(R+r)}$, oder wenn der vorigen Aufgabe für $\frac{R^2+Br+r^2}{R+r}$ den Wert $R + x$ einführt, $y = \frac{4(R+x)}{3\pi}$. Dieser Aus- eutet für einen Halbkreis mit dem Radius $R + x$(BS) den Abstand des Schwerpunktes vom er.

7. Über dem einen Begrenzungsradius eines Kreisquadranten ist nach innen ein Halbk schrieben. Es soll der Schwerpunkt der krallenähnlichen Figur bestimmt werden.

Aufl. (Fig. 35.) $AC = CB = r$; CD DB $\frac{r}{2}$.

Bezeichnet man die Abstände des Schwerpunktes S von den Radien AC und CB bezw. mit x so muß sein: 1) $2\pi x \cdot \left(\frac{\pi}{4} r^2 - \frac{\pi}{8} r^2\right) = \frac{2}{3}\pi r^3 - \frac{\pi^2}{8} r^3$ und $x = \frac{16 - 3\pi}{6\pi} r = \left(\frac{16}{3\pi} - 1\right)\frac{r}{2}$.

2) $2\pi y \cdot \frac{\pi}{8} r^2 = \frac{2}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^3$ und $y = \frac{2r}{\pi}$.

8. Konstruiert man über den Begrenzungsradien eines Kreisquadranten nach innen Halbk entstehen vier Teilflächen, von denen je zwei gegenüberliegende einander gleich sind. Man soll den punkt des Teils bestimmen, der von drei Bögen begrenzt wird.

Aufl. (Fig. 36.) Es seien die Radien des Quadranten AC und BC(r), die Mitte des Bo und der Schnittpunkt der Halbkreise E. Fällt man von E die Lote EF und EG auf die Radien BC, so läßt sich das Bogendreieck AEB finden, wenn man vom Quadranten ACBA die Quadranten und EGBE und das Quadrat CGEF subtrahiert. $F_{(AEBDA)} = \frac{\pi}{4} r^2 - 2 \cdot \frac{\pi}{16} r^2 - \frac{r^2}{4} = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\left($

Der Schwerpunkt, der auf CD liegen muß, sei S, sein Abstand vom Radius AC, wel Drehungsachse angenommen werden soll, x. Dann muß sein:

$$2\pi x\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{2}{3}\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^3 - 2\pi\left(\frac{r}{4}\right)\left(\frac{r}{2}\right)^2 - 2\pi\left(\frac{r}{2} + \frac{2r}{3\pi}\right)\frac{r}{4}\left(\frac{r}{2}\right)^2$$

$$= \frac{\pi}{8}\left(3 - \frac{\pi}{2}\right) r^3, \text{ woraus } x = \frac{6 - \pi}{\pi - 2} \cdot \frac{r}{4} \text{ folgt.}$$

Um CS zu erhalten, braucht man nur noch mit $\sqrt{2}$ zu multiplizieren.

X. Vermischte Aufgaben.

1. Ein ringförmiges Prisma sei dadurch entstanden, daß sich ein gleichschenkliges Dreie welchem die Basis (b) und der Winkel an der Spitze (β) gegeben sind, um eine zur Basis parallel im Abstande e um den Winkel von 36° gedreht hat.

Aufl. Ist die Spitze des Dreiecks der Achse zugekehrt, so ergiebt sich das Volumen

$$V = \frac{\pi}{5}\left(e - \frac{b}{6}\cot\frac{\beta}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right)^2 \cot\frac{\beta}{2},$$

ist sie dagegen von der Achse abgewandt, so wird $V = \frac{\pi}{5}\left(e + \frac{b}{6}\cot\frac{\beta}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right)^2 \text{cotd}\frac{\beta}{2}$.

2. Von einem Quadrat mit der Seite a sollen die Ecken so abgeschnitten werden, daß ein re Achteck übrig bleibt. Wie groß ist der Rotationskörper des letzteren, wenn der Abstand der Dre achse vom Mittelpunkte des Quadrats e ist?

Aufl. Da die Seite des entstehenden Achtecks $(\sqrt{2} - 1)a$, der Umfang $8(\sqrt{2} - 1)a$ und die $2(\sqrt{2} - 1)a^2$ ist, so ergiebt sich die Oberfläche des Ringkörpers $16(\sqrt{2} - 1)\pi ea$ und das Volumen $4(\sqrt{2} -$

3. Ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten AC(b) und BC(a) gegeben sind, rotiere u Hypotenuse. Man soll die Rotationskörper berechnen, welche von den über den Katheten err Quadraten erzeugt werden.

ıfl. (Fig. 37.) Bezeichnet man die ſpitzen Winkel bei A und B mit α und β, die Abſtände der Quadrat- e von der Hypotenuſe mit e und e', ſo iſt $2e = (a+b)\sin\alpha$ und $2e' = (a+b)\sin\beta$, oder $2e = \frac{a+b}{c}a$ $\frac{+b}{c}b$; folglich ſind die Oberflächen der Rotationskörper $4\pi \cdot \frac{a+b}{c}a^2$ und $4\pi \cdot \frac{a+b}{c}b^2$, e Volumina durch die Produkte $\pi \cdot \frac{a+b}{c} \cdot a^3$ und $\pi \cdot \frac{a+b}{c} \cdot b^3$ ausgedrückt werden.

ıſatz 1. Aus den Reſultaten iſt erſichtlich, daß ſich die Oberflächen der beiden Rotationskörper adrate, die Volumina aber wie die Kuben der Katheten verhalten.

ıſatz 2. Konſtruiert man zwei ähnliche Polygone, die ähnlich liegen, und läßt man ſie um ihren Ähnlichkeitspunkt gezogene Gerade (Ähnlichkeitslinie) rotieren, ſo verhalten ſich die er- ationskörper wie die Kuben von zwei homologen Seiten (Linien) dieſer Polygone.

Das Quadrat über der Hypotenuſe eines rechtwinkligen Dreiecks beſchreibt bei der Rotation um iden Katheten denſelben Ringkörper. Der Satz iſt zu beweiſen und der Inhalt des Rotations- ſuchen.

ıfl. (Fig. 38.) Bezeichnet man die Kathete BC mit a, die Kathete AC mit b und legt man Dreiecke mit ihren Katheten ſo auf die Drehungsachſe, daß die Scheitel der ſpitzen Winkel α ınmenfallen, ſo iſt das Hypotenuſenquadrat beiden Dreiecken gemeinſam; folglich beſchreibt es nſelben Rotationskörper. Sein Mittelpunkt hat aber von der Achſe den Abſtand $\frac{a+b}{2}$, weshalb des Rotationskörpers durch das Produkt $\pi(a+b)c^2$ beſtimmt wird.

Über der kleineren Grundlinie b eines Trapezes von der Höhe h, welches um die größere a als Achſe rotiert, ſeien verſchieden geſtaltete Dreiecke von der Höhe h' konſtruiert. Man ſoll en der Körper angeben, welche durch Rotation des Trapezes, mit irgend einem dieſer Dreiecke nommen, erzeugt wird.

ıfl. (Fig. 39.) Da der Schwerpunkt des Trapezes den Abſtand $\frac{h}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b}$, der eines jeden cke den Abſtand $\left(h + \frac{h'}{3}\right)$ von der Drehungsachſe hat, ſo iſt das Volumen eines jeden der ge- ationskörpers $\pi\left[\frac{a+2b}{3}h^2 + \left(h+\frac{h'}{3}\right)bh'\right]$.

In Figur 40 ſei ABCD ein Rechteck (AB = DC = a, AD = BC = b), BCE ein rechtwinkliges = c), DFGMD ein Quadrant (DF = FG = d) und FGNF der Halbkreis über FG. Welches at der Rotationskörper, den die Figur AECFNGMDA bei der Umdrehung um AE erzeugt?

ıfl. $\pi\left(a+\frac{c}{3}\right)b^2 + \pi\left(\frac{16-3\pi}{24}\right)r^3$.

Über der Kathete AC(b) eines rechtwinkligen Dreiecks ABC ſei das Quadrat ACHG und über athete anliegenden Hypotenuſenabſchnitt AD (Projektion von AC) das dem Kathetenquadrat teck ADEF konſtruiert. Es ſollen die Volumina der Rotationskörper beider Vierecke für den net werden, daß die Drehungsachſe durch B geht und auf der Hypotenuſe ſenkrecht ſteht.

ıfl. (Fig. 41.) Da das aus H auf die Achſe gefällte Lot $(a+b)\sin\alpha$ oder $\frac{(a+b)a}{c}$ iſt, ſo erhält en Schwerpunkt (S) des Quadrats AGHC als Abſtand von der Drehungsachſe $\frac{(a+b)a+c^2}{2c}$ und

$_{AGHC)} = \pi \cdot \frac{(a+b)a+c^2}{c} \cdot b^2 = \pi \cdot \frac{a^2+c^2}{c} \cdot b^2 + \pi \cdot \frac{ab}{c} \cdot b^2$.

d des Schwerpunkts (S') für das Rechteck ADEF iſt $\frac{c^2+a^2}{2c}$, folglich $V_{(ADEF)} = \pi \cdot \frac{c^2+a^2}{c} \cdot b^2$.

Der Überschuß des ersten Körpers über den zweiten läßt sich als Rotationskörper des quadrats darstellen, wenn man seinem Schwerpunkte die halbe Hypotenusenhöhe als Abstand Drehungsachse giebt.

8. Über der Kathete AC eines rechtwinkligen, gleichschenkligen Dreiecks ACB sei der $\widehat{AC}$ nach außen, über der Kathete BC der Quadrant $\widehat{BC}$ nach innen konstruiert. Wie groß ist d des Körpers, welchen die von den beiden Quadranten und der Hypotenuse des Dreiecks eing Figur ABECDA bei der Rotation um die Hypotenuse AB erzeugt?

Aufl. (Fig. 42.) Bezeichnet man die Mittelpunkte, aus welchen die Quadranten $\widehat{AC}$ un schrieben sind, mit F und G, und zieht man die Verbindungsstrecken FC, BG und CG, die einan sein müssen und mit r bezeichnet werden mögen, so ist $V_{(ABECDA)} = V_{(AFCDA)} + V_{(CFBEC)}$.

Es ist aber $V_{(AFCDA)} = \frac{2}{3}\pi r^3$ und $V_{(CFBEC)} = V_{(AFBG)} - V_{(CEBGC)}$; ferner ist $V_{(CFBG)} = V_{(CEBGC)} = \frac{\pi}{6}(3\pi - 4)r^3$, folglich $V_{(CFBE)} = \frac{\pi}{6}(10 - 3\pi)r^3$ und $V_{(ABECDA)} = \frac{\pi}{6}(14 - 3\pi)r^3$.

9. Es soll das Volumen des Rotationskörpers gesucht werden, welcher entsteht, we voriger Aufgabe bezeichnete Fläche um BG rotiert.

$V_{CFBEC)} = V_{(CFBG)} - V_{(CEBGC)} = \frac{1}{3}\pi r^3$. $V_{(AFCDA)} = \frac{\pi}{6}(3\pi + 4)r^3$; folglich $V_{(ABECDA)} = \pi\left(\frac{\pi}{2} +$

Zusatz. Aus dem Resultat ergiebt sich für die Fläche ABECDA der Abstand des Schw von BG $\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)\frac{r}{2}$, aus dem vorhergehenden der Abstand von AB $\frac{14 - 3\pi}{12}r$.

10. Über den Seiten eines Quadrats, dessen Mittelpunkt den Abstand e von der Dreh hat, seien die Lunulae Hippocratis konstruiert. Man soll die Summe der Ringkörper berechne 1. die Möndchen, 2. die Halbkreisflächen, 3. die Segmente über den Quadratseiten erzeugen.

Aufl. Bezeichnet man die Quadratseite mit a, die Möndchen mit L_1, L_2, L_3 und L_4, kreise mit $\frac{1}{2}K_1$, $\frac{1}{2}K_2$, $\frac{1}{2}K_3$ und $\frac{1}{2}K_4$, die Segmente mit Sg_1, Sg_2, Sg_3, Sg_4, so ist:
1.) $V_{(L_1+L_2+L_3+L_4)} = 2\pi e a^2$; 2.) $V_{(\frac{1}{2}K_1+\frac{1}{2}K_2+\frac{1}{2}K_3+\frac{1}{2}K_4)} = \pi^2 e a^2$; 3.) $V_{(Sg_1+Sg_2+Sg_3+Sg_4)} = \pi(\pi$

11. (Fig. 44.) Die wellenförmige Oberfläche vom Deckel einer Vidischen Dose sei die Rotationsfl Linie, welche dadurch entstanden ist, daß man auf der Rotationsachse MN in A die Senkrechte erri ihr $AB = r$ und $BC = CD = DE = EF = FG = GH = 2r$ gemacht und über den letzten sechs Strec kreise beschrieben hat, von denen je zwei aneinanderstoßende auf verschiedenen Seiten der Ger liegen. Wie groß ist diese Oberfläche?

Aufl. $O_{(\widehat{AB})} = \pi r^2$, $O_{(\widehat{BC})} = 4\pi^2 r^2$, $O_{(\widehat{CD})} = 8\pi^2 r^2$, $O_{(\widehat{DE})} = 12\pi^2 r^2$, $O_{(\widehat{EF})} = O_{(\widehat{FG})} = 20\pi^2 r^2$, $O_{(\widehat{GH})} = 24\pi^2 r^2$, woraus sich ergiebt, daß $O_{(\widehat{AB}\,\widehat{C}\,\widehat{D}\,\widehat{E}\,\widehat{F}\,\widehat{G}\,\widehat{H})} = \pi r^2 + 84\pi^2 r^2 = \pi(1 +$

12. (Fig. 45.) Der hohle Raum einer Bourdonschen Röhre sei einem Rotationskörper gleich durch Umdrehung einer Ellipse um eine zu ihrer großen Achse parallele Gerade im Abstande e e ist. Es soll der Inhalt des Hohlraums für einen Umdrehungswinkel von 300° berechnet werden

Aufl. Da der Flächeninhalt der Ellipse mit den Halbachsen a und b, wie sich eleme mehrfache Weise zeigen läßt, durch das Produkt $ab.\pi$ ausgedrückt wird, so ergiebt sich das Volumen sofort aus $\frac{2}{3}\pi^2 e\,ab$.

13. Einer Ellipse soll ein gleichschenkliges Dreieck so einbeschrieben werden, daß seine kleinen Achse parallel läuft und sein Schwerpunkt mit dem Mittelpunkte der Ellipse zusammenfä verhalten sich die Rotationskörper, welche durch die Ellipse und das Dreieck bei der Umdrehung beliebige, im Abstande e vom Mittelpunkte gezogene und die Ellipse nicht schneidende Achse entst

Aufl. Da der Flächeninhalt des Dreiecks $\frac{3}{4}ab\sqrt{3}$ ist, so ergiebt sich das Volumen $V = \frac{3}{2}\pi$ Das Volumen V' des durch die Ellipse erzeugten Ringes ist aber $2\pi^2 e\,ab$, folglich $V : V' = 3$

e ändert sich das Resultat, wenn die Basis des eingeschriebenen Dreiecks der großen Achse der llel läuft?

Um eine Ellipse sei ein gleichschenkliges Dreieck so beschrieben, daß seine Basis der kleinen Ellipse parallel ist und sein Schwerpunkt mit dem Mittelpunkte der Ellipse zusammenfällt. den Rotationskörper berechnen, welchen das Dreieck bei der Umdrehung um eine beliebige t schneidende) Achse hervorbringt.

l. Bezeichnet man die Halbachsen der Ellipse mit a und b, so ist der Flächeninhalt des $\sqrt{3}$. Setzt man ferner den Abstand der Achse vom Mittelpunkte der Ellipse e, so ergiebt sich des gesuchten Körpers $V = 6\pi\sqrt{3}\, e\, a\, b$.

(Fig. 46.) Aus dem Quadrat ABCD, dessen Seite a ist, sei mit $\frac{a}{4}$ als Radius der Quadrant sgeschnitten, über BG $\left(\frac{a}{2}\right)$ aber nach außen der Halbkreis konstruiert. Wie groß ist der von BJGFHED bei der Rotation um DA erzeugte Körper?

l. $V = \frac{\pi + 33}{32} \cdot \pi a^3$.

(Fig 47.) Über AB sei der Halbkreis konstruiert und durch den Radius AF halbiert worden; man aus der Mitte (D) von CF mit DF den Quadranten EF beschrieben und E mit A und B Es sollen die Rotationskörper berechnet werden, welche von den Flächen AENFMA und ei der Rotation um AB beschrieben werden.

l. Bezeichnet man AB mit 2r, so ist $AC = CF = r$ und $ED = DF = \frac{1}{2}r$; ferner

$_{FMA)} = \frac{2}{3}\pi r^3$, $V_{(EDFNE)} = \frac{\pi}{48}(3\pi + 4)r^3$, $V_{(ACDE)} = \frac{\pi}{6}r^3$, $V_{(AENFMA)} = \frac{20 - 3\pi}{48} \cdot \pi r^3$.

$$V_{(ABE)} = \frac{\pi}{6}r^3, \quad V_{(EBLFNE)} = \frac{12 + \pi}{16} \cdot \pi r^3.$$

(Fig. 48.) Um einen Rotationskörper zu erhalten, welcher der rotierenden Scheibe des Fesselschen nelt, sei das Rechteck ABCD ($AB = CD = r$ und $BC = AD = 4r$) gezeichnet, über CD das gleichseitige konstruiert und aus E mit r ein Kreis beschrieben. Es soll der Körper berechnet werden, h Umdrehung der Figur um AB erzeugt wird.

l. $V_{(ABCD)} = 16\pi r^3$; $V(\pi r^2) = (8 + \sqrt{3})\pi^2 r^3$; Volumen des Segments über

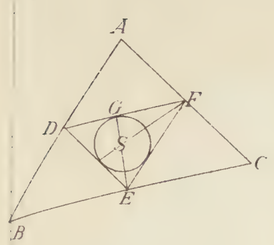
$$CD = \left(\frac{8 + \sqrt{3}}{6}\pi - \frac{11 + 24\sqrt{3}}{12}\right)\pi r^3,$$

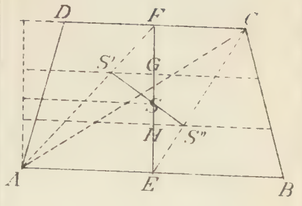
gesamte Volumen (Summe der beiden ersten vermindert um das dritte):

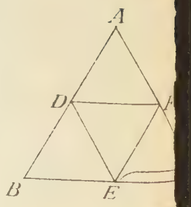
$$\left(\frac{203 + 24\sqrt{3}}{12} + \frac{5(8 + \sqrt{3}\pi)}{6}\right)\pi r^3.$$

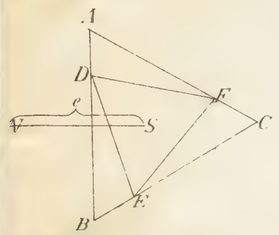
---

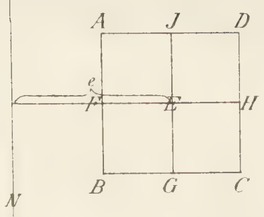
rch die vorstehenden Ausführungen, welche die Verwendbarkeit der Guldinschen Regel mehr erschöpfend behandeln wollen, dürfte zur Genüge dargethan worden sein, daß diese mannigfache ur Bildung von Uebungsaufgaben und damit — wie eingangs behauptet wurde — einen recht Gegenstand für den Unterricht bietet.

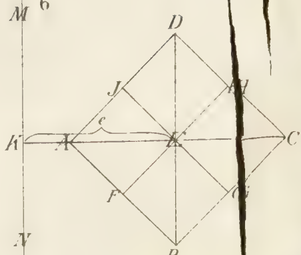
1


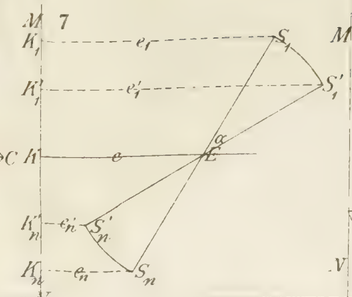
2


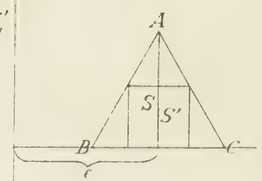
3


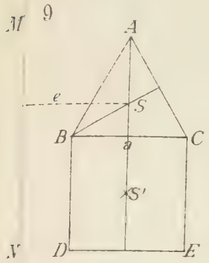
4


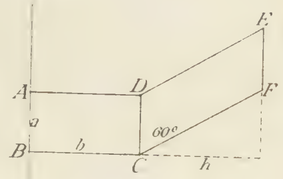
5


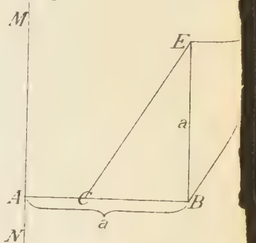
6


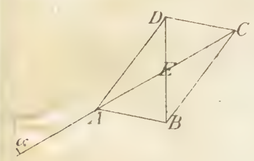
7


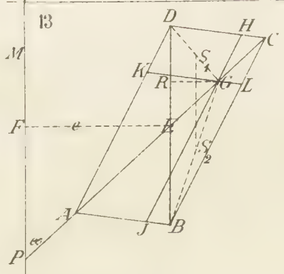
8


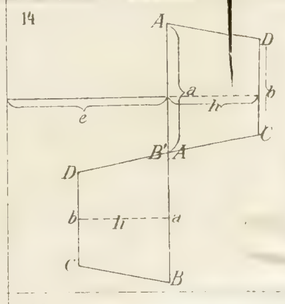
9


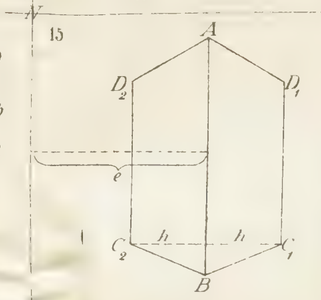
10


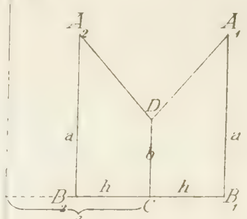
11


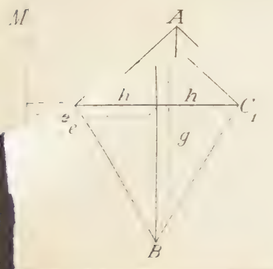
12


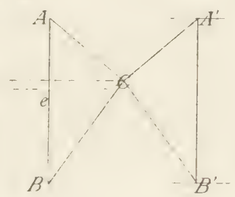
13


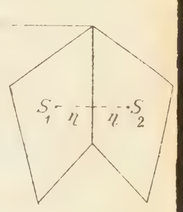
14


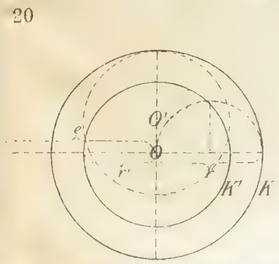
15


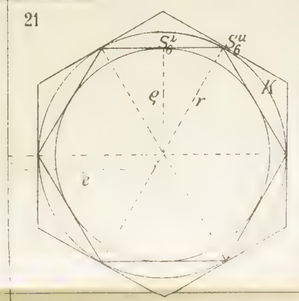
16


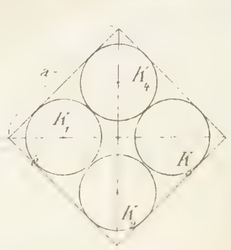
17


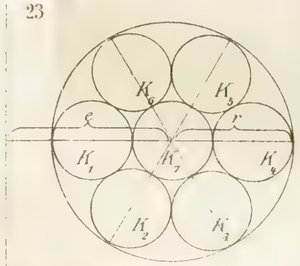
18


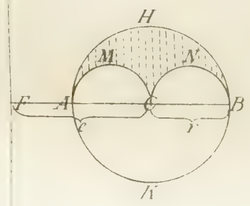
19


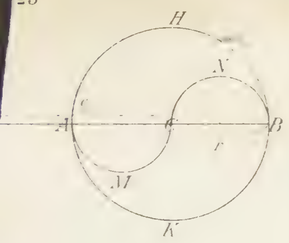
20


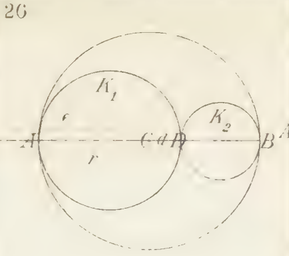
21


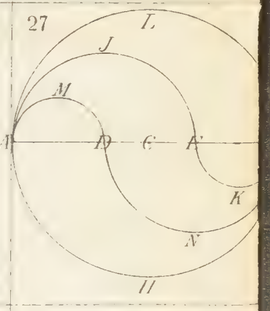
22


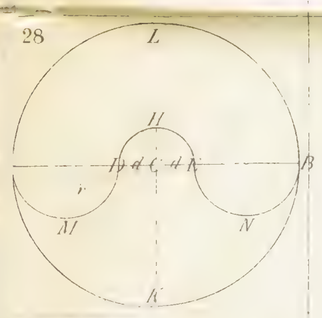
23


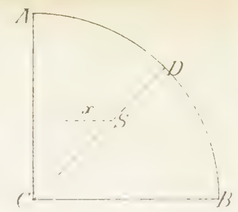
24


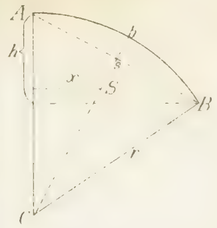
25


26


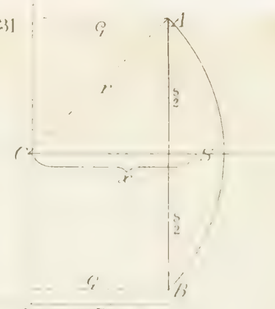
27


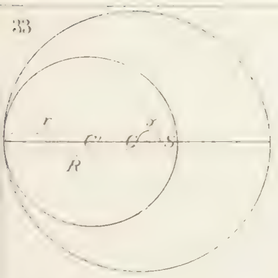
28


29


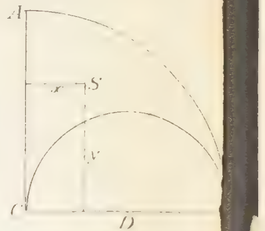
30


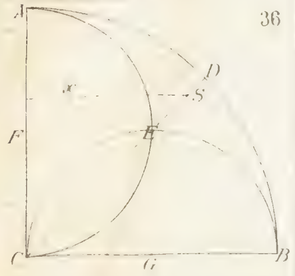
31

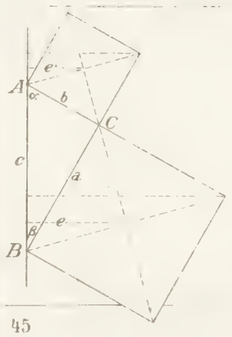
32


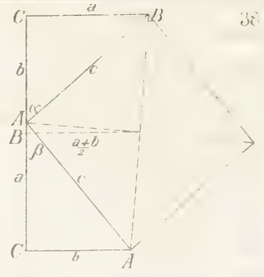
33


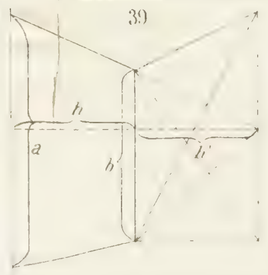
34

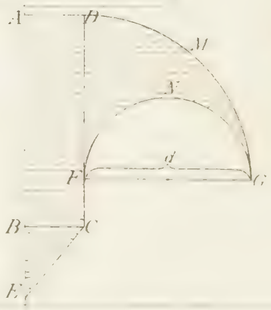
35


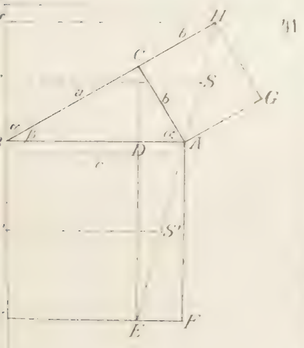
36


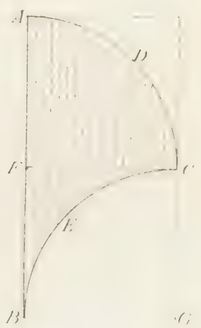
37


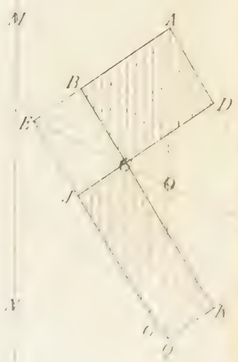
38


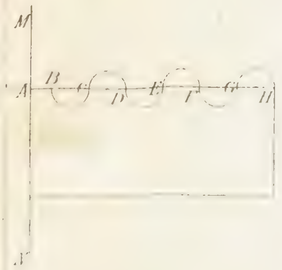
39


40


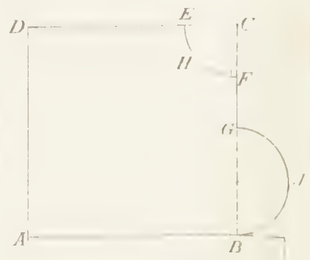
41


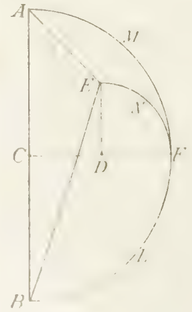
42


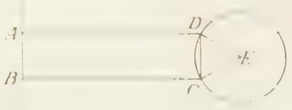
43


44


45

46


47


48


Schulnachrichten.

I. Lehrplan.

I. Sexta. Klassenlehrer Professor Dr. Erbe.

Religion 3 Std. Bibl. Geschichte des A. T. (mit Auswahl) bis zur Teilung des Reiches. uptstück wurde erklärt und nebst den durch den Lehrplan festgestellten Sprüchen und Kirchen- geprägt. Peipelmann.

Deutsch und **Geschichte** 4 Std. Grammatik: Redeteile und Glieder des einfachen Satzes. Unter- der starken und schwachen Flexion. Rechtschreibeübungen in wöchentlichen Diktaten in der Klasse. Gedichten und Prosastücken. Mündliches Nacherzählen. Auswendiglernen von Gedichten. er aus der vaterländischen Geschichte. Erbe.

Lateinisch 8 Std. Formenlehre mit Beschränkung auf das Regelmäßige nach Stegmanns Schul- und dem Übungsbuche von Holzweißig. Wöchentlich eine Klassenarbeit. Erbe.

Erdkunde 2 Std. Grundbegriffe der physischen und mathematischen Erdkunde in Anknüpfung chste Umgebung. Heimatkunde des Herzogtums Sachsen-Altenburg. Erste Anleitung zum Ver- es Reliefs, des Globus und der Karten. Bodenerhebungen und Wasserverhältnisse der Erdober- allgemeinen. Weise.

Rechnen 4 Std. Die Grundrechnungen mit ganzen Zahlen, unbenannten und benannten. Regel ganzen Zahlen. Die deutschen Maße, Gewichte und Münzen. Übungen in der dezimalen se und den einfachsten dezimalen Rechnungen. Klassenarbeiten. Schwepfinger.

Naturgeschichte 2 Std. Im S.: Beschreibung einzelner Pflanzen. Im W.: Beschreibung von n und Vögeln. Zarschler.

Schreiben 2 Std. Peipelmann.

II. Quinta. Klassenlehrer Dr. Fischer.

Religion 3 Std. Bibl. Gesch. des N. T. Erklärung und Einprägung des 2. und 3. Haupt- t den durch den Lehrplan vorgeschriebenen Kirchenliedern und Sprüchen. Wiederholung des aus VI. Peipelmann.

Deutsch und **Geschichte** 3 Std. Leseübungen aus Hopf und Paulsiek; sprachliche und sachliche des Gelesenen, Nacherzählungen; besonders Behandlung von Stoffen aus der sagenhaften Vor- er Griechen und Römer. Der einfache und der erweiterte Satz, das Notwendigste vom zusammen- tze. Interpunktionslehre. Lernen und Vortragen von Gedichten. Wöchentlich eine schriftliche erſten Halbjahre Diktate und Nacherzählungen in der Klasse, im zweiten neben diesen auch häus- ten. Fischer.

Lateinisch 8 Std. Wiederholung der regelmäßigen, Einübung des größten Teils der übrigen re. Wiederholung der in Sexta gelernten Vokabeln. Aus der Satzlehre das Wichtigste vom

Acc. m. d. Inf., von den Partizipialkonstruktionen; Konstruktion der Städtenamen. Übersetzu Holzweißigs Übungsbuche. Einprägen einiger Sprichwörter. Wöchentlich eine schriftliche Kla Fischer.

Erdkunde 2 Std. Physische und politische Erdkunde Deutschlands nach Daniels Leitfaden. Einführung in das Verständnis des Reliefs, des Globus und der Karten. Anfänge im Entwerfen fachen Kartenskizzen. Schwepfinger.

Rechnen 4 Std. Teilbarkeit der Zahlen. Gemeine Brüche, Addition und Subtraktion der brüche. Regel de tri mit Brüchen. Wiederholung der Maße, Gewichte und Münzen. Klasse Hüniger.

Naturgeschichte 2 Std. Im S.: Verwandte Arten von Blütenpflanzen. Im W.: Wirbeltiere. Schwepfinger.

Schreiben 2 Std. Peipelmann.

Zeichnen 2 Std. Zarschler.

III. Quarta. Oberlehrer Riehm.

Religion 2 Std. Einteilung der Bibel. Lesen, Erklären und Wiedergabe wichtiger des A. und N. T. Erklärt und gelernt wurden das 3. 4. 6. Hauptstück nebst einigen Sprü Kirchenliedern. Wiederholungen aus dem Lernstoff der VI. und V. Riehm.

Deutsch 3 Std. Lesen, Besprechen und mündliche Wiedergabe von Gedichten und Pr nach Hopf und Paulsieck. Vortrag gelernter Gedichte. Wiederholung des einfachen und erweiterte nahme des zusammengesetzten Satzes. Alle vierzehn Tage eine schriftliche Arbeit. Zwei Kl arbeitungen. Peipelmann.

Lateinisch 7 Std. Aus Holzweißigs Cornelius Nepos wurden gelesen: Miltiades, The Pelopidas, Epaminondas, Hamilkar, Hannibal. Nach- und Rückübersetzungen; Inhaltsüb Lernen von Phrasen. — In der Grammatik Wiederholung und Abschluß der Formenlehre; das W aus der Kasuslehre im Anschluß an Beispiele aus dem Gelesenen. Syntax des Verbums nach Übersetzungen ins Lateinische nach Holzweißigs Übungsbuche. Wöchentlich eine schriftliche Übers Lateinische; alle sechs Wochen dafür eine Übersetzung aus dem Lateinischen. Zwei Klassenausarbeitungen.

Französisch 4 Std. Erwerbung einer richtigen Aussprache in einem kurzen propä Kursus (Normalmerkwörter). Gelesen wurde eine Anzahl Gedichte und Lesestücke aus Kühns Lese im Anschluß hieran der grammatische Stoff eingeprägt. (Die 3 regelm. Konjugationen, avoir mit Ausschluß des Konjunktivs, Pluralbildung, Fürwörter, Grundzahlwörter, Steigerung und M Adjektiva.) Sprechübungen, Klassenarbeiten (Dictées, Übersetzungen ins Französische, Beantwortu zösischer Fragen, Nacherzählungen) alle 8—14 Tage; Auswendiglernen einiger Gedichte. Runge.

Geschichte 2 Std. Übersicht über die griechische und römische Geschichte. Einprägu Kanons der Jahreszahlen. Direktor.

Erdkunde 2 Std. Physische und politische Erdkunde von Europa außer Deutschla Daniels Leitfaden. Entwerfen von einfachen Kartenskizzen an der Wandtafel und in Heften. Schwe

Mathematik 4 Std. Rechnen 2 Std.: Rechnen mit Dezimalbrüchen. Einfache und zu gesetzte Regel de tri. Prozent-, Zins- und Verteilungsrechnung. Planimetrie 2 Std.: Lehre Geraden, Winkeln und Dreiecken; Beweise und einfache Konstruktionen. Klassenarbeiten. Schwe

Naturgeschichte 2 Std. Im S.: Verwandte Arten und Gattungen von Blütenpflanzen sicht über das natürliche Pflanzensystem. Im W.: Niedere Tiere mit besonderer Berücksichtig Insekten. Schwepfinger.

Zeichnen 2 St. Zarschler.

IV. Untertertia. Klassenlehrer Dr. Müller.

Religion 2 Std. Das Reich Gottes im A. T. Das Kirchenjahr, gottesdienstliche Einrichtungen, igsten Unterscheidungslehren. Einige Sprüche und Liedstrophen wurden erklärt und gelernt, der aus VI–IV teilweis wiederholt. Peipelmann.

Deutsch 2 Std. Durchnahme von Gedichten und Prosastücken aus Hopf und Paulsiek. Be- und Wiederholung wichtiger grammatischer Abschnitte im Anschluß an die Aufsätze und das Ge- Belehrung über poetische Formen. Deklamationen. Alle vier Wochen ein Aufsatz. Zwei Klassen- ungen. Fischer.

Lateinisch 7 Std. (4 St. Lektüre, 3 St. Grammatik). Gelesen wurde: Caes. de bell. Gall. 1 Einige Abschnitte wurden gelernt. Übersetzungen aus Ostermann-Müllers Übungsbuch. Wieder- und Ergänzung der Kasuslehre; das wichtigste der Tempus- und Moduslehre, Repetition der hre. Alle 8 Tage eine Übersetzung ins Lateinische im Anschlusse an Gelesenes (meist Klassen- lle 6 Wochen statt dessen eine schriftliche Übersetzung ins Deutsche. Drei Klassenausarbeitungen. Müller.

Griechisch 6 Std. Die regelmäßige Formenlehre des attischen Dialektes bis zum verbum liqui- chließlich nach Uhles Grammatik und nach dem Gange von Erbes griechischem Lesebuche. Aus dem wurden einzelne syntaktische Regeln abgeleitet und fast alle 14 Tage Klassenarbeiten angefertigt. letzten Wochen wurde mit dem Lesen von Xenophons Anab. begonnen. Müller.

Französisch 3 Std. Wiederholung des in IV Gelesenen und Gelernten. Durchnahme der wich- nregelmäßigen Verba nach Kühns kleiner französischer Grammatik. Sprechübungen und Klassen- alle 14 Tage wie in IV. Einige Gedichte wurden auswendig gelernt. Lesestücke (les quatre le mois de mai, le bassin de la Seine). Runge.

Geschichte und **Erdkunde** 3 Std. Kurzer Überblick über die weströmische Kaisergeschichte vom s Augustus an, dann deutsche Geschichte bis zum Ausgang des Mittelalters. Wiederholung nons wichtiger Jahreszahlen und Thatsachen aus der alten Geschichte. Behandlung Asiens, Afrikas, s und Australiens. Einfache Kartenskizzen. Kleine schriftliche Ausarbeitungen in der Klasse. Müller.

Mathematik 3 Std. Arithmetik: Einführung in die Rechnung mit Buchstaben und die vier hnungsarten mit denselben. Zerlegen in Faktoren, Vereinigen und Heben von Brüchen, Gleichungen rades mit einer Unbekannten. Geometrie: die Lehre vom Viereck, Vieleck und Kreis. Klassen- Hüniger.

Naturgeschichte 2 Std. Einige schwierige Pflanzenarten. Die wichtigsten ausländischen Nutz- Einiges aus der Anatomie und Physiologie der Pflanzen, sowie über Kryptogamen. Im letzten hre: Überblick über das Tierreich. Grundbegriffe der Tiergeographie. Schwepfinger.

ichnen 2 St. Zarschler.

V. Obertertia. Klassenlehrer Dr. Burger.

Religion 2 Std. Das Reich Gottes im N. T. Gelesen und erklärt Psalmen und Abschnitte Evv. (Bergpredigt, Gleichnisse). Katechismus, Sprüche, Lieder. Ein Lebensbild Luthers. Riehm.

Deutsch 2 Std. Erklärung von Gedichten und Prosastücken aus dem Lesebuche von Hopf und besonders von Balladen Schillers, der Glocke und Wilhelm Tell. Im Anschluß hieran einiges etik und Rhetorik. Übung im Vortrag auswendiggelernter Gedichte. Alle vier Wochen ein außerdem kleine Klassenausarbeitungen. Müller.

Lateinisch 7 Std. (4 Std. Lektüre, 3 Std. Grammatik). Gelesen wurde: Caes. bell. Gall. –7 mit Auswahl, Ovid. Metam. [Proömium, Dädalus und Ikarus, Philemon und Baucis, und Andromeda.] Bemerkenswerte Stellen wurden gelernt. Übersetzungen aus Ostermann-Müller. olung und Ergänzung der Tempus- und Moduslehre, Abschluß der Verbalsyntax in ihren Haupt- Alle 8 Tage eine Übersetzung ins Lateinische im Anschluß an Gelesenes und alle 6 Wochen ne schriftliche Übersetzung ins Deutsche. Kleine Klassenarbeiten über den Inhalt. Burger.

Griechisch 6 Std. [im S. 3 St. Lektüre, 3 St. Grammatik, im W. 4 St. Lektüre, 2 St. G
Die Verba auf μι und die wichtigsten unregelmäßigen Verba. Wiederholung und Ergänzung d
aufgabe der IIIb. Einprägung der Präpositionen. Hauptregeln der Syntax. Häusliche Übu
Übersetzen ins Griechische. Gelesen wurde Xen. Anab. I, 2—8 und 10 und II. Alle 14 T
Klassenarbeit; kleine Aufsätze über den Inhalt des Gelesenen. Burger.

Französisch 3 Std. Gelesen wurde Ricken, Le Tour de la France en cinq mois. Gra
Unregelmäßige Verba und das Wichtigste der Syntax des Verbums, Artikels und Substantivums.
arbeiten und Sprechübungen in Anlehnung an die Lektüre. Kleine Klassenarbeiten über den In
Gelesenen. Erbe.

Geschichte und **Erdkunde** 3 Std. Deutsche Geschichte vom Ausgang des Mittelalters
Regierungsantritt Friedrichs des Großen. Wiederholungen aus den früheren Abschnitten der
Geschichte und eines Kanons wichtiger Jahreszahlen und Thatsachen aus der alten Geschichte. —
holung der physischen und politischen Erdkunde Deutschlands, eingehendere Behandlung der deutschen
Kartenskizzen. Einige schriftliche Ausarbeitungen. Müller.

Mathematik 3 Std. Arithmetik: Potenzen mit positiven ganzzahligen Exponenten. Gle
ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten, Quadratwurzelausziehen, Proportionen. Pla
Flächengleichheit; Verwandlung, Teilung und Ausmessung geradliniger Figuren; Berechnung des
Ähnlichkeit der Dreiecke. 12 Klassenarbeiten. Fleck.

Naturgeschichte 2 Std. Im S.: Der Mensch und dessen Organe nebst Unterweisung
Gesundheitslehre. Im W.: Einführung in die Physik: Mechanische Erscheinungen an festen,
und luftförmigen Körpern und das Wichtigste aus der Wärmelehre. Zwei Klassenarbeiten. Flec

Zeichnen 2 St. Zarschler.

VI. Untersekunda. Klassenlehrer Professor Dr. Schirmer.

Religion 2 Std. Erklärung des Matthäus. Abschnitte aus anderen Evv. Eingehend
sprechung des Katechismus. Lektüre alttestamentlicher Stellen. Sprüche, Lieder, Psalmen. Riehr

Deutsch 3 Std. In der Klasse wurde gelesen: Die Jungfrau von Orleans, Minna von
helm, Hermann und Dorothea; zu Hause wurde gelesen und in der Klasse eingehend besprochen:
Michael Kohlhaas. Immermann, Oberhof. Goethe, Die Campagne in Frankreich (in den S
gaben von Velhagen & Klasing) und patriotische Prosa aus den J. 1806—1815, ersch. bei Velhagen &
Lernen bedeutsamer Stellen, Vorträge, Dispositionsübungen, kleine Klassenaufsätze. Alle 4 Woch
häusliche Arbeit. Burger.

Lateinisch 7 Std. Gelesen wurde: Ciceros Rede pro lege Manilia (außer §§ 51—68
schnitte aus Ovids Metamorphosen, Vergils Äneide II und Livius XXI, mit Auswahl. Übungen
vorbereiteten Übersetzen und im Rückübersetzen. Auswendiglernen wichtiger dichterischer Stellen, drei
ausarbeitungen über das Gelesene. 4 Std. — Wiederholung und Ergänzung der Tempus-, Mod
Kasuslehre. Alle 8 Tage eine Übersetzung ins Lateinische im Anschluß an Gelesenes als Klassenarb
als häusliche Aufgabe; alle sechs Wochen eine schriftliche Übersetzung ins Deutsche. 3 St. Schi

Griechisch 6 Std. Gelesen wurde: Xenophons Anabasis II, 5 und III, IV mit Au
Homers Odyssee IX und X. Übungen im unvorbereiteten Übersetzen und im Rückübersetzen. Aus
lernen geeigneter Homerstellen, drei Klassenausarbeitungen über das Gelesene. 4 Std. — Wiederholu
Formenlehre, Durchnahme der Lehre von dem Artikel, dem Pronomen, dem Kasus und des Wic
aus der Tempus- und Moduslehre. Alle 14 Tage eine Klassenübersetzung ins Griechische, meist im A
an Gelesenes. Schirmer.

Französisch 3 Std. Gelesen: Lectures historiques (Rengersche Ausgabe) mit Auswahl.
matik nach Kühn: Rektion, Tempus- und Moduslehre, Part. präs. und perf., Gerundium, Artik

v, Teilartikel, Wort- und Frageſtellung. Fürwörter. Alle 14 Tage ein Extemporale. Sprechübungen. usarbeitungen. Wiederholung des grammatiſchen Penſums der IV, IIIb und IIIa. Runge.

Geſchichte und **Erdkunde** 3 Std. Deutſche und preußiſche Geſchichte vom Regierungsantritte s des Großen bis zur Gegenwart. Wiederholung der Erdkunde Europas. Elementare mathematiſche . Kleine Klaſſenarbeiten. Wiederholung der wichtigſten Zahlen aus der römiſchen und griechiſchen e. Burger.

Mathematik 4 Std. Arithmetik: Wurzeln, Potenzen mit negativen und gebrochenen Exponenten, nen, Gleichungen erſten Grades mit mehreren Unbekannten und quadratiſche Gleichungen mit einer nten. Geometrie: Dreieckskonſtruktionen, Wiederholung der Ähnlichkeitslehre. Trigonometrie: nen der trigonometriſchen Funktionen am rechtwinkeligen Dreiecke, Berechnung rechtwinkeliger und nkeliger Dreiecke und regulärer Polygone. Stereometrie: Prisma, Zylinder, Pyramide und Kegel rechnungen von Kantenlängen, Oberflächen und Inhalten. Klaſſenarbeiten. Hüniger.

Phyſik 2 Std. Im S.: Die wichtigſten chemiſchen Erſcheinungen und Beſprechung einiger Mine- Im W.: Magnetismus, Elektrizität, Akuſtik und einige Abſchnitte aus der Optik. Hüniger.

VII. **Oberſekunda.** Klaſſenlehrer Profeſſor Dr. **Weiſe.**

Religion 2 Std. Erklärung der Apoſtelgeſchichte. Im Anſchluß daran Kirchengeſchichte. Ab- us Briefen des N. T. Wiederholungen. Riehm.

Deutſch 3 Std. In der Klaſſe wurden behandelt das Nibelungenlied mit Proben aus dem Urtext gewählte Lieder Walthers von der Vogelweide im Urtext (hierbei ſprachgeſchichtliche Belehrungen, e über die altdeutſche Litteratur und Ausblicke auf die germaniſchen Sagen), ferner Götz von Ber- und Wallenſtein; zu Hauſe geleſen und in der Klaſſe beſprochen wurden Gudrun und Uhlands Ernſt aben. Wichtige Stellen wurden gelernt. Aufſätze und Vorträge mit Dispoſitionsübungen. Schirmer.

Lateiniſch 7 Std. Ciceros Rede pro rege Deiotaro, Livius B. XXII. mit Auswahl, Salluſts Jugurthinum c. 1—34; Vergils Äneide I und VI, Teile von III und IX; Klaſſenausarbeitungen, im unvorbereiteten Überſetzen. Auswendiglernen bedeutſamer Stellen. 5 Std. Stiliſtik, Wieder- aus der Grammatik, alle 6 Wochen vier ſchriftliche Arbeiten, teils Überſetzungen aus dem ins Lateiniſche, teils Übertragungen lateiniſcher Proſaſtücke. 2 St. Weiſe.

Griechiſch 6 Std. Xenophons Hellenika B. I und II mit Auswahl. Stück aus Herodot B. VII, Odyſſee B. I, 1—95. V—VII; ausgewählte Abſchnitte aus VIII, XIII—XXIII. Klaſſenaus- gen. 5 Std. Abſchluß der Syntax durch Einübung des Infinitivs und Partizips, Wiederholungen eren Gebieten der Grammatik. Alle 4 Wochen eine ſchriftliche Überſetzung aus dem Griechiſchen ſche. 1 St. Weiſe.

Franzöſiſch 2 Std. Geleſen: Jeanne Darc von Joſeph Fabre, herausgegeben von Bretſchneider. atiſche Wiederholungen, Sprechübungen, Retroverſionen. Übungen im unvorbereiteten Überſetzen. Wochen eine Verſion. Kleine Ausarbeitungen. Wiederholungen von Vokabeln jede Stunde. Runge.

Hebräiſch 2 St. Elementar- und Formenlehre. Überſetzung hebräiſcher und deutſcher Übungs- Hüniger.

Engliſch 2 Std. Einübung der Ausſprache nach Dubislav u. Boek, Elementarbuch der engliſchen Ausgabe B. Geleſen und durchgenommen Abſchnitt 1, 2, 5, 6, 7, 11, 14, 16. Sprechübungen, Überſetzungen. Runge.

Geſchichte und **Erdkunde** 3 Std. Griechiſche und römiſche Geſchichte. Wiederholung der e von Südeuropa, Vorderaſien und Nordafrika. Zwei kleine Klaſſenausarbeitungen. Schirmer.

Mathematik 4 Std. Arithmetik: Die Lehre von den Potenzen, Wurzeln und Logarithmen. iſche Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten, Exponentialgleichungen. Arithmetiſche

und geometrische Reihen. Geometrie: Abschluß der Ähnlichkeitslehre, goldener Schnitt, harmonische und harmonische Strahlen. Berechnung der regulären Polygone und des Kreises. Ebene Trigo und deren Anwendung. 12 Klassenarbeiten. Fleck.

Physik 2 St. Wärmelehre, Magnetismus und Elektrizität. Zwei Klassenarbeiten. Fl

VIII. Unterprima. Klassenlehrer Professor Mackrodt.

Religion 2 Std. Kirchengeschichte bis zur Gegenwart. Abschnitte aus den Briefen des N. T.

Deutsch 3 Std. Übersicht über die Litteratur des 16.—19. Jahrhunderts im Anschluß Leitfaden von Böttticher und Kinzel. Proben aus Luther, Hans Sachs, Fischart; Oden Klopstocks, Laokoon, Schillers Braut von Messina, Goethes und Schillers Gedankenlyrik. Zu Hause gelesen der Klasse besprochen wurden: Leisewitz, Julius von Tarent, Macbeth in der Schillerschen Bea Abschnitte aus Schillers Geschichte des Abfalls der Niederlande, Maria Stuart, König Ödipus in Übersetzung. Vorträge. 8 Aufsätze. Weise.

Lateinisch 7 Std. Tacitus Annalen I, 49, 2. Abschnitt, 50—71, II, 5—26, 44—46, 62— Cicero pro Murena. Briefe aus dem 4. und 5. Buche von Hofmann-Andresen. Alle 14 Tage ein liche Übersetzung ins Lateinische, alle 6 Wochen eine solche ins Deutsche. Grammatische und Wiederholungen. 5 Std. Mackrodt. Horaz: Einige Stellen aus den Satiren und Episteln Epoden, Oden des I. und II. Buchs. Auswendiglernen. 2 Std. Direktor.

Griechisch 6 Std. Platos Apologie des Sokrates und Kriton. Homers Ilias 1—7, 312 wahl. Sophokles Aias. Stellen der Ilias und des Aias wurden gelernt. Grammatische Wiederh und Ergänzungen. Schriftliche Übersetzungen aus dem Griechischen alle 4 Wochen. Mackrodt.

Französisch 2 Std. Gelesen: Rousset, La Guerre 1870—71 (Gärtner), und einige Gedi Poésies françaises, herausgegeben von J. Sarrazin. (Auswendig gelernt wurde: Les Souvenirs du Grammatische Wiederholungen, Phraseologisches, Synonymisches, Metrik im Anschluß an die Sprechübungen. Monatlich eine Version, jedes Halbjahr ein Dictée. Kleine Ausarbeitungen. R

Hebräisch 2 Std. Vgl. Oberprima.

Englisch 2 Std. Gelesen aus Dubislav u. Boek Elementarbuch: Anhang S. 162—176 Gedichte. Grammatisches im Anschluß an die Lektüre. Sprechübungen u. s. w. wie in IIa. Ru

Geschichte und **Erdkunde** 3 Std. Geschichte vom Untergange des weströmischen Rei zum dreißigjährigen Kriege. Geschichtliche und geographische Wiederholungen. Zwei Klassena tungen. Fischer.

Mathematik 4 Std. Arithmetik: Die imaginären Zahlen. Quadratische Gleichun mehreren Unbekannten; höhere Gleichungen mit einer Unbekannten, welche sich auf quadratische führen lassen. Wiederholung der arithmetischen und geometrischen Reihen; Zinseszins- und Rentenr Stereometrie: Die geraden Linien und Ebenen in ihren Beziehungen zu einander, die Sätze über liche Ecken, Berechnung der Oberflächen und Inhalte von Körpern. Trigonometrie: Wiederhol Goniometrie, Berechnung von Dreiecken und Vierecken. Klassenarbeiten. Hüniger.

Physik 2 Std. Mechanik und Akustik. Schwepfinger.

IX. Oberprima. Klassenlehrer der Direktor.

Religion 2 Std. Glaubens- und Sittenlehre im Anschluß an die Augustana. D sprechung wichtiger Stellen aus dem Römerbrief und Johannisevangelium. Riehm.

Deutsch 3 Std. Lebensbilder Schillers und Goethes. Schillers Demetrius und Maria Shakespeares Julius Cäsar. Uhland, Chamisso, Lenau, Eichendorff, Goethes Iphigenie. Priv von Goethes Dichtung und Wahrheit. Schillers Aufsatz über das Pathetische. Vorträge. Aufsätz positionsübungen. Auswendiglernen von Schillerschen und Goethischen Gedichten und wichtigen St Iphigenie.. Erbe.

Lateinisch 7 Std. Cicero: Lälius; Tacitus: Germania 1—27, Annalen I, Anfang; Horaz: Oden nd 4. Buchs, einige Satiren und Episteln; Auswendiglernen; Gesamtrepetition im Horaz. eitetes Übersetzen. Alle 14 Tage schriftliche Übersetzungen ins Lateinische, alle 6 Wochen schriftliche gen ins Deutsche. Grammatische und stilistische Wiederholungen. Klassenausarbeitungen. Direktor.

Griechisch 6 Std. Homers Ilias 7—22 mit Auswahl. Sophokles Antigone. Thucydides II mit Auswahl (Überfall, Belagerung und Einnahme von Platäa). Stellen der Ilias und der wurden gelernt. Grammatische Wiederholungen. Schriftliche Übersetzungen aus dem Griechischen ochen. Mackrodt.

Französisch 2 St. Gelesen wurde im S.: Barrau, Scènes de la Révolution Française (Renger) 2; im W.: Molière, les Femmes Savantes (Renger). Sprechübungen u. s. w. wie in Ib. Runge.

Hebräisch 2 St. Wiederholung der Formenlehre. Syntax bei der Lektüre. Extemporalien. . 4. 6. 9. 11—15. 17. 21. 1. Sam. 19. 2. Sam. 9. 15. 2. Kön. 3. Riehm.

Englisch 2 St. Mit Ib zusammen. Runge.

Geschichte und **Erdkunde** 3 St. Geschichte der Neuzeit vom dreißigjährigen Kriege bis zur t. Geschichtliche und geographische Wiederholungen. Zwei Klassenausarbeitungen. Fischer.

Mathematik 4 St. Arithmetik: Schwerere Aufgaben aus der Zinseszins- und Rentenrechnung, che Reihen höherer Ordnungen, Kombinatorik und binomischer Lehrsatz. Geometrie: Abschluß ometrie, einige Formeln aus der sphärischen Trigonometrie und analytische Geometrie. Zwölf beiten. Fleck.

Physik 2 St. Optik und mathematische Erdkunde. Zwei Klassenarbeiten. Fleck.

Turnunterricht hatten alle Schüler in 5 Abteilungen je 3 St. bei Zarschler, der auch die gsspiele leitete; **Zeichenunterricht** von IIb—Ia nach freier Wahl bei demselben; **Gesang-ht** in VI und V je 2, in IV—Ia im ganzen 3 St. bei Peipelmann.

Verteilung des Unterrichts im Schuljahre 1898—99.

Lehrer	Hauptlehrer d. Kl.	Stundenzahl	Ia	Ib	IIa	IIb	IIIa	IIIb	IV	V
1. **Direktor**	Ia	11	7 Lat.	2 Lat.					2 Gesch.	
2. Oberlehrer Prof. Dr. **Fleck**		17	4 Math. 2 Phys.		4 Math. 2 Phys.		3 Math. 2 Phys.			
3. Oberlehrer Prof. **Mackrodt**	Ib	17	6 Grch.	5 Lat. 6 Grch.						
4. Oberlehrer Prof. Dr. **Weise**	IIa	18		3 Dtsch.	7 Lat. 6 Grch.					
5. Oberlehrer Prof. Dr. **Schirmer**	IIb	19			3 Dtsch. 3 Gesch. u. Erdk.	7 Lat. 6 Grch.				
6. Oberlehrer Prof. Dr. **Erbe**	VI	18	3 Dtsch.				3 Franz.			
7. Oberlehrer Dr. **Burger**	IIIa	19				3 Dtsch. 3 Gesch. u. Erdk.	7 Lat. 6 Grch.			
8. Oberlehrer Dr. **Fischer**	V	19	3 Gesch. u. Erdk.	3 Gesch. u. Erdk.				2 Dtsch.		8 Lat. 3 Dtsch.
9. Oberlehrer **Hüniger**		19		4 Math.	2 Hebr.	4 Math. 2 Phys.		3 Math.		4 Rechn.
10. Oberlehrer **Runge**		20	2 Franz. 2 Englisch	2 Franz.	2 Franz. 2 Engl.	3 Franz.		3 Franz.	4 Franz.	
11. Oberlehrer **Schwepfinger**		20		2 Phys.				2 Nat.-Gesch.	4 Math. 2 Nat.-Gesch. 2 Erdk.	2 Nat.-Gesch. 2 Erdk.
12. Oberlehrer Dr. **Müller**	IIIb	21					2 Dtsch. 3 Gesch. u. Erdk.	7 Lat. 6 Grch. 3 Gesch. u. Erdk.		
13. Oberlehrer **Riehm.**	IV	21	2 Rel. 2 Hebräisch	2 Rel.	2 Rel.	2 Rel.	2 Rel.		7 Lat. 2 Rel.	
14. Lehrer **Peipelmann**		22	3	S	i	n	g	e 2 Rel.	n 3 Dtsch.	3 Rel. 2 Schreib. 2 Sing.
15. Lehrer **Zarschler**		25	3 Tur- 2	nen Z	3 Tur- ei	nen ch	3 Tur- nen	nen 2 Zeichn.	3 Tur- 2 Zeichn.	nen 2 Zeichn.

II. Lehrmittel.

A. Lehrerbibliothek (Schirmer).

Geschenkt: Von Seiner Hoheit dem Herzog: Luthers Werke (Weimar, Böhlau) Bd. 20; von berpostdirektor Walter: Das Post- und Telegraphenwesen Sachsens 1873—97; von Frau Amts- Hilty, Glück, 2 Bde.; von Herrn Buchbinder Pfau: Leipziger Illustrierte Zeitung, Bd. 99—101; n Oberlehrer Hüniger: Bildliche Darstellung der renovierten Wittenberger Schloßkirche; von Herrn er Runge: Zeller, Histoire d'Allemagne, 7 Bde. und Sauer, Italienische Konversationsgram- om Herrn Verleger Dittmar-Ubicht, Geschichte der Welt vor Christus; von Herrn Kaufmann : Wissenschaftl. Beilage der Leipziger Zeitung, Jahrg. 1898.

Angekauft: Zeller, Biblisches Handwörterbuch; Uhlhorn, Kämpfe und Siege des Christen- rs., Leben Jesu; Kinzler, Die biblischen Altertümer; Wiedemann, Geschichte von Altägypten; , Geschichte Babyloniens und Assyriens; Sohm, Kirchengeschichte; Heidrich, Kirchengeschichte; -Schrader-Eiselen, Drei Vorträge; Hauschild-Seffer, Elementarbuch der hebräischen Sprache, l.; Kautzsch, Hebräische Grammatik und Übungsbuch; Thukydides, hrsg. von Poppo, id 4; Merguet, Lexikon zu den philosophischen Schriften Ciceros, 3 Bde.; Bernhard, Schrift- ur antiken Kunstgeschichte; Luckenbach, Abbildungen zur alten Geschichte; Furtwängler-Urlichs, er griechischer und römischer Skulptur (Handausgabe); Luchs, Kulturhistorische Wandtafeln, 10 Bl.; n, Geographische Charakterbilder, 13 Bl.; Bildliche Darstellung des Alexandersarkophags aus Delorme, Cäsar; Richter, Annalen, Bd. III, 2; Bismarck, Gedanken und Erinnerungen, Köppen, Die Hohenzollern und das Reich, 4 Bde.; Volger, Herzog Ernst von Sachs.-Altenburg; Deutsche Volkskunde; Kirchhoff-Fitzner, Bibliothek der Länderkunde, Bd. 1.; Scobel, Land e, Bd. 1.: Thüringen; Wandkarte von Amerika; Wandtafel deutscher Kriegsschiffe; Neudeck- r, Das kleine Buch von der Marine; Börner, Lehrbuch der Physik; Marshall, Zoologie der id der Fische pp., 2 Bde.; Meyer, Goethe; Seiler, Allerlei Fahrten; Bojanowski, Sophie, zogin von Sachsen; Lyon, Die deutsche Lektüre; Wunderlich, Deutsche Musterstücke; Doren- räparationen zur Behandlung deutscher Musterstücke; Kägi, Griechisches Übungsbuch, 2 Tle.; r, Griechisches Elementarbuch, 2 Tle.; Körting, Lateinisch-romanisches Wörterbuch; Thiers, on de Bonaparte en Egypte, 12 Exempl.; Lanfrey, Campagne de 1806—1807, 2 Exempl.; aphie der Zeitschriften-Litteratur, 2 Bde.; Otte-Bergner, Archäologischer Katechismus; Zettler, rnen mit der Keule; Schnell, Volkstümliche Turnübungen.

Fortgesetzt: Grimm, Deutsches Wörterbuch; Goethes Werke (Weimar, Böhlau); Schriften thegesellschaft und Goethejahrbuch; Meyer, Konversationslexikon; Kohl, Bismarckjahrbuch; , Einfluß der Seemacht auf die Geschichte; Müller, Handbuch des klassischen Altertums; Rethwisch, erichte über das höhere Schulwesen; Statistisches Jahrbuch der höheren Schulen; Verhandlungen der nversammlungen in Preußen; Fries-Meier, Lehrproben und Lehrgänge; Bruckmann, Klassischer enschatz; Naumann, Naturgeschichte der Vögel; Schriften des Vereins für Reformationsgeschichte.

Zeitschriften: Centralblatt für die gesamte Unterrichtsverwaltung in Preußen; Jahrbücher für ie und Pädagogik; Zeitschrift für das Gymnasialwesen; Berliner Philologische Wochenschrift; Zeit- ir evangelischen Religionsunterricht; Hoffmanns Zeitschrift für mathematischen und naturwissen- en Unterricht; Potoniés Naturwissenschaftliche Wochenschrift; Lyons Zeitschrift für den deutschen t; Zeitschrift für französische Sprache und Litteratur; Monatshefte der Comeniusgesellschaft der geographischen Gesellschaft für Thüringen zu Jena; Das litterarische Echo; Archäologischer ; Zeitschrift für Turnen und Jugendspiel; Deutsche Turnzeitung; Pädagogischer Centralanzeiger deutsche Reich; Hochschulnachrichten; Das humanistische Gymnasium; Altenburger Amts- und tsblatt; Eisenberger Nachrichtsblatt.

B. Schülerbibliothek (Schirmer).

Angekauft: Deutsche Jugendblätter, Jahrgang 1898; Illustrierter Kinderfreund in Hirschberg, Ein deutscher Seeoffizier; Warnecke, Kunstgeschichtliches Bilderbuch mit Text, 3 Augsburgische Konfession, 14 Exempl.; Freytag, Aus dem Staat Friedrichs des Großen Journalisten; Köhler, Nützliche und schädliche Vogelarten, 2 Bde.; Fauth, Dr. Martin Luthe Maspero, Ägypten und Assyrien; Klee, Hausmärchen aus Altgriechenland; Neudeck-Schrö kleine Buch von der Marine, 2 Exempl.; Tanera, Des Kronprinzen Kadett; Amyntor, G minne, 2 Bde.; Öhler, Bilderatlas zu Cäsar, 2 Exempl. und Klassisches Bilderbuch; Köp Hohenzollern und das Reich, 4 Bde.; Lohmeyer, Vaterländische Jugendbücherei, Bd. 1—5; Kirchbergs Geschick.

C. Physikalisches und naturhistorisches Kabinett (Fleck).

Angekauft: a) Eine Glasschale mit Kugeln gleichen Durchmessers, aber verschiedener ein Glasgefäß für Quecksilber und gefärbtes Wasser; ein Modell eines Entwässerungs- und apparats; Savarts gezahnte Räder (einen Akkord gebend); ein Glasballon (zum Teil mit Glyce lösung gefüllt (zur Darstellung der Newtonschen Farbenringe; ein Apparat, um durch Reibung ei keit zum Sieden zu bringen; Batavische Glasthränen und Bologneser Fläschchen; ein Apparat z weis der Druckzunahme nach unten; ein Apparat zur Erläuterung des archimedischen Prinzips; e aus Goldschlägerhaut; Bourdons Röhre; eine Zauberkanne: eine Gummischeibe zum Auflege Teller der Luftpumpe; eine Glaskugel für Wägung der Luft; ein Ballon aus Kautschuk, um dehnung der eingeschlossenen Luft unter dem Rezipienten zu zeigen; ein Luftreaktionsrad aus Gla beim Evakuieren in Bewegung kommt; ein Gasometer; b) ein Situspräparat von Helix pom Injektionspräparat von Mus rattus; ein Amphioxus lanceolatus; ein Anthedon rosacea; mik Präparate von Foraminiferen aus großen Tiefen und Vorticellinen der Adria.

Geschenkt: Vom Herrn Hofgärtner Schröder das Gehörn eines Widders, vom Unters Reinecke eine Schere.

D. Musikalien (Peipelmann).

Abt, Siegesgesang der Deutschen, Part. und 20 St. Podbertski, Friedrich Rotb und 24 St. Machts, Kaiserlied, Part. und 20 St. Mangold, Fürs Vaterland, Part. u Attenhofer, Friedr. Rotbart, Part. und 20 St. Zureich, Gruß an den Kaiser, Part. Sc Lose Blätter für gemischten Chor Nr. 8. 11. 16. 21. 25 je 20 Exemplare. Schondorf, Neu Kaiserhymne 20 Exemplare. Schondorf, Kaiser Wilhelm, 20 Exemplare.

E. Zeichenunterricht (Barschler).

Angekauft: Wandtafeln für das Freihandzeichnen und einige Aquarell- und Gipsvorl

---

III. Schulbesuch.

A. Veränderungen bei der Wende des Schuljahrs.

Die Schülerzahl betrug beim Schlusse der vorigen Schulnachrichten 160. Von diesen g Ende des Schuljahrs ab aus

Ia: die Seite 15 der Schulnachrichten von 1898 aufgeführten 13 Abiturienten des Osterte

IIa: 14. Franz Thometzek;

IIb: 15. Otto Petzsche, 16. Werner Kindler, 17. Kurt Pfau, 18. Franklin Clauder:

IIIa: 19. Paul Kunert, 20. Arthur Büttner;

IV: 21. Kurt Penner, 22. Karl Patzschke;
VI: 23. Willy Knobloch.

Demnach verblieben 137 Schüler. Zu diesen wurden Ostern 32 und im Laufe des Schuljahrs 6, zen 38 Schüler, aufgenommen, so daß die Schule von 175 Schülern besucht wurde, die sich über die Klassen folgendermaßen verteilten:

B. Schülerverzeichnis.

bezeichnet die neu Aufgenommenen, † die vor Schluß der Schulnachrichten Abgegangenen, der Ort neben dem Namen den Heimatsort.)

Oberprima (14.)

enrich Carl aus Haynsburg
Georg Patzschke „ Osterfeld
ritz Geyer „ Eisenberg
ul Specht „ Jena
nz Lange „ Kahla
ul Dorstewitz „ Eisenberg
lly Scheller „ Klosterlausnitz
olf Theune „ Bennstedt
nst Meier „ Weimar
ert Knauth „ Orlamünde
rhard Werther „ Halle
ert Seiffarth „ Mannichswalde
ranz Pape „ Triebes
ohannes Jessen „ Schkölen

Unterprima (9).

ich Hollack aus Eisenberg
tz Schlemmer „ Lissen-Osterfeld
fred Kornmann „ Ahlendorf
rl Gorbauch „ Rositz
ul Götz „ Eisenberg
dolf Senf „ Ronneburg
rl Sonnekalb „ Camburg
rt Katzer „ Leipzig
ichard Feller „ Kösen

Obersekunda (16).

illy Zeutzschel aus Eisenberg
alther Sperrhake „ Eisenberg
rl Kaufmann „ Prießnitz
ohannes Albert „ Grimma
iedrich Klette „ Dresden
rich Moser „ Camburg
Willy Stöbe „ Teicha
arl Krieg „ Pratschütz
urt v. Funke „ Kieritzsch
Johannes Röhrborn „ Weißenfels
anz Veit „ Thierschneck
35. *Wilhelm Kästner „ Bockwa
36. *Hartwich Schwarzkopf „ Weißenfels
37. †Max Hacke „ Leipzig
38. †Gottfried Theune „ Bennstedt
39. *†Winus Werner „ Burkersdorf

Untersekunda (21).

40. Walther Herfurth aus Orlamünde
41. Erich Günther „ Tröbnitz
42. Kurt Degen „ Kahla
43. Georg Böhme „ Lucka
44. Friedrich Patzschke „ Osterfeld
45. Rudolf Reinecke „ Eisenberg
46. Max Hoffmann „ Camburg
47. Albin Just „ Törpla
48. Emanuel Heltzel „ Heluan (Ägypten)
49. Walther Erbe „ Eisenberg
50. Otto Steps „ Eisenberg
51. Johannes Starke „ Klosterlausnitz
52. Georg Peipelmann „ Eisenberg
53. Joachim Peltz „ Ramsdorf
54. Johannes Planer „ Eisenberg
55. Ernst Faltin „ Eisenberg
56. Karl Wagner „ Kahla
57. Otto Krause „ Hummelshain
58. *Ludwig Weber „ Rudolstadt
59. *Martin Reinicke „ Halle
60. †Walther Köhler „ Meusebach

Obertertia (28).

61. Hermann Remmler aus Droyßig
62. Ludwig Pabst „ Weisenmühle
63. Walther Steindorff „ Eisenberg
64. Johannes Pfau „ Eisenberg
65. Eduard Büchel „ Eisenberg
66. Otto Runge „ Eisenberg
67. Heino Thümmel „ Grabsdorf
68. Arthur Fischer „ Roda

69. Max Schmidt aus Prießnitz
70. Kurt Weise „ Grabsdorf
71. Max Fröhlich „ Eisenberg
72. Erich Crienitz „ Wünschendorf
73. Gotthold Vogel „ Wilsdruff
74. Georg Jasper „ Eisenberg
75. Paul Müller „ Großgörschen
76. Max Fleck „ Eisenberg
77. Willy Schöppe „ Eisenberg
78. Willy Heltzel „ Heluan (Ägypten)
79. Alfred Kluge „ Kleingestewitz
80. Martin Theune „ Bennstedt
81. Hermann Bahrs „ Großgörschen
82. Walther Körbitz „ Eisenberg
83. *Karl Simroth „ Großosterhausen
84. Emil Bliedtner „ Eisenberg
85. Rudolf Enke „ Leipzig
86. *Wilhelm Kühnemann „ Berlin
87. *Wilhelm Lehmann „ Strauch
88. *Max Schulze „ Bürgel

Unterertia (25).

89. Richard Schubert aus Eisenberg
90. Ernst Lindig „ Kleinpürschütz
91. Kurt Meyer „ Klosterlausnitz
92. Ernst Dannhäuser „ Bremsnitz
93. *Arno Karl „ Roda
94. Johannes Etzold „ Groitzsch
95. Fritz Hertwig „ Breitingen
96. Fritz Kipping „ Roda
97. Johannes Müller „ Petersberg
98. *Ernst Kirmse „ Ronneburg
99. Paul Habe „ Drackendorf
100. Oskar Geißler „ Nischwitz
101. *Otto Müller „ Bremsnitz
102. *Albrecht Gorbauch „ Rositz
103. Hermann Scheibe „ Eisenberg
104. Heinrich Jasper „ Eisenberg
105. *Walther Freyburg „ Camburg
106. *Bernhard Heim „ Camburg
107. Fritz Huzelmann „ Eisenberg
108. Kurt Philipp „ Großküssow
109. Oswin Reiche „ Thiemendorf
110. Paul Hoffmann „ Schraplau
111. *Hermann Krause „ Camburg
112. *Johannes Moser „ Camburg
113. †Walther Stephan „ Gangloffsömmern

Quarta (24).

114. Reinhard Erbe aus Eisenberg
115. *Erich Etzold „ Groitzsch
116. Kurt Schöppe „ Eisenberg
117. *Paul Liebold „ Eineborn
118. Hans Runge „ Eisenberg
119. Kurt Kellberg „ Eisenberg
120. *Konrad Löbe „ Buchheim
121. Rudolf Pforde „ Meißen
122. Max Jessen „ Schkölen
123. Paul Vogt „ Oberwiesen
124. Willy Prüger „ Hohendorf
125. Rudolf Körbitz „ Eisenberg
126. *Dietrich Ebmeyer „ Glauchau
127. Max Köhler „ Eisenberg
128. Friedrich Wezel „ Leipzig
139. Robert Obst „ Eisenberg
130. Walther Binder „ Schkölen
131. Heinz Geyer „ Eisenberg
132. Georg Scheller „ Klosterlaus
133. Oskar Albertus „ Eisenberg
134. *Hermann Flachs „ Teuchern
135. *Willy Lorentz „ Lucka
136. *Willy Blödner „ Ottendorf
127. *†Erich Köhler „ Großkröbitz

Quinta (25).

138. Ernst Kretschmar aus Eisenberg
139. Moritz Hebenstreit „ Serba
140. Hermann Kluge „ Eisenberg
141. Georg Köhler „ Trockenborn
142. Arthur Plath „ Eisenberg
143. *Paul Brödel „ Pegau
144. Walther Blaß „ Eisenberg
145. Werner Uehrigs „ Silbitz
146. Karl Steinbrück „ Eisenberg
147. Karl Sörgel „ Schöngleina
148. Willy Golle „ Eisenberg
149. Kuno Fröhlich „ Hermsdorf
150. *Ewald Lorenz „ Seitenroda
151. Ernst Steindorff „ Eisenberg
152. Alfred Habe „ Drackendorf
153. *Hans Pfeifer „ Königshofen
154. Erich Munkwitz „ Berlin
155. Alexander Michael „ Eisenberg
156. Kurt Werner „ Aue
157. Erich Eckardt „ Eisenberg

rl Metzky aus Eisenberg
dolf Kirchner „ Eisenberg
ax Graul „ Zschorgula
thur Pinckert „ Etzdorf
Walther Trautluft „ Ronneburg

Sexta (13).

Walther Vorwerk aus Eisenberg
urt Helm „ Oetzsch
edrich Seyboth „ Eisenberg

166. Ernst Bergter aus Eisenberg
167. *Max Zeutschel „ Eisenberg
168. *Paul Kaltenbach „ Eisenberg
169. Walther Drechsler „ Eisenberg
170. *Johannes Strümpfel „ Rüdersdorf
171. *Friedrich Fischer „ Eisenberg
172. *Rudolf Steinhäußer „ Eisenberg
173. *Fritz Metzky „ Eisenberg
174. *Paul Glück „ Eisenberg
175. *Hermann Schöppe „ Eisenberg

Während des Schuljahrs verließen die Schule aus
Ia: die Seite 16 aufgeführten 3 Abiturienten des Michaelistermins, dazu 4. Franz Pape, 5. Johannes Jessen;
IIa: 6. Max Hacke, 7. Gottfried Theune, 8. Winus Werner;
IIb: 9. Walther Köhler,
IIIa: 10. Max Schulze;
IIIb: 11. Walther Stephan;
IV: 12 Erich Köhler;
V: 13. Walther Trautluft.
Es verbleiben demnach 162 Schüler.

C. Statistische Übersicht.

	Ia	Ib	IIa	IIb	IIIa	IIIb	IV	V	VI	Sa.
uch beim Schlusse der vorigen Schulnachrichten	16	11	11	16	24	23	19	18	22	160
gang vor Beginn des neuen Schuljahres . .	13	—	1	4	2	—	2	—	1	23
and „ „ „ „ „ . . .	3	11	10	12	22	23	17	18	21	137
gang a) durch Versetzung	11	8	9	16	19	15	15	18	—	111
b) „ Aufnahme	—	1	3	—	2	6	6	4	10	32
and bei Beginn des neuen Schuljahres . .	14	9	14	19	27	25	23	25	13	169
gang im Sommerhalbjahre	—	—	—	—	—	—	–	—	—	—
gang „ „	5	—	3	1	1	1	—	1	—	12
gang zu Michaelis	—	—	2	2	1	—	1	—	—	6
and bei Beginn des Winterhalbjahres . .	9	9	13	20	27	24	24	24	13	163
gang im Winterhalbjahre	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
gang „ „	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—
and beim Schlusse der Schulnachrichten . .	9	9	13	20	27	24	23	24	13	162
amtzahl der Schüler, die das Gymnasium besuchten	**14**	**9**	**16**	**21**	**28**	**25**	**24**	**25**	**13**	**175**
h der Heimat waren:										
Landeskinder a) aus Eisenberg	2	2	2	6	10	4	9	11	11	57
b) „ dem übrigen Westkreise	3	1	—	8	2	10	6	8	1	39
c) „ „ Ostkreise . . .	1	2	—	1	—	2	1	1	—	8
Auswärtige	8	4	14	6	16	9	8	5	1	71

Sämtliche Schüler waren evangelisch.

Die Kommission für die Reifeprüfung trat am 21. September 1898 und am 10. März sammen; der Prüfung unterzogen sich am Michaelistermin 3, am Ostertermin 8 Oberprimaner das Zeugnis der Reife erhielten. Von den ersteren wurden 2, von den letzteren 4 gänzlich von d lichen Prüfung befreit. (Vgl. das nachfolgende Verzeichnis.)

Name	Geburtstag	Stand und Wohnort des Vaters	Besuch (in Jahren) d. Schule	Besuch (in Jahren) d. Prima	Studium bezw. Beruf	U
A. Mich. 1898.						
1. **Henrich Carl** . .	10. Dezember 1878	Amtsrat in Haynsburg †	9½	2½	Forstwissenschaft	
2. **Georg Patzschke** .	26. Mai 1878	Dr. med. in Osterfeld	9½	2½	Offizier	
3. **Fritz Geyer** . . .	25. Januar 1878	Kaufmann in Eisenberg †	10½	2½	Medizin	
B. Ostern 1899.						
4. **Paul Specht** . . .	15. Oktober 1879	Pfarrer in Kasekirchen †	8	2	Alte Philologie	
5. **Franz Lange** . .	2. März 1879	Porzellanmalereibesitzer in Kahla	7	2	Alte Philologie	
6. **Paul Dorstewitz** .	18. August 1879	Gymnasialdirektor in Eisenberg	8	2	Landwirtschaft	
7. **Willy Scheller** . .	14. Septbr. 1880	Lehrer in Klosterlausnitz	9	2	Theologie	
8. **Adolf Theune** . .	22. Novbr. 1878	Pfarrer in Bennstedt	10	2	Theologie	
9. **Ernst Mejer** . . .	5. August 1877	Posthalter in Weimar †	4½	2	Rechtswissenschaft	
10. **Albert Knauth** . .	26. Sept. 1879	Pfarrer in Orlamünde	5	2	Theologie	
11. **Gerhard Werther** .	23. August 1878	Kaufmann in Halle	3½	2	Forstwissenschaft	E

IV. Schulgeschichte.

Die Entlassung der Abiturienten fand den 5. März statt. Bei dieser Schulfeier erhielt fleißige, tüchtige und bedürftige Schüler Ehren-, Bücher- und Geldgaben; nämlich

I. das von Sr. Hoheit dem regierenden Herzog für den tüchtigsten Abiturienten Geschenk, bestehend aus einer goldenen Uhr, der Abiturient Hugo Poßner aus Podelsatz;

II. Geldgaben, und zwar

1. das Geldgeschenk Sr. Hoheit des regierenden Herzogs (150 Mk.): der Abitur Pflaumer aus Lützen 50 Mk., die Unterprimaner Adolf Theune aus Bennstedt und Albert Seif Mannichswalde je 30 Mk., der Obersekundaner Karl Sonnekalb aus Camburg 40 Mk.;

2. die Stiftung der alten Herren (40 Mk.): der Untertertianer Walther Steind Eisenberg und der Quintaner Kurt Schöppe aus Eisenberg je 20 Mk.;

3. das Ludewigsche Stipendium (120 Mk.): die Obersekundaner Erich Hollack a berg und Alfred Kornmann aus Ahlendorf je 60 Mk.;

4. aus der Weißenbornschen Stiftung (52,50 Mk.): der Untersekundaner Willy aus Eisenberg 26,50 Mk. und der Obertertianer Johannes Starke aus Klosterlausnitz 26 Mk.;

5. das Sparkassenlegat (23,60 Mk.), vermehrt durch ein Geschenk eines früheren Sch 20 Mk.: der Quintaner Walther Binder aus Schkölen 23,60 Mk. und der Sextaner Ernst aus Eisenberg 20 Mk.;

(6. die Eisenberger Jubelfeierstiftung wurde, weil kein empfangsberechtigter vorhanden war, nicht verliehen.)

7. die Krauseſtiftung (50 Mk.): der Obertertianer Albin Juſt aus Törpla und der Unter- Max Fröhlich aus Eiſenberg je 25 Mk.;

8. die Herzog-Chriſtian-Stiftung (60 Mk.): der Quartaner Richard Schubert aus Eiſenberg;

9. die Kaiſer-Wilhelm-Stiftung der Abiturienten und Schüler (100 Mk.): die Abiturienten Karl aus Roda und Paul Dreßler aus Kahla je 50 Mk.;

10. das Kämpfeſche Legat (40 Mk.) und 10 Mk. von Herrn Stadtrat Frenzel: der Abiturient Müller aus Friedrichsstanneck.

III. die Bücherprämien, und zwar

1. die Linkeſchen Prämien: der Unterprimaner Paul Specht aus Kaſekirchen (R. Menge, ung in die antike Kunſt), der Oberſekundaner Fritz Schlemmer aus Oſterfeld-Liſſen (Vilmar, Ge- der deutſchen Nationallitteratur), der Unterſekundaner Walther Sperrhake aus Eiſenberg (Scheffel, d), der Obertertianer Walther Herfurth aus Orlamünde (Palleske, Schillers Leben und Werke), tertertianer Johannes Pfau aus Eiſenberg (Schillers Werke in 6 Bänden), der Quintaner Reinhard us Eiſenberg (Kugler, Geſchichte Friedrichs des Großen);

2. die Prämien eines Freundes und ehemaligen Schülers des Lyceums: der Unter- Hermann Remmler aus Droyßig (Kämmel, Geſchichte des deutſchen Volkes) und der Sextaner Hebenſtreit aus Serba (ein Reißzeug);

3. die Prämie des Herrn Landrats Schnaubert in Pillkallen: der Abiturient Otto aus Corbuſſen (Aßmus und Stieler, Bilder aus Elſaß-Lothringen).

Die Kaiſer-Wilhelm-Stiftung iſt in dieſem Jahre abermals durch ein reiches Geſchenk (150 Mk.) rt worden, welches Herr Rittmeiſter Tellemann in Schkölen aus Anlaß des nach beſtandener üfung erfolgten Abgangs ſeines Sohnes der Stiftung zu überweiſen die Güte hatte.

Des weiteren hat Frau verw. Appellationsrat Facilides in Eiſenberg die Summe von 4000 Mk. Beſtimmung zur Verfügung geſtellt, daß der jährliche Zinsertrag einem oder zwei, höchſtens drei n und wohlgeſitteten Schülern des Chriſtiansgymnaſiums als Stipendium oder Prämie verliehen ſoll. Die Stiftung iſt vom Herzoglichen Hohen Miniſterium, Abteilung für Kultus-Angelegenheiten, igt worden und wird den Namen Facilides-Stiftung führen.

Für beide Gaben ſei auch an dieſer Stelle im Namen der Schule der wärmſte Dank ausgeſprochen.

Den Herzoglichen Freitiſch genoſſen 15, zuletzt 14 Schüler; er wird vom Freitiſch-Ökonomen Häußler gehalten.

Vom Schulgeld waren befreit gänzlich 19, hälftlich 32 Schüler.

Die Feier des heiligen Abendmahls beging das Gymnaſium am 27. April und am 19. Oktober.

Unter Führung der Klaſſenlehrer wurden am 25. Juni die Schulausflüge nach verſchiedenen Orten chbarſchaft ausgeführt, nachdem bereits am 11. Juni die Schüler der Primen und Sekunden in Be- mehrerer Lehrer der Aufführung von Wallenſteins Lager und der Piccolomini im Großherzoglichen ter zu Weimar beigewohnt hatten.

Was die Feier der Schulfeſte betrifft, ſo fand, wie herkömmlich, am Sedantage ein öffentlicher ktus mit Deklamationen der Schüler ſtatt. Am Geburtstage Sr. Hoheit des Herzogs vereinigten nächſt Lehrer und Schüler in der Aula zu gemeinſamer Andacht, welche von Herrn Oberlehrer abgehalten wurde; ſpäter fand unter Leitung des Herrn Turnlehrers Zarſchler ein öffentliches Schau- ſämtlicher Klaſſen ſtatt. Der Geburtstag Sr. Majeſtät des deutſchen Kaiſers wurde durch eine ier begangen, bei der Herr Prof. Dr. Weiſe die Feſtrede hielt.

Mitten während der Sommerferien erfolgte das Ableben Sr. Durchlaucht des Fürſten Bismarck. rauer- und Gedächtnisfeier des großen Toten wurde daher erſt am 16. Auguſt, bei Wiederbeginn nterrichts, abgehalten; bei derſelben übernahm der Unterzeichnete die Anſprache an die verſammelte emeinde.

An der neuen Trauer, in welche Seine Hoheit der Herzog durch das am 8. Oktober erfol
scheiden der einzigen Tochter, Ihrer Königlichen Hoheit der Frau Prinzessin von Preußen, versetzt
ist, hat mit dem ganzen Lande auch das Christiansgymnasium bewegten Anteil genommen.

Der Unterricht nahm während des Schuljahrs im allgemeinen seinen regelmäßigen Verla
war Herr Professor Mackrodt, der nach den Sommerferien zur Herstellung seiner Gesundheit au
Wochen beurlaubt war, sowie Herr Oberlehrer Hüniger wegen einer militärischen Übung vorüb
zu vertreten.

Am Ende des vorigen Schuljahrs schied nach einer vierzigjährigen teils im Lehr- teils im
amt verbrachten Amtsthätigkeit aus dem Lehrerkollegium Herr Professor Oskar Ehrhardt, um
wohlverdienten Ruhestand zu treten. Er war Ostern 1875, als der Ausbau des Gymnasiums du
zufügung der Prima vollendet wurde, als Religionslehrer an dasselbe berufen worden und hat d
der Religion und im Hebräischen auch in der Geschichte, dann im Deutschen in den oberen Klasse
richtet, bis ihm zuletzt ein zunehmendes Augenleiden Beschränkung auferlegte; durch die reichen
seines Geistes, durch die Treue und Festigkeit seines religiösen Standpunkts, durch die Übereinstimmu
Lehre und Leben hat derselbe viel zum Aufblühen und Gedeihen des jungen Gymnasiums beigetra
sich einen Ehrenplatz unter den Lehrern des Lyceums und des Christiansgymnasiums gesichert. Sein
lebt in den Herzen vieler dankbaren Schüler, denen er Berater und Führer gewesen ist. Das
kollegium bewahrt in treuem Gedächtnis, was Herr Professor Ehrhardt ihm und dem Gymnasiu
das Wirken seiner Persönlichkeit gewesen ist. Möge es ihm vergönnt sein, sich des otium cum d
lange in Rüstigkeit zu erfreuen! Seine Hoheit der Herzog geruhte dem scheidenden Kollegen in Aner
seiner eine lange Reihe von Jahren der Schule gewidmeten treuen und vorzüglichen Dienste das
Kirchenrat zu verleihen.

An seine Stelle wurde für Ostern 1898 der bisherige Oberlehrer am Herzoglichen Ernstr
nasium zu Altenburg, Herr Hermann Riehm, berufen, welcher über sein Leben folgende Angaben
hat. Geboren am 26. März 1865 zu Halle a. S., besuchte er das Stadtgymnasium daselbst, stud
dann Theologie und klassische Philologie auf den Universitäten Halle, Berlin und Marburg und
in Halle das erste theologische Examen. Nachdem er seiner Militärpflicht Genüge geleistet, trat er Oste
in den Magdeburger Kandidatenkonvikt zur Ausbildung von Religionslehrern. Während der $2\frac{1}{2}$
Probezeit in dieser mit dem Pädagogium zum Kloster U. L. Frauen verbundenen Anstalt bestand
zweite theologische Examen in Magdeburg, darauf im Januar 1893 die philologische Staatsprü
Halle. Von Ostern 1893 war er als Hilfslehrer am Herzoglichen Ernstrealgymnasium in Altenb
schäftigt und wurde Ostern 1895 als Oberlehrer angestellt.

Zum Schlusse mögen noch die ehemaligen Schüler der Anstalt angeführt werden, deren
uns bekannt geworden ist. Zum Jahre 1896 ist noch nachzutragen: 1. Robert Mehlhorn, Lyc
1865—71, † am 24. Januar 1896 als Pastor in Wichita Falls, Texas; zu 1897: 2. der Landwirt
Pinkert aus Wintersdorf, Lyceist von 1863—64, verunglückt Anfang August 1897. 1898
3. Pastor Theodor Klein in Kriebitzsch, Lyceist von 1837—42, am 5. Januar; 4. im M
Kaufmann Hans Bennecke in Porto Alegre, Gymnasiast von 1880—84; 5. der Fabrikbesitzer
Kaempfe in Wallendorf, der das Lyceum von 1853—57 besuchte, am 6. April; 6. am 9. A
Musiklehrer Emil Gäbler in La Crosse, Wisconsin, Lyceist von 1841—45; 7. am 17. Septem
Tischlermeister Hermann Oertel hier, der das Lyceum von 1846—48 besuchte; 8. am 12. Novem
Buchdrucker und Redakteur Karl Honigmann in Duluth, Minnesota, Lyceist von 1868—1872.

V. Schulbücher.

* Bei den Schriftstellerausgaben wird Text und Kommentar getrennt verlangt.

Titel des Buches	Klasse								
a. Religion.									
ſangbuch, Katechismus	VI	V	IV	IIIb	IIIa	IIb	IIa	Ib	Ia
urtz, Bibliſche Geſchichte	VI	V	IV	IIIb	IIIa	IIb	IIa	Ib	Ia
bel	—	—	—	IIIb	IIIa	IIb	IIa	Ib	Ia
ölker und Strack, Bibliſches Leſebuch	—	—	IV	—	—	—	—	—	—
oack, Hilfsbuch für den Religionsunterricht (1. Ausg.)	—	—	—	—	IIIa	IIb	IIa	Ib	Ia
vum testamentum graece	—	—	—	—	—	—	—	Ib	Ia
b. Deutſch.									
thographiſche Regeln und Wörterverzeichnis	—	—	IV	IIIb	IIIa	IIb	IIa	Ib	Ia
opf und Paulſiek, Deutſches Leſebuch (n. Bearb., für VI: I, 1; für V: I, 2; für IV: I, 3, ſämtl. bearb. von Muff; für III und IIb ein Band, ebenſo für Ia und Ib, beide bearb. von Foß)	VI	V	IV	IIIb	IIIa	IIb	—	Ib	Ia
öttiher und Kinzel, Geſchichte der deutſchen Litteratur	—	—	—	—	—	—	IIa	Ib	Ia
c. Lateiniſch.									
üller, Lateiniſche Schulgrammatik (n. A., Teubner)	VI	V	IV	—	—	—	—	—	—
eißner, Lateiniſche Schulgrammatik	—	—	—	IIIb	IIIa	IIb	IIa	Ib	Ia
ſtermann-Müller, Lateiniſches Übungsbuch (für VI: 1. Tl.; für V: 2. Tl.; für IV: 3. Tl.; für III u. IIb: 4. Tl.)	VI	V	IV	IIIb	IIIa	IIb	—	—	—
äſar, Galliſcher Krieg, Schultert von Schmalz (1896), mit Präparation von Bräuhäuſer (Teubner)	—	—	—	IIIb	—	—	—	—	—
— , Galliſcher Krieg, belieb. Tertausgabe mit Kommentar von Prockſch	—	—	—	—	IIIa	—	—	—	—
vid, Metamorphoſen von Siebelis-Polle nebſt Anleitung zur Vorbereitung (Teubner)	—	—	—	—	IIIa	—	—	—	—
ergil, Äneis (Perthes)	—	—	—	—	—	IIb	IIa	—	—
cero, De imperio Cn. Pompeii (Perthes)	—	—	—	—	—	IIb	—	—	—
— , Divin. in Q. Caecilium (Perthes)	—	—	—	—	—	—	IIa	—	—
— , Or. in L. Verrem IV, Ausg. von Nohl (Freytag, 2. A.) mit Kommentar	—	—	—	—	—	—	—	—	Ia
— , Ausgewählte Briefe, II. Bdchn. (Weidmann)	—	—	—	—	—	—	—	Ib	—
vius, (Perthes, Bd. 21 in IIb, 22 in IIa, 23 in Ib)	—	—	—	—	—	IIb	IIa	Ib	—
acitus, Annalen 1. Bd. (Perthes)	—	—	—	—	—	—	—	Ib	Ia
— , Germania (Velhagen und Klaſing)	—	—	—	—	—	—	—	—	Ia
raz von Müller (Teubner)	—	—	—	—	—	—	—	Ib	Ia
teiniſche Lexika von Georges o. Heinichen	—	—	—	IIIb	IIIa	IIb	IIa	Ib	Ia

Nr.	Titel des Buches	Klasse							
	d. Griechisch.								
26.	Uhle, Griechische Schulgrammatik	—	—	—	IIIb	IIIa	IIb	IIa	I
27.	Weißenfels, Griechisches Übungsbuch für Tertia (Teubner)	—	—	—	IIIb	—	—	—	—
28.	Xenophon, Anabasis mit Kommentar v. Schirmer (Teubner)	—	—	—	—	IIIa	IIb	—	—
	—, Hellenika I. Bd. (Perthes)	—	—	—	—	—	—	IIa	—
29.	Herodot, II. Bd., Textausgabe (Teubner)	—	—	—	—	—	—	IIa	—
30.	Homer, Odyssee (Teubner) mit Anleitung von Hentze, I. und II. Bd.	—	—	—	—	—	IIb	IIa	—
31.	—, Ilias, Text von Dindorf o. Ausg. von Fäsi								
32.	(ein Band)	—	—	—	—	—	—	—	I
33.	Plato, Apologie und Krito (Perthes)	—	—	—	—	—	—	—	I
34.	—, Protagoras (Perthes)	—	—	—	—	—	—	—	—
35.	Sophokles, Antigone (Velhagen und Klasing)	—	—	—	—	—	—	—	I
36.	—, König Ödipus (Velhagen und Klasing)	—	—	—	—	—	—	—	—
37.	Griechisches Wörterbuch von Benseler	—	—	—	—	IIIa	IIb	IIa	I
38.	Autenrieth, Homerlexikon	—	—	—	—	—	—	IIa	I
	e. Französisch.								
39.	Kühn, Kleine französische Schulgrammatik (n. A.)	—	—	IV	IIIb	IIIa	IIb	IIa	I
40.	—, Französisches Lesebuch (Unterstufe n. A.)	—	—	—	IIIb	—	—	—	—
41.	Otto-Runge, Französisches Konversationslesebuch, 1. Abt. (Groos)	—	—	IV	—	—	—	—	—
42.	Ricken, Le Tour de la France en cinq mois (2. A., Gronau)	—	—	—	—	IIIa	—	—	—
43.	Wershofen, Lectures Historiques (Renger)	—	—	—	—	—	IIb	—	—
44.	Halévy, L'Invasion (2. A., Renger)	—	—	—	—	—	—	IIa	—
45.	Wilke, Paris, Promenades dans la Capitale de la France (Gerhard, A. mit buntem Bild)	—	—	—	—	—	—	—	I
46.	Sarrazin, Poésies Françaises (Kühtmann)	—	—	—	—	—	—	—	I
47.	Barrau, Scènes de la Révolution Française (2. A., Renger)	—	—	—	—	—	—	—	—
48.	Molière, Le Bourgeois Gentilhomme (Renger)	—	—	—	—	—	—	—	—
	f. Englisch.								
49.	Dubislav und Boek, Elementarbuch der englischen Sprache (Ausg. B)	—	—	—	—	—	—	IIa	I
50.	Wershofen, English History (Renger)	—	—	—	—	—	—	—	I
	g. Geschichte und Erdkunde.								
51.	Jänicke, Geschichte der Griechen und Römer für IV	—	—	IV	—	—	—	—	—
52.	—, die deutsche und die brandenburgisch-preußische Geschichte (1. Tl.: IIIb, 2. Tl.: IIIa und IIb)	—	—	—	IIIb	IIIa	IIb	—	—
53.	—, Lehrbuch der Geschichte (1. Tl.: IIa (2. Aufl.), 2. und 3. Tl. (n. Aufl.): I)	—	—	—	—	—	—	IIa	I
54.	Daniel, Leitfaden in der Geographie (n. A.)	—	V	IV	IIIb	IIIa	IIb	IIa	I
55.	Diercke und Gäbler, Schulatlas (n. A.)	VI	V	IV	IIIb	IIIa	IIb	IIa	I

Titel des Buches	Klasse								
tzger, Historischer Schulatlas (n. A.)	—	—	—	IIIb	IIIa	IIb	IIa	Ib	Ia
eglin, Schulatlas zur Geschichte des Altertums (Perthes)	—	—	IV	—	—	—	—	—	—
h. Mathematik.									
ellen, Rechenbuch (n. A.)	VI	V	IV	—	—	—	—	—	—
stler, Geometrie (in IV u. IIIb: Heft 1; in IIIa: Heft 2; in IIb u. IIa: Heft 3)	—	—	IV	IIIb	IIIa	IIb	IIa	—	—
robel, Übungsbuch zur Arithmetik und Algebra (1. Tl.: IIIb—IIb u. 2. Tl.: IIa—Ia)	—	—	—	IIIb	IIIa	IIb	IIa	Ib	Ia
— , Stereometrie	—	—	—	—	—	—	—	Ib	Ia
lömilch, Logarithmen	—	—	—	—	—	IIb	IIa	Ib	Ia
idt, Trigonometrie	—	—	—	—	—	—	IIa	Ib	—
i. Hebräisch.									
senius-Kautzsch, Hebräische Grammatik (kleine Ausg., Vogel)	—	—	—	—	—	—	IIa	—	—
utzsch, Hebräisches Übungsbuch (Vogel)	—	—	—	—	—	—	IIa	—	—
ffer, Hebräische Grammatik (8. A.)	—	—	—	—	—	—	—	Ib	Ia
räische Bibel und Lexikon	—	—	—	—	—	—	—	Ib	Ia
k. Singen.									
itz, Liederbuch „Vom Fels zum Meer"	VI	V	IV	IIIb	IIIa	IIb	IIa	Ib	Ia

VI. Ordnung der Schulfeier

Mittwoch, den 15. März, vormittags 10 Uhr.

1. Gesang.
2. Abschiedsrede des bisherigen Primus von Ia Paul Specht im Namen der Abiturienten und Erwiderung des Primus von Ib Erich Hollack im Namen der zurückbleibenden Schüler.
3. Gesang.
4. Verteilung der Prämien und Stipendien und Entlassung der Abiturienten durch den Direktor.
5. Gesang.

Die Aufnahmeprüfung für das neue Schuljahr findet **Montag, den 10. April, früh 7 Uhr** den Anmeldungen ist Tauf- oder Geburtszeugnis, Impfschein und Schulzeugnis beizufügen.

Eisenberg, den 10. März 1899.

Direktor Professor **Dorstewitz.**

Jahres-Bericht

über das

Königliche Friedrich-Wilhelms-Gymnasium

und die

Königliche Vorschule

zu

BERLIN.

Ostern 1895.

Inhalt:

1. Einführung in die Infinitesimalrechnung. Vom Oberlehrer Hugo Frank.
2. Schulnachrichten.

BERLIN.
Druck von A. W. Hayns Erben.

. Progr. Nr. 56.

Einführung in die Infinitesimalrechnung.

Die Aufnahme der analytischen Geometrie in den Unterrichtsplan aller höheren Lehranstalten hat zur Folge gehabt, dafs diesem Unterrichtszweige eine gröfsere Beachtung als bisher zu Teil geworden ist, indem nicht nur in den bestehenden mathematischen Lehrbüchern der analytischen Geometrie ein besonderer Abschnitt eingeräumt wurde, sondern auch vielfach selbständige Leitfäden, die sich nur mit diesem Gegenstande beschäftigen, entstanden sind. Gewöhnlich wurde bei der Behandlung des Stoffes von den Eigenschaften einzelner Curven ausgegangen und hieraus die Gleichung derselben abgeleitet; nur vereinzelt findet man das umgekehrte Verfahren, aus der Gleichung auf die Gestalt und die Eigenschaften der sie darstellenden Curven zu schliefsen. Und doch ist gerade die letzte Betrachtungsweise die wichtigere, da sie es besonders gestattet, gleich von Anfang an die praktische Anwendbarkeit des Koordinatenbegriffs zu zeigen. Man sollte sich aber zunächst hiermit begnügen. Denn wollte man bei der Behandlung der Kegelschnitte die allgemeine Gleichung des 2. Grades zu Grunde legen, so würde das für den Anfänger oft zu grofse Schwierigkeiten bieten; legt man sich aber vorher die Gleichung so zurecht, dafs sie der Reihe nach vom Kreis beginnend die einzelnen Kegelschnitte ergiebt, so ist dabei die Willkür zu vorherschend und wirkt deshalb hemmend auf die ganze Entwicklung ein. Hier ist die erste Behandlungsweise vorzuziehen, da sie die einfachere und daher für den Anfänger leichter fafsliche ist, auch hat sie noch das für sich, dafs sie mit dem Verfahren übereinstimmt, das Cartesius, der Begründer der analytischen Geometrie, zuerst angewendet hat, nur mufs sie an geeigneten Stellen passend durch die erste Methode ergänzt werden.

Die praktische Anwendbarkeit des Koordinatenbegriffs ist eine so vielseitige und verbreitete, dafs niemand in Verlegenheit sein wird, geeignete Beispiele für die Schule zu finden, sei es dafs er dieselben aus der Statistik, Erdkunde, Physik oder aus anderen Gebieten entnimmt. Überall, wo eine derartige Abhängigkeit zwischen zwei Gröfsen besteht, dafs die Änderung der einen auch die Änderung der anderen zur Folge hat (eine Funktion der anderen ist), wird eine graphische Darstellung mit Hilfe des Koordinatensystems möglich sein. Die einfachste und sich am häufigsten darbietende Beziehung ist die, die veränderliche Gröfse als Funktion der Zeit zu betrachten, doch werden sich namentlich auch in der Physik leicht andere Beziehungen finden lassen. Ich führe nur ein Beispiel an: Die Druckhöhe in communicierenden Röhren eine Funktion der Entfernung vom Druckgefäfs, da dies zur allgemeinen Behandlung der geraden Linie überleiten kann.

Besondere Anwendung findet die graphische Darstellung auch in der Medicin und vor allem in der Physiologie, wobei die Veränderungen, die in verschiedenen Lebewesen vor sich gehen, nicht nur als Funktionen der Zeit, sondern auch als solche von verschiedenen äufseren Eindrücken, als Reizstärke, Druck, Temperatur etc., dargestellt werden können. Wenn auch noch so genaue und umfangreiche Tabellen angefertigt werden, welche die Beziehung verschiedener Gröfsen zu einander ausdrücken sollen, so werden sie doch nicht im Entferntesten erreichen, was hier die

graphische Darstellung leistet. So giebt z. B. die Fiebercurve (Lebenswärme als Funktion d Zeit), die jeder Wärter ohne Schwierigkeiten aufzeichnen kann, dem Arzt sofort einen Überblic über den Verlauf der Krankheit; und namentlich wenn durch besondere Zeichen an der Curv die Zeiten angemerkt werden, an denen die Mahlzeiten eingenommen oder irgendwelche ärztlich Anordnungen ausgeführt wurden, so können die Wirkungen sofort festgestellt werden, wenn ma den Verlauf der Curve mit der eines gesunden Menschen vergleicht. Bei vielen Vorgängen is aber die Zeit, in der merkliche Veränderungen stattfinden, eine so kleine, dafs direkte Au zeichnungen unmöglich werden. Dies hat zur Konstruktion von Registrierapparaten geführt, di fortlaufend selbstthätig die Curven aufzeichnen, und die auch im ausgedehntesten Mafse b metereologischen Beobachtungen Verwendung finden. Wer sich genauer über diesen Gegenstan unterrichten will, den verweise ich auf „Langendorff, Physiologische Graphik".

Nur selten zwar werden die so aufgezeichneten Curven ein bestimmtes Gesetz erkenne lassen und eine weitere mathematische Behandlung gestatten, wenn aber ein solches Gese bekannt ist, nach welchem die Abhängigkeit zweier Gröfsen von einander stattfindet, wenn als zwischen zwei Gröfsen x und y eine Gleichung sich aufstellen läfst $y = f(x)$, so läfst sich au derselben auf die Gestalt und den Verlauf der Curve, ob sie zu- oder abnimmt, der x Achs die concave oder convexe Seite zukehrt, wenn sie den höchsten Punkt erreicht etc., ein Schlu ziehen, ohne dafs die Curve gezeichnet zu werden braucht. Hierzu ist aber die Einführung i die Grundbegriffe der Infinitesimalrechnung erforderlich, ein Schritt, der zwar etwas Neues fü die Schule zu fordern scheint, in Wirklichkeit aber mehr oder weniger versteckt schon o gemacht worden ist. Ja, wenn man bedenkt, eine wie mannigfaltige Anwendung die Infinitesima rechnung zuläfst, uud mit wie einfachen Mitteln sie oft schnell zum Ziele führt, so mufs ma sich wundern, dafs dieser Zweig der mathematischen Wissenschaft, dem sie selbst einen so u geahnten Erfolg zu verdanken hat, der jetzt auf allen Gebieten der Naturwissenschaft eine her schende Rolle spielt und zu grofsartigen Entdeckungen geführt hat, nicht schon längst eine weite Beachtung gefunden hat. Der Grund hierzu mag wohl darin liegen, dafs bis in dieses Jah hundert hinein selbst zwischen den berühmtesten Mathematikern keine Einigkeit in der Deutun der Differentiale bestand, und dafs die Rechnung mit unentlich kleinen Gröfsen, die nachhe wieder vernachlässigt werden, in dem Anfänger den Schein erwecken können, als handele es sic hier nur um eine Beinahrechnung und nicht um ebenso absolute Gewifsheit, wie in den übrige Zweigen der reinen Mathematik. Dieser Schein wird schwinden, wenn man den Stein des A stofses ganz beseitigt und die Differentialquotienten ohne Benutzung unendlich kleiner Gröfse ableitet, was sich ohne grofse Schwierigkeit bewerkstelligen läfst. Bevor wir aber hierzu übe gehen, wollen wir eine kurze Übersicht über die Geschichte der Infinitesimalrechnung voraus schicken und dann die verschiedenartige Bedeutung und Anwendbarkeit der Differentialquotiente auseinandersetzen.

Drei Probleme waren es, die hauptsächlich zur Entdeckung der Infinitesimalrechnun geführt haben: 1. Die Quadratur, 2. das Tangentenproblem, 3. die Maxima- und Minimarechnung Das älteste Problem, die Quadratur des Kreises, läfst sich bis in das 17. Jahrhundert v. Chr. ve folgen, wo wir bei den Ägyptern in dem Papyros des Ahmes die Angabe finden, dafs der Inha des Kreises gleich dem eines Quadrates sei, dessen Seite der um $\frac{1}{9}$ seiner Länge vermindert Durchmesser ist, also $K = \left(2 - \frac{2}{9}\right)^2 r^2 = \left(\frac{16}{9}\right)^2 r^2$, woraus für π der schon ziemlich brauch

are Werth 3,16 folgt. Etwas später finden wir bei den Babyloniern ein Verfahren, aus dem ch zwar für π der ungenauere Werth 3 ergiebt, das aber insofern von Wichtigkeit ist, als hier im ersten Male ein in den Kreis eingeschriebenes regelmäfsiges Polygon, nämlich das Sechseck, ur Berechnung des Kreises benutzt wird.

Antiphon, ein Zeitgenosse des Socrates, suchte auf zwei verschiedenen Wegen den Inhalt es Kreises zu bestimmen, indem er erst von dem dem Kreise eingeschriebenem Quadrat, dann on dem eingeschriebenem Dreieck ausging, und durch Anlegung von gleichschenkligen Dreiecken n die Polygonseiten dem Kreise immer näher zu kommen suchte. Noch genauer war das Verahren von Bryson, der dem eingeschriebenen Polygon noch das umgeschriebene hinzufügte, und adurch den Grund zu der heute üblichen und für die Infinitesimalrechnung so wichtigen Grenzestimmung legte. Die Alten sind aber nie so weit gegangen, die krumme Linie als ein Polygon on unendlicher Seitenanzahl zu betrachten, selbst bei der von ihnen angewandten Exhaustionsethode vergleichen sie nur Teile, die eine endliche vergleichbare Grösfe haben. Zwar hatte chon Aristoteles eine klare Vorstellung von dem Begriff der Stetigkeit, auch wufste er besonders en Trugschlüssen eines Zeno gegenüber geltend zu machen, dafs ein Unterschied vorhanden ist, nendlich vieles zu zählen und durch unendlich viele continuierlich auf einander folgende Punkte ch bewegen, doch hat er so wenig wie Archimedes, der durch seine Sandrechnung den Begriff es Unendlichgrofsen in die Mathematik einführte, eine allgemeine Methode für die Quadratur ufzustellen vermocht, so mannigfaltig und bewunderungswürdig auch die vielfältigen Flächen nd Körperberechnungen namentlich bei Archimedes sind.

Erst Keppler betrachtete den Umfang des Kreises als aus unendlich vielen Punkten usammengesetzt, von denen ein jeder die Basis eines Dreiecks bildet, dessen Spitze der Mittelunkt des Kreises ist, und wandte dieselbe Betrachtungsweise auch auf die Kugel an. Durch n wurde der Begriff des Unendlichkleinen in die Mathematik eingeführt und, was die Hauptache ist, auf verschiedenartige Weise bei vielen Problemen mit grofsem Vorteil benutzt. Seine afsrechnung machte Keppler zum Vorläufer des Cavalieri, der in seinem Methodus indivisibilium as nach ihm später benannte Princip zur Berechnung von Körpern anwendete, und damit geisser Mafsen eine Integration oder Summation unendlich vieler unendlich kleiner Gröfsen vorahm. Zugleich trat jetzt auch das Tangentenproblem, die Konstruktion von Tangenten an bebige Curven, und mit ihm die Maxima- und Minimarechnung in den Vordergrund, besonders, achdem durch Cartesius eine bequeme und leichte Behandlung der Curven mit Hilfe des oordinatensystems möglich wurde. Denkt man sich an eine beliebige Curve in einem Punkte P, essen Koordinaten x, y sind, eine Tangente gezogen, und nennt man den Winkel, den diese angente mit der Abscissenachse einschliefst α, die Subtangente a, denn ist $a = \frac{y}{\operatorname{tg}\alpha}$, mithin ist e Subtangente und damit auch die Tangente bekannt, wenn es möglich wird, $\operatorname{tg}\alpha$ durch die oordinaten des Punktes P auszudrücken. Derartige Erwägungen führten Leibnitz zu der Entckung der Infinitesimalrechnung, und zwar auf rein mathematischem Wege, während Newton nabhängig davon zu denselben Ergebnissen gelangte, indem er einerseits von der Quadratur ausng, andererseits die Mechanik zu Hilfe nahm, eine Betrachtungsweise, die vor ihm Roberval nd vor allem Barrow angewendet hatte, ohne sie jedoch zu einer allgemeinen Methode zu erben. Barrow liefs die Curven entstehen durch Bewegung einer Graden (Directrix) parallel mit ch selbst und eines Punktes auf dieser Graden, und er zeigte, dafs die trigonometrische Tanente des Winkels, den die Tangentenlinie mit der Abscissenachse bildet, gleich ist dem

Quotienten aus der Geschwindigkeit des Punktes zu der der Graden, was im wesentlichen m der Newtonschen Ableitung des Differentialquotienten übereinstimmt. Leibnitz und Newton habe beide das Verdienst, zuerst allgemeine Regeln zur Ableitung des Differentialquotienten angegeb zu haben, während vorher nur einzelne Fälle behandelt wurden, und Leibnitz das besondere Ve dienst, zuerst für das Differential und Integral bestimmte Zeichen eingeführt zu haben, wodur die Rechnung bedeutend vereinfacht wurde. Einen Beweis für die von ihm aufgestellten Rege konnte Leibnitz aber nicht immer bringen, da er über die Grundlage seiner Rechnung sich selb nicht klar war. Die Differentiale sollten kleiner sein als jede angebbare Gröfse und doch nic Null. Null konnten sie nach Leibnitz' Ansicht nicht sein, da mit ihnen dividiert wurde, und ei Division mit Null keinen Sinn hätte, und doch vernachlässigte er diese Gröfsen endlichen gege über, ohne einen anderen Grund angeben zu können, als den, dafs die Rechnung zu richtig Resultaten führte.*)

Genauer und bestimmter in seinen Angaben ist Newton. Nach ihm sind der Differenti quotient und das Integral die Grenzwerte, denen sich der Quotient verschwindender Gröfs oder die Summe dieser Gröfsen nähern, je kleiner sie selbst werden. Auch kommt bei ih zuerst das Prinzip der Infinitesimalrechnung in Anwendung, eine Gröfse wachsen zu lassen, u sie dann nach erfolgter Umformung wieder zu annullieren. Es kann hier nicht der Ort sei das Verfahren dieser beiden grofsen Mathematiker im einzelnen zu verfolgen, ebenso wenig w die verschiedenen Versuche späterer Mathematiker, besonders eines Euler, Lagrange, Cauch eine strengere Begründung der Infinitesimalrechnung herbeizuführen, es soll im folgenden n gezeigt werden, wie dem Schüler der Begriff des Differential-Quotienten und der Rechnung n demselben klar und ohne grofse Schwierigkeit dargelegt werden kann, und dafs die mann faltige Anwendung, die diese Rechnung gewährt, Zeit und Mühe reichlich belohnt, die dara angewendet wurden, da sie viele Beweise, namentlich auch aus der Physik, die sonst nur a umständliche und oft sehr schwer verständliche Weise geführt werden konnten, viel schneller u sicherer erledigt. Ausdrücklich möge noch einmal betont werden, dafs das Verfahren, das h benutzt wird, nicht etwas absolut Neues in den Schulunterricht einführen soll, sondern dafs sich im wesentlichen an dasjenige anschliefst, das Schellbach in ähnlicher Weise vielfach a gewendet hat, nur soll dasselbe verallgemeinert werden, damit der Schüler nicht bei jed Beispiel die Rechnung von neuem auszuführen hat.

I.

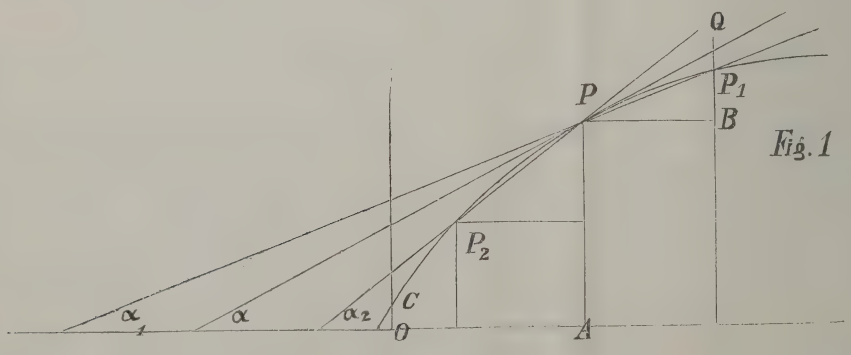


Fig. 1

*) Lüroth, Rektoratsrede. Freiburg 1889.

Es sei $y = f(x)$ die Gleichung irgend einer Curve, $x = OA$ und $y = PA$ die Koordinaten
es Punktes P, x_1, y_1 die eines benachbarten Punktes P_1, für den also $y_1 = f(x_1)$. Zieht man
nn zur Abscissenachse die Parallele $PB = x_1 - x$, dann ist $P_1B = y_1 - y = f(x_1) - f(x)$ und
$\frac{-y}{-x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$; $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ ist aber $\operatorname{tg} P_1PB = \operatorname{tg} \alpha_1$, wo α_1 der Winkel ist, den die Sekante PP_1
t der Abscissenachse bildet. Denkt man sich nun diese Sekante um P gedreht, so dafs die
nkte P und P_1 immer näher rücken, so behält die Gleichung $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ stets ihre Gültig-
it, sie wird sie daher auch behalten, wenn P_1 mit P und mithin auch x_1 mit x und y_1 mit y
sammenfallen, d. h. wenn die Sekante zur Tangente wird. Bezeichnen wir den Winkel, den
e Tangente mit der x-Achse bildet, mit α, so ist also $\operatorname{tg} \alpha = \lim \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$, wo lim (limes) den
enzwert bezeichnet, den dieser Quotient erreicht, wenn xy mit x_1y_1 zusammenfällt. Diesen
enzwert bezeichnen wir mit y' und nennen ihn den Differentialquotienten oder die Ableitung
r ursprünglichen Funktion $y = f(x)$, während man das umgekehrte Verfahren, das Aufsuchen
r Funktion aus ihrer Ableitung Integration nennt. Es besteht mithin zwischen dem Differential-
otienten und dem Integral eine ähnliche Beziehung, wie zwischen Potenz und Wurzel. Diese
ffassung der Integration als die Umkehrung der Differentiation gestattet es, aus einer ab-
leiteten Funktion die ursprüngliche Funktion zu bilden, ohne von einer Summe unendlich vieler
endlich kleiner Gröfsen reden zu müssen.

Genauer läfst sich der Wert von $\operatorname{tg} \alpha$ noch auf folgende Weise bestimmen: Nimmt man
nen zweiten Punkt P_2 auf der entgegengesetzten Seite von P an, und bezeichnet den Winkel,
n die Sekante PP_2 mit der Abscissenachse bildet mit α_2, so ist $\alpha_2 > \alpha > \alpha_1$, mithin
$\alpha_2 > \operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \alpha_1$.

Nun ist aber $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$, $\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{y - y_2}{x - x_2}$, daher

$$\frac{y - y_2}{x - x_2} > \operatorname{tg} \alpha > \frac{y_1 - y}{x_1 - x};$$

α liegt also zwischen den Grenzen $\frac{y - y_2}{x - x_2}$ und $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$, diese nähern sich aber immer mehr, je
her x_1y_1 und x_2y_2 dem Punkt xy kommt, und gehen endlich in einander über, wenn die
nkte zusammenfallen, daher ist $\operatorname{tg} \alpha = \lim \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ für $x = x_1$. Beide Betrachtungsweisen sind
em Schüler nicht fremd. Die Entstehung der Tangente durch Drehung der Sekante wird beim
eweise des Satzes: „Die Tangente ist mittlere Proportionale zu den Abschnitten der Sehne“
ngewendet; ebenso findet sich für die Grenzbestimmung Gelegenheit, auf frühere Sätze hinzu-
eisen, sei es auf die Beweise der Proportionalität oder der Flächenberechnung für incommen-
rable Gröfsen, oder auf die Ableitung der Zahl π, die Fallgesetze etc. Das einzig Neue ist
er Umstand, dafs der Ausdruck für $\operatorname{tg} \alpha$ unter der Form $\frac{0}{0}$ auftritt, und da $\operatorname{tg} \alpha$ fortwährend
it α seinen Wert ändert, so mufs der Quotient $\frac{0}{0}$ alle möglichen Werte annehmen können, für
nen bestimmten Fall aber immer einen bestimmten Wert. Die Möglichkeit hiervon kann dem
chüler an einigen einfachen Beispielen klar gemacht werden.

Es ist $\frac{a^2-b^2}{a-b}=a+b$. Hieraus erhält man für $b=a$

$$\frac{0}{0}=2a$$

$\frac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2$, woraus für $b=a$

$$\frac{0}{0}=3a^2$$

$\frac{x^2+x-2}{x^2-1}=\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x+2}{x+1}$ und für $x=1$

$$\frac{0}{0}=\frac{3}{2}.$$

Ein anderes Beispiel, das später Anwendung finden wird, ist die Ermittelung de Quotienten $\frac{\sin x}{x}$ für $x=0$.

Es ist tg $x > x >$ sin x. Dividiert man nun sin x durch jede dieser drei Gröfsen, s ergiebt sich:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,$$

$\frac{\sin x}{x}$ liegt also zwischen den Grenzen 1 und cos x, von denen die erste fest bleibt, während di zweite sich ihr immer mehr nähert, je kleiner x wird, um endlich für $x=0$ mit ihr zusammen zufallen. Daraus folgt, dafs auch $\frac{\sin x}{x}$ für $x=0$ den Wert 1 annimmt.

Der Quotient oder das geometrische Verhältnis $\frac{0}{0}$ ist also an und für sich etwas Un bestimmtes, es erhält aber einen bestimmten Wert, sobald man weifs, wie die Nullen entstande sind. Um diese verschiedene Entstehungsweise zu kennzeichnen, schreibt man für den Differential quotienten $\lim\frac{y_1-y}{x_1-x}$ auch $\frac{dy}{dx}$, wobei dy die aus y, dx die aus x entstandene Null bedeutet dy kann durch dx nicht ersetzt werden, wohl aber dx durch dx, denn da $\frac{x_1-x}{x_1-x}=1$ für all Werte von x, so bleibt es auch 1, wenn x_1 und x zusammenfällt, d. h. $\frac{dx}{dx}=1$, ebenso $\frac{3\,dx}{dx}=3$ aber $\frac{dy}{dx}$ ist unbestimmt, solange man nicht den Zusammenhang von dy und dx kennt. Kenn man aber die Entstehungsweise von dy und dx, so kann man mit ihnen wie mit ganzen Zahle rechnen, während sonst eine Division mit Null nicht erlaubt ist. Man kann jedoch von diese Bezeichnungsweise ganz absehen, wenn man sich auf einfache Beispiele beschränkt, für diesen Fal genügt die Bezeichnung y' für den Differentialquotient. Nur bei einzelnen Anwendungen soll de Kürze wegen die andere Bezeichnungsweise gewählt werden.

Ist also $y=f(x)$ die Gleichung einer Curve, so ist $y'=\lim\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}=f'(x)$ di trigonometrische Tangente des Winkels, den die Tangentenlinie mit der x-Achse nach de

ositiven Seite bildet. Hierdurch ist nicht allein das Mittel gegeben, die Tangente und Subangente einer Curve zu finden, sondern wir können uns auch aus dem Werte von y' eine Vorstellung von dem Verlauf der Curve machen. Solange y' positiv, steigt die Curve, ist y' negativ, so fällt sie, für $y' = 0$ erreicht sie ihren höchsten oder tiefsten Punkt. Dieser letzte Umstand wiederum kann zur Lösung der Aufgaben über Maxima und Minima verwendet werden. Auch läfst sich sehr einfach die Gleichung der Tangente an eine beliebige Curve ableiten. Die Gleichung einer Geraden, die durch den Punkt $x_1 y_1$ geht, ist $y - y_1 = a(x - x_1)$, wo a die trigonometrische Tangente des Winkels, den diese Gerade mit der x-Achse bildet. Soll die Gerade Tangente an die Curve $y = f(x)$ sein, so ist $a = y_1'$, mithin die Gleichung der Tangente: $y - y_1 = y_1'(x - x_1)$.

II.

Ist $y = f(x)$ das Gesetz, nach dem sich ein Punkt auf einer Geraden bewegt, wobei y angiebt, wie weit der Punkt P nach x Sekunden von einem als Ausgangspunkt gewählten Punkt O entfernt ist, und ist nach x_1 Sekunden die Entfernung y_1, dann hat der Punkt in $x_1 - x$ Sekunden den Weg $y_1 - y$ zurückgelegt, seine Geschwindigkeit wäre also $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$, wenn die Geschwindigkeit constant bliebe, ändert sich dagegen die Geschwindigkeit, so kann man nur von der Geschwindigkeit in einem bestimmten Augenblick sprechen. Will man daher die Geschwindigkeit gerade nach x Sekunden ermitteln, so läfst man x_1 immer näher an x, und damit auch y_1 immer näher an y heranrücken, bis endlich die Punkte zusammenfallen, und man erhält dann für die Geschwindigkeit im Punkte P wieder den Grenzwert von $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$, wenn $x_1 = x$.

Genauer ist auch hier ganz ähnlich wie bei I. folgende Betrachtung:

Unter der Geschwindigkeit in einem Augenblicke versteht man den Weg, den der Körper in der nächsten Sekunde zurücklegen würde, wenn die Geschwindigkeit während dieser Zeit unverändert bliebe. Liegt nun P zwischen den Punkten P_2 und P_1, und ist die Geschwindigkeit von P_2 nach P_1 hin wachsend, sind ferner $OP_1 = y_1$ und $OP_2 = y_2$ die Entfernungen vom Nullpunkte nach x_1 resp. x_2 Sekunden und ist $x_1 > x_2$, so ist der Weg $y - y_2$. den der Punkt in $x - x_2$ Sekunden zurücklegt, offenbar kleiner, und ebenso der Weg $y_1 - y$, den er in $x_1 - x$ Sekunden durchläuft, gröfser, als derjenige, den er zurücklegen würde, wenn er sich während dieser Zeitabschnitte mit der Geschwindigkeit y' bewegen würde, die er im Punkte P hat,

$$\text{d. h. } y - y_2 < y'(x - x_2) \text{ und } y_1 - y > y'(x_1 - x),$$

$$\text{mithin } \frac{y - y_2}{x - x_2} < y' < \frac{y_1 - y}{x_1 - x}.$$

Die beiden Grenzen, zwischen denen y' liegt, nähern sich aber immer mehr, je näher P_1 und P_2 dem Punkte P kommt, sie werden gleich, wenn die Punkte zusammenfallen, folglich ist

$$y' = \lim \frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ für } x = x_1.$$

Zu demselben Resultat kommt man natürlich auch, wenn die Geschwindigkeit abnimmt.

Umgekehrt kann man dann auch aus der Ableitung auf die ursprüngliche Funktion, d. h. aus der Geschwindigkeit y' auf den Weg y schliefsen.

Die wichtigsten Anwendungen von dieser Beziehung zwischen dem Differentialquotient und der Geschwindigkeit eines Punktes wird naturgemäfs die Mechanik bieten, doch kann diesel auch zur näherungsweisen Berechnung der Wurzeln einer Gleichung dienen.

Besteht irgend eine Gleichung zwischen einer Unbekannten, und hat man dieselbe a Null reduciert, so dafs sie die Form annimmt $f(x) = 0$, so setze man zunächst $y = f(x)$, u nehme an, es bewege sich ein Punkt nach diesem Gesetze, wobei wieder x die Zeit und y Entfernung vom Nullpunkte sein möge, dann handelt es sich um die Frage, für welchen We von x ist $y = 0$, d. h. nach welcher Zeit wird der Punkt durch den Nullpunkt gehen. M wählt nun für x einen Wert x_1, für den der Punkt dem Nullpunkt möglichst nahe kommt, Entfernung sei y_1, so ist nur noch zu bestimmen, welche Zeit der Punkt braucht, um die Strecke y_1 zurückzulegen. Zu diesem Zweck berechnet man die Geschwindigkeit des Punktes dann ist annähernd die gewünschte Zeit $\frac{y_1}{y'}$. Dieser Wert ist zu x_1 hinzuzufügen oder davon abz ziehen, je nachdem sich der Punkt vor oder hinter dem Anfangspunkt befindet. Bei mehrfach Wiederholung dieses Verfahrens kann man jeden Grad von Genauigkeit erzielen.

III.

Fig. 2

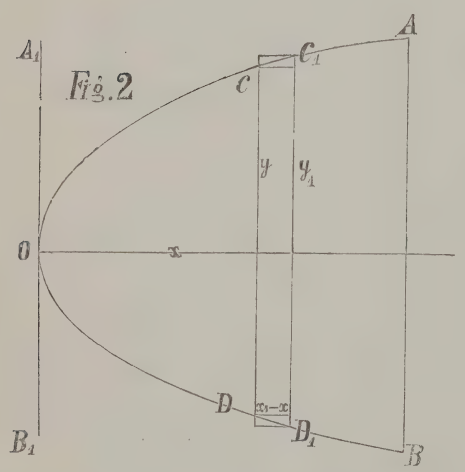
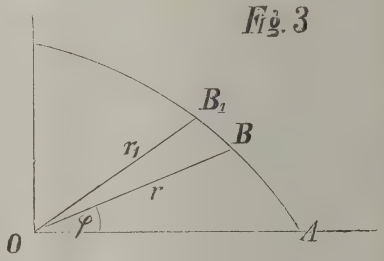


Fig. 3



a) Die Fläche AOB werde begrenzt von der Curve AOB und der Graden AB, u es sei A_1B_1 die durch O parallel zu AB gelegte Tangente. Denkt man sich nun A_1B_1 para mit sich selbst verschoben, so möge das Stück der Parallelen, welches von der Curve abgeschnit wird $CD = y$ eine Funktion der Entfernung von der Graden A_1B_1 sein. Bezeichnet man d Entfernung mit x, so sei $y = f(x)$ und ebenso $C_1D_1 = y_1 = f(x_1)$. Ist ferner die Flä $OCD = z$, $OC_1D_1 = z_1$, und die Curve in der Nähe von C im Wachsen begriffen, so $z_1 - z$ offenbar gröfser als das Rechteck über y mit der Höhe $x_1 - x$ und kleiner als Rechteck über y_1 und derselben Höhe.

Mithin $$y(x_1 - x) < z_1 - z < y_1(x_1 - x)$$

oder $$y < \frac{z_1 - z}{x_1 - x} < y'.$$

Hieraus folgt $z' = \lim \frac{z_1 - z}{x_1 - x} = y.$

Umgekehrt wird man aus dem Werte von $z' = y = f(x)$ auf den Inhalt der Fläche z hliefsen können.

b) Ist s (Fig. 3) der Sektor OAB, $s_1 = OAB_1$ und $OB(r) > OB_1(r_1)$, $\angle AOB = \varphi$, $OB_1 = \varphi_1$, dann ist $s_1 - s > \frac{r_1^2}{2} \sin(\varphi_1 - \varphi)$ und $s_1 - s < \frac{r^2}{2} \sin(\varphi_1 - \varphi)$, folglich

$$\frac{r_1^2}{2} \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi)}{\varphi_1 - \varphi} < \frac{s_1 - s}{\varphi_1 - \varphi} < \frac{r^2}{2} \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi)}{\varphi_1 - \varphi}.$$

Da nun für $\varphi_1 = \varphi$, $r_1 = r$ und $\frac{\sin(\varphi_1 - \varphi)}{\varphi_1 - \varphi} = 1$ wird, so ist

$$\lim \frac{s_1 - s}{\varphi_1 - \varphi} = \frac{r_2}{2}.$$

IV.

Das gleiche Verfahren wie in IIIa läfst sich auch auf einen Körper anwenden, der sich vischen 2 parallele Ebenen legen läfst, wenn der parallel zu diesen Ebenen gelegte Querschnitt ch als eine Funktion der Entfernung von einer dieser Ebenen ausdrücken läfst. Auch dann z' = y = f(x), nur bedeutet hier y den Querschnitt und z den Körper von der Anfangsebene s zu diesem Querschnitt.

Wir wollen uns vorläufig auf die hier angeführten Fälle beschränken, und um zu den nwendungen schreiten zu können, die Differentialquotienten der einfachsten Funktionen ableiten.

Wir haben gesehen, dafs der Differentialquotient einer Funktion $y = f(x)$ n $\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \lim \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$ für $x_1 = x$ ist. Wir bezeichnen denselben mit y' und umgekehrt n $\frac{x_1 - x}{y_1 - y}$ mit x', so dafs also $x' = \frac{1}{y'}$, was sich vorteilhaft bei einzelnen Ableitungen benutzen läfst.

1. $y = x + a$, $y_1 = x_1 + a$, $y_1 - y = x_1 - x$, $\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = 1.$

Dieser Quotient ist stets gleich 1, auch wenn x_1 immer näher an x heranrückt, er wird daher auch bleiben für den Grenzfall $x_1 = x$. Es ist also $y' = 1$. Ebenso ergiebt sich aus $= -x + a$, $y' = -1$. Mithin auch umgekehrt:

Wenn $y' = \pm 1$, ist $y = \pm x + a$.

Man ersieht hieraus, dafs bei der Ableitung ein constanter Summand verschwindet, daher nn auch umgekehrt bei der Bestimmung der Funktion aus der Ableitung stets eine constante röfse hinzugefügt werden. Diese Constante ist der Werth von y, den man erhält, wenn man $= o$ setzt, sie wird also selbst gleich Null sein, wenn für $x = o$ auch $y = o$ ist, was bei einchen Anwendungen durch passende Wahl des Anfangspunktes meist leicht bewirkt werden kann. den folgenden Beispielen soll diese constante Gröfse bei der Umkehrung fortgelassen werden.

2. Aus $y = ax$ ergiebt sich auf dieselbe Weise $y' = a$ und umgekehrt.

3. $$y = \frac{a}{x},\quad y_1 = \frac{a}{x_1},\quad y_1 - y = \frac{a}{x_1} - \frac{a}{x} = -a\frac{(x_1 - x)}{x_1 x}$$

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = -\frac{a}{x_1 x},\quad y' = -\frac{a}{x^2}.$$

Also umgekehrt: ist $y' = -\frac{a}{x^2}$, so ist $y = \frac{a}{x}$.

Ebenso wie aus den beiden letzten Beispielen, folgt auch allgemein für $y = af(x)$ $y' = af'(x)$, d. h. ein constanter Faktor kommt bei der Ableitung unverändert wieder vor.

4. $$y = x^n,\quad y_1 = {x_1}^n,\quad y_1 - y = {x_1}^n - x^n,\quad \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{{x_1}^n - x^n}{x_1 - x}$$

$$= {x_1}^{n-1} + {x_1}^{n-2}x + {x_1}^{n-3}x^2 + \ldots + x^{n-1}$$

$$y' = n x^{n-1}$$

5. Aus 4 folgt $x = \sqrt[n]{y}$ und $x' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{n x^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{y^{n-1}}}$.

Vertauscht man nun x mit y, so ergiebt sich ebenso aus $y = \sqrt[n]{x}$, $y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ od

aus $y = x^{\frac{1}{n}}$, $y' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$.

6. $$y = \frac{1}{x^n},\quad y_1 = \frac{1}{{x_1}^n},\quad y_1 - y = -\frac{{x_1}^n - x^n}{{x_1}^n x^n},$$

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = -\frac{{x_1}^n - x^n}{(x_1 - x){x_1}^n x^n},\quad \text{woraus } y' = -\frac{n x^{n-1}}{x^{nn}} = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

oder aus $y = x^{-n}$ folgt $y' = -n x^{n-1}$.

Die unter 4. angegebene Regel gilt daher allgemein, auch wenn n negativ oder gebroch ist. Es folgt daher auch umgekehrt aus $y' = n x^{n-1}$ stets $y = x^n$, d. h. man erhält aus d abgeleiteten Funktion die ursprüngliche, wenn man den Exponenten von x um 1 erhöht und d Coefficienten von x durch den so erhaltenen Exponenten dividiert. Wendet man diese Re auf $y' = x^n$ an, so erhält man $y = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$.

7. $$y = \sin x,\quad y_1 = \sin x_1,\quad \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\sin\frac{x_1 - x}{2}}{\frac{x_1 - x}{2}} \cos\frac{x_1 + x}{2}$$

Da nun $\lim \frac{\sin\frac{x_1 - x}{2}}{\frac{x_1 - x}{2}} = 1$, so ist $y' = \cos x$.

Aus $y' = \cos x$ erhält man daher $y = \sin x$.

8. Aus 7. ergiebt sich ferner $x = \arcsin y$ und $x' = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$, u

wenn x und y vertauscht werden, folgt aus $y = \arcsin x$, $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ und umgekehrt.

9. $y = \cos x, \quad \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = -\frac{\sin\frac{x_1 - x}{2}}{\frac{x_1 - x}{2}} \sin\frac{x_1 + x}{2}, \quad y' = -\sin x.$

Umgekehrt ergiebt sich aus $y' = \sin x$, $y = -\cos x$.

10. Aus 9. folgt $x = \arccos y, \quad x_1 = -\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$, und wenn $= \arccos x$, ist $y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ und umgekehrt.

Bevor wir zu den folgenden Ableitungen übergehen, sollen erst die allgemeinen Regeln ür die Behandlung von Summen, Produkten und Quotienten mehrerer Funktionen aufgestellt erden.

11. Ist $y = f(x) + \varphi(x) + \psi(x)$ etc. und bezeichnet man der Kürze wegen die einzelnen unktionen mit u, v, w etc., und die dem Werte x_1 entsprechenden Werte dieser Funktionen it u_1, v_1, w_1 . . . , während y in y_1 übergeht, denn ist $y_1 - y = u_1 - u + v_1 - v + w_1 - w \ldots$,

$$\text{mithin } \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{u_1 - u}{x_1 - x} + \frac{x_1 - x}{v_1 - v} + \frac{w_1 - w}{x_1 - x} \ldots$$

$$y' = u' + v' + w' \ldots$$

12. $y = uv, \quad y_1 - y = u_1 v_1 - uv = u_1(v_1 - v) + v(u_1 - u)$

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = u_1 \frac{v_1 - v}{x_1 - x} + v \frac{u_1 - u}{x_1 - x}; \quad y' = uv' + vu'.$$

13. $y = \frac{u}{v}, \quad y_1 - y = \frac{u_1 v - v_1 u}{v \cdot v_1} = \frac{v(u_1 - u) - u(v_1 - v)}{v \cdot v_1}$

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{v\frac{u_1 - u}{x_1 - x} - u\frac{v_1 - v}{x_1 - x}}{v \cdot v}, \quad y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

14. $y = f(u), \text{ wo } u = \varphi(x)$

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(u_1) - f(u)}{x_1 - x} = \frac{f(u_1) - f(u)}{u_1 - u} \cdot \frac{u_1 - u}{x_1 - x}$$

$$y' = f'(u)u'.$$

Wenden wir die letzte Regel z. B. auf $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ an, worin $u = a^2 - x^2$, $u' = -2x$, ist $y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} u' = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

15. $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, unter Anwendung der Regel 13. erhält man $y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$ $= \frac{1}{\cos^2 x}$, mithin für $x = \operatorname{arctg} y$, $x' = \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}$, und wenn $y = \operatorname{arctg} x$, $= \frac{1}{1 + x^2}$ und umgekehrt.

16. $y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}; \quad y' = -\frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$. Für $x = \operatorname{arccot} y$ erhält man $= -\sin^2 x = -\frac{1}{1 + \cot^2 x} = -\frac{1}{1 + y^2}$, ist aber $y = \operatorname{arccot} x$, dann ist $y' = -\frac{1}{1 + x^2}$ und ngekehrt.

17. $$y = a^x;\ \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{a^{x_1} - a^x}{x_1 - x} = a^x \frac{(a^{x_1 - x} - 1)}{x_1 - x}.$$

Da a^x sich nicht ändert, wenn x_1 mit x zusammenfällt, so handelt es sich nur um den Grenzwert von $\frac{a^{x_1 - x} - 1}{x_1 - x}$.

Setzt man hierin a^n statt a, so erhält man:

$$\frac{a^{n(x_1 - x)} - 1}{x_1 - x} = n \left[\frac{a^{n(x_1 - x)} - 1}{n(x_1 - x)}\right].$$

Nun ist aber der Grenzwert des Ausdruckes in der eckigen Klammer derselbe, wie $\lim \frac{a^{(x_1 - x)} - 1}{x_1 - x}$, daraus geht hervor, dafs dieser Grenzwert n mal so grofs wird, wenn man a statt a^n setzt. Es kann daher $\lim \frac{a^{(x_1 - x)} - 1}{x_1 - x}$ alle möglichen Werte annehmen, je nach der Wahl von a, mithin mufs es auch einen Wert von a geben, für den dieser Grenzwert $= 1$ wird. Wir bezeichnen diesen Wert von a mit e, so dafs $\lim \frac{e^{x_1 - x} - 1}{x_1 - x} = 1$. Diese Gröfse e, die nachher bestimmt werden soll, ist die Basis des natürlichen Logarithmensystems. Ist also z. B. $a = e^b$ so ist $b = la$ und $\lim \frac{a^{x_1 - x} - 1}{x_1 - x} = b \frac{e^{b(x_1 - x)} - 1}{b(x_1 - x)} = b = la.$

Mithin $$\lim \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = y' = a^x la.$$

18. Aus 17 folgt ferner $x = \log^a y$, $x' = \frac{1}{a^x la} = \frac{1}{y la}$.

Ist daher $y = \log^a x$, so ist $y' = \frac{1}{x la}$.

Für $y = e^x$ ergiebt sich auch $y' = e^x$, und für $y = lx$ $y' = \frac{1}{x}$ und umgekehrt.

e^x läfst sich sehr leicht nach der Methode der unbestimmten Coefficienten in eine Reihe entwickeln.

Es sei $y = e^x = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$

dann ist $y' = e^x = a_1 + 2\,a_2 x + 3\,a_3 x^2 + \ldots$

mithin, da für $x = 0$ aus der ersten Gleichung $a = 1$ folgt,

$$1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots = a_1 + 2\,a_2 x + 3\,a_3 x^2 + 4\,a_4 x^3 + \ldots$$

Folglich ist $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2!}$, $a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{1}{3!}$ etc.

$$\text{und } e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\text{also } e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = 2{,}718281828\ldots$$

Auf dieselbe Weise lassen sich auch die Reihen für $\sin x$, $\cos x$ etc. ableiten. Auch der binomische Satz ergiebt sich mit Hilfe dieses Verfahrens auf sehr einfache Weise:

Ist $y = (1 + x)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$

so folgt zunächst für $x = 0$ $a_0 = 1$. Ferner ist:

$$y' = n(1 + x)^{n-1} = a_1 + 2\,a_2 x + 3\,a_3 x^2 + 4\,a_4 x^3 + \ldots$$

Multipliziert man mit $\frac{1+x}{n}$, so erhält man:

$$(1+x)^n = \frac{a_1}{n} + \frac{2a_2x}{n} + \frac{3a_3x^2}{n} + \frac{4a_4x^3}{n} + \ldots$$
$$+ \frac{a_1x}{n} + \frac{2a_2x^2}{n} + \frac{3a_3x^3}{n} + \ldots$$

Mithin ist $\frac{a_1}{n} = a_0 = 1$; $a_1 = n$

$$\frac{2a_2}{n} + \frac{a_1}{n} = a_1;\ a_2 = \frac{a_1(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2!}$$
$$\frac{3a_3}{n} + \frac{2a_2}{n} = a_2;\ a_3 = \frac{a_2(n-2)}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

Allgemein $a_s = \frac{a_{s-1}(n-s+1)}{s} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-s+1)}{s!}$

Man erhält also:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-s+1)x^s}{s!} + \ldots$$

Da nun aus $y = x^n$, $y' = n\,x^{n-1}$ folgte, auch wenn n negativ oder gebrochen war, so hat diese Herleitung auch für negative und gebrochene Exponenten Giltigkeit. Ist n eine ganze Zahl, dann schreitet die Reihe bis x^n fort, da für alle folgenden Potenzen von x der Coefficient gleich Null wird. Ist n negativ oder gebrochen, so wird die Reihe unendlich, für welchen Fall noch die Convergenzbedingung zu untersuchen wäre.

Setzt man $x = \frac{b}{a}$ und multipliciert beide Seiten der Gleichung mit a^n, so ergiebt sich:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-s+1)}{s!}a^{n-s}b^s + \ldots$$

Da die Ableitungen im allgemeinen selbst wieder eine Funktion von x sind, so läfst sich aus ihnen auf dieselbe Weise wieder eine Ableitung bilden. Ist nämlich $y' = f'(x)$ und sind y_1' und x_1' entsprechende Werte, so ist $\lim \frac{y_1' - y'}{x_1 - x} = \lim \frac{f'(x_1) - f'(x)}{x_1 - x}$, wofür wir der Kürze wegen schreiben

$$y'' = f''(x).$$

Wird z. B. durch $y = f(x)$ die Bewegung eines Punktes dargestellt, dann ist $\frac{y_1' - y'}{x_1 - x}$ die Zunahme an Geschwindigkeit in einer Sekunde oder die Beschleunigung, wenn diese Zunahme constant ist, und $\lim \frac{y_1' - y'}{x_1 - x} = y''$ die Beschleunigung nach x Sekunden bei veränderlicher Beschleunigung.

Um eine Anwendung der 2. Ableitung und zugleich der in 11. und 12. angeführt Regeln zu geben, gehen wir von einem Ausdruck aus, der später Verwendung finden soll.

Es sei $xy' - yx' = c$, worin x und y Funktionen von t sein mögen und $y' = \lim \frac{y_1 -}{t_1 -}$

$x' = \lim \frac{x_1 - x}{t_1 - t}$ für $t_1 = t$.

Dann ist $x'y' + xy'' - y'x' - yx'' = 0$ oder $xy'' - yx'' = 0$.

Mithin auch umgekehrt, wenn $xy'' - yx'' = 0$, so ist $xy' - yx' = c$.

Die bisher angeführten Regeln bieten ein hinreichendes Material zur praktischen E handlung der in I.—IV. angeführten Fälle, es soll nun im folgenden für jeden derselben d Verfahren an einigen Beispielen gezeigt werden, wobei wir die entsprechenden Abschnitte n denselben Ziffern I.—IV. bezeichnen wollen.

I.

Die Benutzung der Differentialquotienten zur Bestimmung des Verlaufs einer Curve oben angedeutet und braucht wohl nicht weiter erörtert zu werden; wie weit hierbei 2. Differentialquotienten hinzuzuziehen sind zur Bestimmung der Lage der Curven, von Wend punkten etc. wird von Zeit und Umständen abhängen. Es sollen nur zwei Aufgaben aus d Maxima- und Minimarechnung angeführt werden, die für die Physik von besonderer Wichtigkeit sin

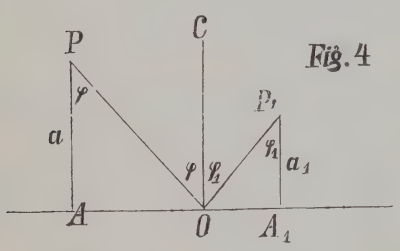


Fig. 4

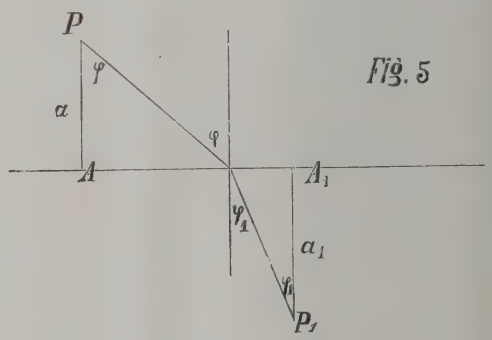


Fig. 5

Gegeben eine Gerade und aufserhalb derselben 2 Punkte P und P_1 (Fig. 4), gesucht Punkt O auf der Geraden, so dafs die Summe der Entfernungen dieses Punktes von den beid gegebenen ein Minimum wird.

Es seien die Entfernungen der Punkte P und P_1 von der Geraden $PA = a$, $P_1A_1 =$ $AA_1 = b$ und $AO = x$, mithin $OA_1 = b - x$, dann ist $OP = \sqrt{a^2 + x^2}$, $OP_1 = \sqrt{a_1^2 + (b -$

Die Summe der Entfernung ist $y = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{a_1^2 + (b - x)^2}$ oder $y = \sqrt{u} + \sqrt{}$ wo $u = a^2 + x^2$, $v = a_1^2 + (b - x)^2$. Denkt man sich nun, es stelle die Gleichung $y = \sqrt{u} + \sqrt{}$ eine Curve dar, so handelt es sich um die Frage, für welchen Wert von x wird die Ordin ein Minimum? Ist y ein Minimum, so ist die in dem Endpunkt von y an die Curve gezog Tangente der xAchse parallel, und daher der Winkel, den sie mit der Abscissenachse bildet u seine trigonometrische Tangente gleich Null; d. h. $y' = 0$.

Es ist aber $y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} u' + \frac{1}{2\sqrt{v}} v'$ und $u' = 2x$, $v' = -2(b-x)$ also $y' = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{b-x}{\sqrt{a_1^2+(b-x)^2}}$ oder, wenn man den Winkel $APO = POC$ mit φ und $A_1P_1O = P_1OC$ mit φ_1 bezeichnet, wo OC das in O errichtete Lot ist, so wird für das Minimum

$$y' = \sin\varphi - \sin\varphi_1 = 0 \text{ oder } \sin\varphi = \sin\varphi_1,\ \varphi = \varphi_1.$$

Bewegt sich ein Punkt von P nach der Graden und von dort nach P_1 mit der constanten Geschwindigkeit c, so wird der kürzeste Weg POP_1 auch in der kürzesten Zeit zurückgelegt, was für den Stofs elastischer Körper, sowie für das Reflexionsgesetz von grofser Bedeutung ist.

Befinden sich die beiden Punkte auf verschiedenen Seiten der Graden (Fig. 5), und bewegt sich der Punkt auf der einen Seite der Graden mit der Geschwindigkeit c, auf der anderen mit der Geschwindigkeit c_1, dann wird der Weg, den der Punkt in der kürzesten Zeit zurücklegt, um von P nach P_1 zu gelangen, nicht die Grade PP_1 sein, sondern etwa die gebrochene Linie POP_1. Die Bezeichnungen seien dieselben, wie vorher, und es werde PO in der Zeit t, P_1O in der Zeit t_1 zurückgelegt, dann ist $PO = ct = \sqrt{a^2+x^2}$, $P_1O = c_1t_1 = \sqrt{a_1^2+(b-x)^2}$,

$$\text{mithin } y = t + t_1 = \frac{1}{c}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{1}{c_1}\sqrt{a_1^2+(b-x)^2}$$

$$y' = \frac{x}{c\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{b-x}{c_1\sqrt{a_1^2+(b-x)^2}} = \frac{\sin\varphi}{c} = \frac{\sin\varphi_1}{c_1}.$$

Woraus man für das Minimum das Brechungsgesetz erhält $\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_1} = \frac{c}{c_1}$, oder wenn $\frac{c}{c_1} = n$ gesetzt wird:

$$\sin\varphi = n\sin\varphi_1.$$

II.

Unter den zahlreichen Anwendungen, welche die Mechanik bietet, mache ich nur darauf aufmerksam, dafs sich die Fallgesetze unmittelbar mit Hilfe der aufgestellten Regeln ableiten lassen. Aus $y'' = g$, folgt die Geschwindigkeit $y' = gt$ und der Weg $y = \frac{1}{2}gt^2$.

Ausführlicher sollen nur die Kepplerschen Gesetze und das Pendelgesetz behandelt werden, da namentlich diese beiden vielfach in Physikbüchern und Zeitschriften zum Gegenstand sogenannter elementarer Behandlung gemacht worden sind, aber teils nur zu Scheinbeweisen geführt haben, teils an die Vorstellungskraft der Schüler nach meiner Ansicht viel gröfsere Anforderungen stellen, als dies bei Benutzung der Differentialrechnung der Fall ist. Bei der Ableitung der Kepplerschen Gesetze benutze ich im wesentlichen das von Jacobi angegebene Verfahren.

Fig. 6

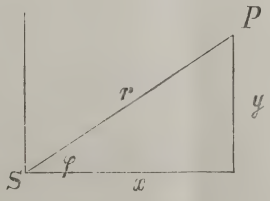
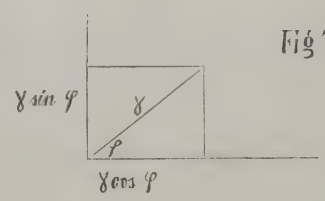


Fig 7



Es stelle P (Fig. 6) den Ort eines Planeten und S den der Sonne dar, die Koordinat des Punktes P, bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt S, sei x und y, $PS = r$ bilde mit der Abscissenachse den Winkel φ, dann ist

1. $$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi.$$

Ist nun γ die Anziehungskraft oder die Beschleunigung, die der Punkt P in jede Augenblick nach S zu erfährt, so ist nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz

2. $$\gamma = \frac{k}{r^2},$$

und die Componenten dieser Kraft oder die Beschleunigungen in der Richtung der x- und y-Ach $\gamma\cos\varphi$ und $\gamma\sin\varphi$, oder wenn man die Richtung von S nach P als positiv bezeichnet, $-\gamma\cos$ und $-\gamma\sin\varphi$. Setzt man für γ, $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ die Werte aus 1. und 2. ein, so erhält m für diese Componenten $-\frac{kx}{r^3}$ und $-\frac{ky}{r^3}$. Es sind nun sowohl r und φ als auch x und y n der Zeit veränderlich, d. h. Funktionen der Zeit. Es soll daher, um Verwechslungen zu v meiden, die oben angegebene Schreibweise für die Differentialquotienten benutzt werden. I Geschwindigkeit in der Richtung der x-Achse ist $x' = \frac{dx}{dt}$, in der Richtung der y-Achse $y' = \frac{}{}$ und die Beschleunigungen in der Richtung dieser Achsen $x'' = \frac{dx'}{dt}$, $y'' = \frac{dy'}{dt}$. Man erhält dah die beiden Gleichungen:

3. $$\frac{dx'}{dt} = -\frac{kx}{r^3},\ \frac{dy'}{dt} = -\frac{ky}{r^3},\ \text{mithin}\ x\frac{dy'}{dt} = y\frac{dx'}{dt}\ \text{oder}\ x\frac{dy'}{dt} - y\frac{dx'}{dt} = 0.$$

Hieraus folgt, wie früher gezeigt wurde:

4. $$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c.$$

Aus 1. ergiebt sich aber unter Anwendung der Regel für die Differentiation eines P duktes zweier Funktionen:

$$\frac{dx}{dt} = -r\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} + \cos\varphi\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = r\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} + \sin\varphi\frac{dr}{dt}$$

$$y\frac{dx}{dt} = -r^2\sin^2\varphi\frac{d\varphi}{dt} + r\sin\varphi\cos\varphi\frac{dr}{dt}$$

$$x\frac{dy}{dt} = r^2\cos^2\varphi\frac{d\varphi}{dt} + r\sin\varphi\cos\varphi\frac{dr}{dt}$$

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = r^2\frac{d\varphi}{dt} = c\ \text{oder}$$

5. $$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}.$$

Hieraus erhält man durch Division mit 3.:

$$\frac{dx'}{d\varphi} = -\frac{kx}{cr} = -\frac{k}{c}\cos\varphi,\quad \frac{dy'}{d\varphi} = -\frac{ky}{cr} = -\frac{k}{c}\sin\varphi.$$

Folglich $x' = \frac{dx}{dt} = -\frac{k}{c}\sin\varphi + c_1$, $y' = \frac{dy}{dt} = \frac{k}{c}\cos\varphi + c_2$.

Setzt man diese Werte in 4. ein und $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, so erhält man:

$$r\cos\varphi\left(\frac{k}{c}\cos\varphi + c_2\right) - r\sin\varphi\left(-\frac{k}{c}\sin\varphi + c_1\right) = c$$

$$\frac{k}{c}r + c_2 r\cos\varphi - c_1 r\sin\varphi = c.$$

6. $$r = \frac{c}{\frac{k}{c} + c_2\cos\varphi - c_1\sin\varphi}.$$

Dies ist die Gleichung eines Kegelschnitts in Polarkoordinaten, wenn der Brennpunkt oordinatenanfangspunkt, und da die Planeten die Sonne umkreisen, mufs es eine Ellipse sein. Damit ist das erste Kepplersche Gesetz bewiesen.

Wir wollen nun noch die Constanten bestimmen und die Gleichung auf die gebräuchliche orm $r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$ bringen.

Rechnet man φ von der grofsen Hauptachse, dann ist für $\varphi = 0$ $x' = 0$, und da $= -\frac{k}{c}\sin\varphi + c_1$ auch $c_1 = 0$.

Für $\varphi = 0$ ist $r = a + e$, für $\varphi = \pi$ ist $r = a - e$, setzt man dies in die Gleichung 6. ein, erhält man:

$$a + e = \frac{c}{\frac{k}{c} + c_2}, \quad a - e = \frac{c}{\frac{k}{c} - c_2} \quad \text{mithin:}$$

$$\frac{k}{c} + c_2 = \frac{c}{a+e}, \quad \frac{k}{c} - c_2 = \frac{c}{a-e}, \quad \frac{2k}{c} = \frac{2ac}{a^2 - e^2}.$$

$$\frac{k}{c} = \frac{ac}{b^2}, \quad c^2 = \frac{b^2 k}{a}.$$

$$c_2 = \frac{k}{c} - \frac{c}{a-e} = \frac{ac}{b^2} - \frac{c(a+e)}{b^2} = -\frac{ce}{b^2} \text{ und } cc_2 = -\frac{ke}{a}.$$

Nun ist aber $r = \frac{c^2}{k + cc_1\cos\varphi} = \frac{\frac{b^2 k}{a}}{k - \frac{ke}{a}\cos\varphi} = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - \frac{e}{a}\cos\varphi}$

und da $\frac{b^2}{a} = p$, $\frac{e}{a} = \varepsilon$

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}.$$

Es war $r^2\frac{d\varphi}{dt} = c$, mithin mit Benutzung von III b. $\frac{1}{2}r^2\frac{d\varphi}{dt} = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}b\sqrt{\frac{k}{a}}$, folgch $s = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{k}{a}}t + c_3$.

Da für $t = 0$ auch $s = 0$, ist $c_3 = 0$, also $s = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{k}{a}}t$, ebenso $s_1 = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{k}{a}}t_1$, daher $s_1 = t : t_1$, d. h.:

Die Radienvectoren beschreiben in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume. (2. Kepplersches esetz.)

Ist T die ganze Umlaufszeit, dann wird $s = ab\pi$, $ab\pi = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{k}{a}}\,T$, $T = \frac{2\pi a\sqrt{}}{\sqrt{k}}$

$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{k}$, ebenso wird $T_1{}^2 = \frac{4\pi^2 a_1{}^3}{k}$ und $T^2 : T_1{}^2 = a^3 : a_1{}^3$.

Die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich wie die Kuben der grofsen Halbachs (3. Kepplersches Gesetz.)

Ableitung des Pendelgesetzes.

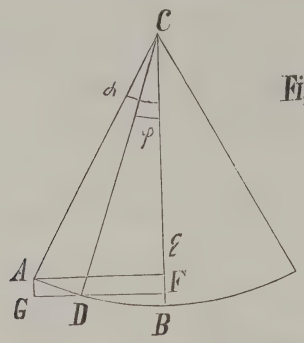


Fig. 8

Das Pendel, dessen Länge $BC = l$, sei um den Winkel $ACB = \alpha$ aus der Gleichgewich lage abgelenkt; nach t Sekunden möge es die Lage CD annehmen. Es sei $\angle\ DCB = \varphi$; fer ziehe man AE und $DF \perp BC$ und $AG \perp GF$, dann ist nach einer Folgerung aus dem Ges für die schiefe Ebene die Geschwindigkeit in D gerade so grofs, als wenn der Körper von nach G senkrecht herabfällt, diese Geschwindigkeit ist aber $v = \sqrt{2g\,EF}$, da $EF = AG$. N ist aber $EF = CF - CE = l(\cos\varphi - \cos\alpha) = 2l\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)$.

Ist nun der Winkel α und mithin auch φ sehr klein, und nur für diesen Fall soll Pendelgesetz abgeleitet werden, so kann man für den sinus den Bogen setzen, und man erhä

$$EF = \frac{l}{2}(\alpha^2 - \varphi^2),\quad v = \sqrt{g\,l(\alpha^2 - \varphi^2)} = \alpha\sqrt{g\,l\left(1 - \left(\frac{\varphi}{\alpha}\right)^2\right)}$$

und wenn man $\frac{\varphi}{\alpha} = y$ setzt $v = \alpha\sqrt{g\,l(1 - y^2)}$.

Bezeichnet man AD mit x, dann ist $x = AB - AD = l\alpha - l\varphi = l\alpha - l\alpha y$, und x und φ sich mit der Zeit ändern, so ist die Geschwindigkeit in D auch $\frac{dx}{dt} = -\alpha l\frac{dy}{dt}$, folgli

$$-\alpha l\frac{dy}{dt} = \alpha\sqrt{g l\,(1 - y^2)},\ \frac{dt}{dy} = -\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\arccos y + c = \sqrt{\frac{l}{g}}\arccos\frac{\varphi}{\alpha} + c.$$

Da für $\varphi = \alpha$ $\arccos 1 = 0$ und $t = 0$, so ist auch $c = 0$, mithin $t = \sqrt{\frac{l}{g}}\arccos\frac{\varphi}{\alpha}$.

die Zeit zu finden, in der das Pendel eine halbe Schwingung macht, ist $\varphi = o$ zu setzen, und $\arccos o = \frac{\pi}{2}$, wird $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}$, also für eine einfache Schwingung $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Als Beispiel für die näherungsweise Berechnung der Wurzeln einer Gleichung wollen wir

$\sqrt[5]{35}$ berechnen. Setzt man $\sqrt[5]{35} = x$, so handelt es sich um die Auflösung der Gleichung $x^5 - 35 = 0$. Es sei nun $x^5 - 35 = y$, und es bewege sich ein Punkt nach diesem Gesetz auf er Graden, so handelt es sich um die Frage, nach welcher Zeit wird der Punkt durch den lpunkt gehen?

Die Geschwindigkeit ist $y' = 5x^4$. Für $x = 2$ wird $y = -3y' = 80$, und da der Punkt, aus der Gleichung leicht ersichtlich, von links kommt, so ist der Wert 2 zu klein, es ist zu bestimmen, wieviel Zeit der Punkt noch braucht, um die Strecke von 3 Mafseinheiten ückzulegen. Diese Zeit ist aber $3 : 80 = 0{,}0375$, mithin $x = 2{,}0375$. Die Aufgabe wäre mit gelöst, wenn die Geschwindigkeit constant bliebe, da sie sich aber fortwährend ändert, st auch dieser Wert nur annäherungsweise richtig, durch Wiederholung dieses Verfahrens n man aber die Näherung immer weiter treiben. Um unnötige Rechnung zu ersparen, men wir für x nur die beiden ersten von Null verschiedenen Stellen nach dem Komma und en $x = 2{,}037$, dann ergiebt sich $y = 0{,}017567$, $y' = 86{,}08632$.

Der Punkt befindet sich jetzt also bereits rechts vom Nullpunkt, mithin ist der Wert x zu grofs, und es ist die Zeit, die er braucht, um die Strecke $0{,}017567$ zurückzulegen, von 37 abzuziehen. Diese Zeit ist jetzt $0{,}017567 : 86{,}08632 = 0{,}0008313$. Folglich $x = 2{,}0361687$, Wert, der schon bis zur 6. Stelle genau ist. Eine nochmalige Wiederholung giebt x auf Stellen genau. Die Hinzuziehung der Beschleunigung bei der Berechnung der Zeit erschwert Verfahren unnötig und führt auch nicht schneller zum Ziel.

III.

Die unter III angegebene Methode der Flächenberechnung soll auf das Dreieck, Parabel, s und Ellipse angewendet werden.

1. Flächenberechnung des Dreiecks.

Zieht man durch die Spitze O des Dreiecks eine Parallele zu der Grundlinie $AB = g$ und chiebt dieselbe parallel mit sich selbst bis $A_1 B_1 = y$, nennt die Entfernung der Graden y O x, während die Höhe des Dreiecks h sein möge, so ist $y = \frac{g}{h} x = z'$, folglich $z = \frac{1}{2} \frac{g}{h} x^2$.

Die Constante verschwindet, da für $x = 0$ auch $z = 0$.

Ist $x = h$, so erhält man den Inhalt des ganzen Dreiecks.

$$\Delta = \frac{1}{2} g h.$$

2. Flächenberechnung der Parabel.

Bezeichnet man mit y die parallel zur Ordinatenachse gezogene Sehne, so ist

$$y = 2\sqrt{2px} = z', \quad z = \frac{4}{3}\sqrt{2p}\, x^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} x \sqrt{2px}, \quad z = \frac{2}{3} x y$$

$\frac{2}{3}$ des um die Parabelfläche beschriebenen Rechtecks.

3. Flächenberechnung des Kreises und der Ellipse.

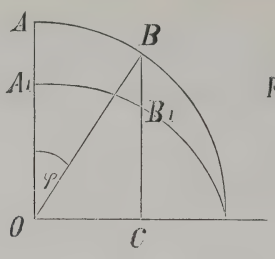


Fig. 9

Ist a der Radius des Kreises, so ist nach III b $\frac{ds}{d\varphi} = \frac{1}{2}a^2$, mithin $s = \frac{1}{2}a^2\varphi$, die C stante verschwindet, wenn φ von AO aus gerechnet wird. Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ erhält man den Inh des Kreisquadranten $\frac{K}{4} = \frac{a^2\pi}{4}$, folglich $K = a^2\pi$.

Die Fläche zwischen AO und BC ist, wie leicht ersichtlich (Fig. 9)

$$z = \frac{1}{2}a^2\varphi + \frac{xy}{2}, \quad \text{wenn } OC = x, \quad BC = y.$$

Da nun $\varphi = \arcsin\frac{x}{a}$ und $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, so ist $z = \frac{1}{2}a^2 \arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}$.

Es ist aber $y = z' = \sqrt{a^2 - x^2}$,

daher mufs $\sqrt{a^2 - x^2}$ die Ableitung von $\frac{1}{2}a^2 \arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}$ sein, was sich auch direkt nachweisen läfst.

Für die Ellipse ist $y = z' = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Dieser Ausdruck unterscheidet sich von d des Kreises nur durch den constanten Faktor $\frac{b}{a}$, daher kann sich auch die Funktion z o die Fläche der Ellipse zwischen OA_1 und B_1C nur durch diesen Faktor von der entsprechen Fläche des Kreises unterscheiden. Man erhält daher für die Ellipse:

$$z = \frac{b}{2a}\left(a^2 \arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2}\right).$$

Hieraus folgt für $x = a$: $\frac{E}{4} = \frac{ab\pi}{4}$, $E = ab\pi$.

IV.

Die Volumina der Körper, die in den Lehrbüchern der Elementarmathematik behan zu werden pflegen, ergeben sich nach der angegebenen Methode ohne Schwierigkeit. So z. B. für die Kugel jeder Querschnitt $\pi\varrho^2 = 2\pi rx - \pi x^2 = z'$, mithin $z = \pi r x^2 - \frac{\pi x^3}{3}$, wo für $x = h$ der Inhalt des Kugelsegments $S = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$.

Auch der Beweis, dafs der Satz vom Körperstumpf für alle Körper gilt, die zwischen i parallelen Ebenen liegen oder sich legen lassen, und deren parallel zu diesen Ebenen egten Querschnitte sich durch eine Funktion 3. Grades des Abstandes x ausdrücken läfst, hler, Elementarmathematik) ist hiernach sehr einfach.

Aus $y = a + bx + cx^2 + dx^3 = z'$ folgt $z = ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} + \frac{dx^4}{4}$.

Nun ist aber $g = a$, $k = a + bh + ch^2 + dh^3$ und $4m = 4a + 2bh + ch^2 + \frac{dh^3}{2}$.

Daher $$I = \frac{h}{6}(g + k + 4m) = ah + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4},$$

mit dem vorhin gefundenen Wert von z übereinstimmt, wenn $x = h$ gesetzt wird.

Für das durch Rotation um die kleine Achse entstehende Ellipsoid ist $g = 0$, $k = 0$, $= \pi a^2$, $h = 2b$, mithin $I = \frac{4}{3}\pi a^2 b$.

Für das Paraboloid, das durch Rotation um die x-Achse entsteht, ist jeder Querschnitt, der allel ist zu der im Scheitelpunkt an das Paraboloid gelegten Tangentialebene $\pi y^2 = 2p\pi x = z'$.

Folglich $z = p\pi x^2 = \frac{\pi x y^2}{2}$, d. h. gleich der Hälfte des umgeschriebenen Cylinders.

Nicht ganz so einfache Beziehungen, wie bei der Flächen- und Körperberechnung, lassen bei der Bestimmung des Bogens einer Fläche oder der Oberfläche eines Körpers aufstellen. h ergeben sich auch hier die Resultate sehr leicht in der bisher angewandten Weise der nzbetrachtung.

Es sei (Fig. 1) $CP = s$, $CP_1 = s_1$, also $\overset{\frown}{PP_1} = s_1 - s$. Der Durchschnittspunkt der Tan- en in P mit der Ordinate in P_1 sei Q, dann ist $PQ > s_1 - s > \overline{PP_1}$ oder:

$$\frac{x_1 - x}{\cos\alpha} > s_1 - s > \frac{x_1 - x}{\cos\alpha_1}, \quad \frac{1}{\cos\alpha} > \frac{s_1 - s}{x_1 - x} > \frac{1}{\cos\alpha_1}.$$

$$\lim \frac{s_1 - s}{x_1 - x} = \frac{ds}{dx} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \sqrt{1 + y'^2}.$$

Bezeichnet man ferner die durch Rotation von CP und CP_1 um die x-Achse entstehenden hen mit z und z_1, so ist $z_1 - z$ gröfser als der Mantel des abgestumpften Kegels, dessen ndrifs die Radien y und y_1 haben, und kleiner als der Mantel des Kegels mit den Radien nd y_2, wo y_2 die bis Q verlängerte Ordinate sein möge; d. h.

$$\pi(y + y_1)\frac{x_1 - x}{\cos\alpha_1} < z_1 - z < \pi(y + y_2)\frac{x_1 - x}{\cos\alpha},$$

$$\frac{\pi(y + y_1)}{\cos\alpha_1} < \frac{z_1 - z}{x_1 - x} < \frac{\pi(y + y_2)}{\cos\alpha}.$$

Nun fällt aber zugleich mit x_1 und x, y_1 und y_2 mit y, φ_1 mit φ zusammen, folglich ist:

$$\lim \frac{z_1 - z}{x_1 - x} = \frac{dz}{dx} = \frac{2\pi y}{\cos\alpha} = 2\pi y\sqrt{1 + y'^2}.$$

Als Beispiel sollen hier nur die Ellipse und das Rotationsellipsoid dienen, wegen der htigkeit ihrer Anwendung auf die Erde.

Für die Ellipse ist $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $y' = \frac{-bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$, woraus sich nach einiger U

formung $\frac{ds}{dx} = \sqrt{\frac{a^2 - \varepsilon^2 x^2}{a^2 - x^2}}$ ergiebt, wenn $\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$. Setzt man noch $x = a\xi$, dann wird:

$$\frac{ds}{dx} = \frac{ds}{a\,d\xi} = \sqrt{\frac{1 - \varepsilon^2\xi^2}{1 - \xi^2}}$$

und wenn man den Zähler nach dem binomischen Satz entwickelt, was erlaubt ist, da sow ε^2 als $\xi^2 < 1$, so erhält man:

$$\frac{ds}{d\xi} = a\left(\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} - \frac{\frac{1}{2}\varepsilon^2\xi^2}{\sqrt{1-\xi^2}} - \frac{\frac{1}{8}\varepsilon^4\xi^4}{\sqrt{1-\xi^2}} \ldots\right).$$

Ist ε sehr klein, so kann man ohne merklichem Fehler die Glieder von ε^4 ab fortlas und man erhält dann näherungsweise:

$$\frac{ds}{d\xi} = a\left[\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} - \frac{1}{2}\varepsilon^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} - \sqrt{1-\xi^2}\right)\right]$$

$$s = a\left[\arcsin\xi - \frac{1}{2}\varepsilon^2\left(\arcsin\xi - \frac{1}{2}\xi\sqrt{1-\xi^2} - \frac{1}{2}\arcsin\xi\right)\right]$$

$$s = a\left(\arcsin\frac{x}{a} - \frac{1}{4}\varepsilon^2\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{4}\varepsilon^2\left(\frac{x}{a}\right)^2\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right).$$

Ist $x = a$, so erhält man den Bogen der Viertelellipse $s = \frac{a\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2\right)$.

$a = 6377{,}4$ km, $b = 6356{,}1$ km erhält man den Meridian der Erde $u = 2a\pi\,0{,}99\,827 = 40\,000$

Die Oberfläche des durch Rotation um die x-Achse entstandenen Ellipsoids findet man a

$$\frac{dz}{dx} = 2\pi y\sqrt{\frac{a^2 - \varepsilon^2x^2}{a^2 - x^2}} = \frac{2\pi b}{a}\sqrt{a^2 - \varepsilon^2x^2} = \frac{2\pi b\varepsilon}{a}\sqrt{\frac{a^2}{\varepsilon^2} - x^2},$$

woraus

$$Z = \frac{\pi b\varepsilon}{a}\left(x\sqrt{\frac{a^2}{\varepsilon^2} - x^2} + \frac{a^2}{\varepsilon^2}\arcsin\frac{x\varepsilon}{a}\right).$$

Setzt man $x = a$ und multipliziert mit 2, so ergiebt sich für die Gesamtoberfläche

$$O = 2\pi b\left(b + \frac{a}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right).$$

Soll das durch Rotation um die y-Achse entstandene Ellipsoid berechnet werden, so in der Ableitung x mit y zu vertauschen, und man erhält:

$$\frac{dz}{dy} = 2\pi x\sqrt{1 + x'^2};\quad x'^2 = \frac{a^2(a^2 - x^2)}{b^2x^2} = \frac{a^4y^2}{b^4x^2}$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{2\pi}{b^2}\sqrt{b^4x^2 + a^4y^2} = \frac{2\pi a}{b^2}\sqrt{b^4 + a^2\varepsilon^2y^2} = 2\pi a\sqrt{1 + \frac{a^2\varepsilon^2y^2}{b^4}}.$$

Setzt man $\frac{a^2\varepsilon^2}{b^4} = c^2$ und wendet den binomischen Satz an, so ist

$$\frac{dz}{dy} = 2\pi a\left(1 + \frac{(cy)^2}{2} - \frac{(cy)^4}{8} + \ldots\right)$$

Also näherungsweise $z = 2\pi a \left(y + \frac{c^2 y^3}{6} - \frac{c^4 y^5}{40} \right)$

$$O = 4\pi a \left(b + \frac{a^2 \varepsilon^2}{6b} - \frac{a^4 \varepsilon^4}{40 b^3} \right).$$

Für die oben angeführten Werte von a und b ergiebt sich schon aus den beiden ersten edern fast genau die Oberfläche der Erde $O = 509950000$ qkm.

Zum Schlufs möge noch kurz die Bestimmung des Krümmungsradius und die Anwendung die Ellipse erörtert werden, die von besonderer Wichtigkeit ist, da ohne dieselbe der Schüler ne genaue Vorstellung darüber erhalten kann, wie die Grade auf dem Meridian vom Äquator h den Polen zunehmen.

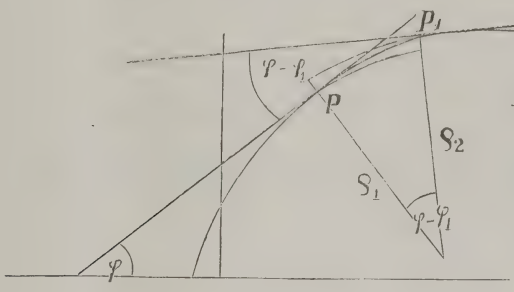


Fig. 10

Sind ϱ_1 und ϱ_2 die in zwei benachbarten Punkten errichteten Normalen bis zu ihrem Schnitt- kt, so ist der Winkel, den sie einschliefsen gleich dem, den die in denselben Punkten an die ven gezogenen Tangenten mit einander einschliefsen, gleich $\varphi - \varphi_1$. Ist $\varrho_2 > \varrho_1$, so ist der dem Radius ϱ_1 beschriebene Bogen, der zwischen den Schenkeln des Winkels $\varphi - \varphi_1$ liegt, ner als der Bogen $PP_1 = s_1 - s$, dagegen der entsprechende mit ϱ_2 beschriebene Bogen gröfser $s_1 - s$, d. h.:

$$\varrho_1 (\varphi - \varphi_1) < s_1 - s < \varrho_2 (\varphi - \varphi_1)$$

$$\varrho_1 < \frac{s_1 - s}{\varphi - \varphi_1} < \varrho_2$$

Je mehr die Punkte P und P_1 aneinanderrücken, desto mehr nähern sich auch die te von φ_1 und φ, s_1 und s, ϱ_1 und ϱ_2 und damit auch die beiden Kreisbogen der Curve, sie schliefslich alle zusammenfallen. Bezeichnet man diesen Grenzwert von $\frac{s_1 - s}{\varphi - \varphi_1}$ mit ϱ, so dies der Radius des Kreises, der sich im Punkt P der Curve am engsten anschliefst, oder Krümmungsradius.

Es ist also $\varrho = -\lim \frac{s_1 - s}{\varphi_1 - \varphi} = -\frac{ds}{d\varphi}$.

Kehrt die Curve der x-Achse die convexe Seite zu, dann ist der Winkel, den die beiden malen mit einander einschliefsen $\varphi_1 - \varphi$ und $\varrho = +\frac{ds}{d\varphi}$. Handelt es sich um die Bestimmung Länge des Krümmungsradius, so ist ϱ natürlich stets positiv zu nehmen. Wir wollen daher Minuszeichen bei der weiteren Rechnung fortlassen und setzen $\varrho = \frac{ds}{d\varphi}$.

Nun ist aber $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+y'^2}$ und $y' = \operatorname{tg}\varphi$, mithin

$$y'' = \frac{1}{\cos^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{dx},\quad \frac{d\varphi}{dx} = y''\cos^2\varphi = \frac{y''}{1+y'^2},$$

folglich $\frac{ds}{d\varphi} = \frac{\sqrt{(1+y'^2)^3}}{y''} = \varrho.$

Für die Ellipse ist $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, $y' = -\frac{b^2x}{a^2y}$, $y'' = -\frac{b^4}{a^2y^3}$, woraus für die Lä

des Krümmungsradius:

$$\varrho = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}.$$

Ist $x=0$, $y=b$, so ist $\varrho = \frac{a^2}{b}$, ist $x=a$, $y=0$, dann ist $\varrho = \frac{b^2}{a}$.

Für die Erde ergiebt sich danach ein Meridiangrad am Pol

$$\frac{a^2}{b}\frac{\pi}{180} = 111{,}680\text{ km} = 15{,}05\text{ Meilen, am Äquator}$$

$$\frac{b^2}{a}\frac{\pi}{180} = 110{,}564\text{ km} = 14{,}9\text{ Meilen.}$$

Die angeführten Beispiele mögen genügen, um die mannigfaltigen Anwendungen wenigen Formeln zu zeigen, zu deren Ableitung an den Schüler sicher keine zu grofsen geist Anforderungen gestellt werden. Zugleich bietet die Einführung in die Infinitesimalrechnung eine passende Gelegenheit zu einer Wiederholung auf fast allen Gebieten der Algebra unter ei einheitlichen Gesichtspunkte, weshalb sie am zweckmäfsigsten in die für die Unter-Prima a setzten Übungsstunden verlegt werden kann. Dies ist auch aus dem Grunde wünschens weil in der Unter-Prima die Mechanik behandelt werden soll, und gerade auf diesem Ge die Anwendung der Infinitesimalrechnung, sowie des Koordinatensystems am vorteilhaft geschehen kann. Die Benutzung des Koordinatensystemes schliefst sich wieder am besten a Konstruktion algebraischer Ausdrücke an, die in den planimetrischen Stunden der Ober-Sek geübt werden könnte. Da sich ferner der binomische Satz sehr einfach nach dem oben gebenen Verfahren ableiten läfst, ohne, wie meist üblich, die Kombinationsrechnung dabei wenden, so kann dieser Unterrichtszweig ganz fortfallen, da er gewifs eher entbehrt we dürfte, als die Infinitesimalrechnung.

Schulnachrichten.

I. Allgemeine Lehrverfassung des Gymnasiums und der Vorschu

1. Übersicht über die einzelnen Lehrgegenstände und die für jeden derselben bestimmten Stunden

Unterrichts-Gegenstände.	Wöchentliche Unterrichtsstunden des Gymnasiums.										Wöchentliche Unterrichtsstunden der Vorschule.						
	OI.	UI.	OII.	UII.	OIII.	UIII.	IV.	V.	VI.	In allen 18 Klassen.	1.	2	3.	4.	5.	6.	In al 12 Kla
Religion	2	2	2	2	2	2	2	2	3	38	2	2	2	2	2	2	2
Deutsch	3	3	3	3	2	2	3	3	4	52	10	10	9	9	9	9	11
Lateinisch	6	6	6	7	7	7	7	8	8	124							
Griechisch	6	6	6	6	6	6				72							
Französisch	2	2	2	3	3	3	4			38							
Geschichte u. Geographie	3	3	3	3	3	3	4	2	2	52							
Mathematik u. Rechnen	4	4	4	4	3	3	4	4	4	68	5	5	5	5	6	6	6
Physik	2	2	2	2	2					20							
Naturgeschichte						2	2	2	2	16							
Zeichnen					2	2	2	2		16							
Schreiben								2	2	8	3	3	3	3			2
Summa	28	28	28	30	30	30	28	25	25	504							
Hebräisch	2	2	2							6							
Englisch (fakultativ) . .	2	2	2							6							
Zeichnen (fakultativ) . .	2									2							
Singen	1. Abt.: Sopran und Alt 1, Tenor 1, Bafs 1, Chor 1. 2. Abt.: 2.						2	2	2	18	1	1	1	1	1	1	12
Turnen . . . . . S.	Auf dem Turnplatz 28, in der Turnhalle 2.									30	2	2					4
Turnen . . . . . W.	3	3	3	3	3	Vorturner 2.	3	3	3	35							
Gesamtbetrag der wöchentlichen Unterrichtsstunden . . . . S.										566	23	23	20	20	18	18	240
Gesamtbetrag der wöchentlichen Unterrichtsstunden . . . . W.										571							

Lehrer.		Ordinarius in
ektor	**Noetel**	
Oberlehrer	Prof. Dr. **Schumacher**	UIM.
Oberlehrer	Prof. Dr. **Behncke**	OIO.
Oberlehrer	Prof. Dr. **Bachmann**	UIO.
Oberlehrer	Prof. Dr. **Wagner**	OIIIO
Oberlehrer	Prof. Dr. **Seckt**	OIIM.
Oberlehrer	Prof. Dr. **Schneider**	OIIIM
Oberlehrer	Prof. Dr. **Schwieger**	OIIO.
Oberlehrer	Prof. **Decken**	UIIIM
Oberlehrer	Prof. Dr. **Wezel**	UIIM.
Oberlehrer	Dr. **Naumann**	UIIO.
Oberlehrer	Dr. **Schimberg**	VO.
Oberlehrer	Dr. **Fricke**	
Oberlehrer	**Frank**	OIM.
Oberlehrer	**Bohne**	UIIIO
Oberlehrer	Dr. **Hempel**	IVM.
berlehrer	Dr. **Dittmar**	IVO.
berlehrer	**Günther**	
berlehrer	Dr. **Kleiber**	VIO.
berlehrer	Dr. **Kirchner**	VM.
berlehrer	**Hellgrewe**	
berlehrer	**Pfeifer**	VIM.
berlehrer	Dr. **Pfeffer**	
Hülfslehrer	Dr. **Gleichen**	
Hülfslehrer	**Reichel**	
Hülfslehrer	**Oppler**	
Hülfslehrer	Musikdirektor **Hoffmann**	
Hülfslehrer	**Köhler**	
Hülfslehrer	Vorschull. **Schmidt**	
Hülfslehrer	**Mielke**	

		Lehrer.		Ordinarius in	OIO.	
1.		Direktor	**Noetel**		6 Griech.	3 G
2.	1.	Oberlehrer	Prof. Dr. **Schumacher**	UIM.		
3.	2.	Oberlehrer	Prof. Dr. **Behncke**	OIO.	6 Latein.	6 L
4.	3.	Oberlehrer	Prof. Dr. **Bachmann**	UIO.	4 Math. 2 Physik	
5.	1.	Oberlehrer	Prof. Dr. **Wagner**	OIIIO.	3 Gesch.	3 G
6.	2.	Oberlehrer	Prof. Dr. **Seckt**	OIIM.	2 Relig. 3 Dtsch.	2 I 3 I
7.	3.	Oberlehrer	Prof. Dr. **Schneider**	OIIIM.	2 Franz.	2 F
8.	4.	Oberlehrer	Prof. Dr. **Schwieger**	OIIO.		
9.	5.	Oberlehrer	Prof. **Decken**	UIIIM.	2 Hebräis	
10.	6.	Oberlehrer	Prof. Dr. **Wezel**	UIIM.		
11.	1.	Oberlehrer	Dr. **Naumann**	UIIO.		
12.	2.	Oberlehrer	Dr. **Schimberg**	VO.		3 Gr
13.	1.	Oberlehrer	Dr. **Fricke**			2 Englisc
14.	2.	Oberlehrer	**Frank**	OIM.		4 M 2 Ph
15.	3.	Oberlehrer	**Bohne**	UIIIO.		
16.	4.	Oberlehrer	Dr. **Hempel**	VIM.		
17.	5.	Oberlehrer	Dr. **Dittmar**	IVO.		
18.	6.	Oberlehrer	**Günther**			
19.	7.	Oberlehrer	Dr. **Kleiber**	VIO.		
20.	8.	Oberlehrer	Dr. **Kirchner**	IVM.		
21.	9.	Oberlehrer	**Hellgrewe**			
22.	10.	Oberlehrer	**Pfeifer**	VM.		
23.	11.	Oberlehrer	Dr. **Pfeffer**			
24.	1. wiss.	Hülfslehrer	Dr. **Gleichen**			
25.	2. wiss.	Hülfslehrer	**Reichel**			
26.	3. wiss.	Hülfslehrer	**Oppler**			
27.	1. techn.	Hülfslehrer	Musikdirektor **Hoffmann**			
28.	2. techn.	Hülfslehrer	Vorschull. **Schmidt**			
29.	3. techn.	Hülfslehrer	**Köhler**			
30.	4. techn.	Hülfslehrer	**Mielke**			

2. Übersicht über die Verteilung der Stunden unter die Lehrer im Schuljahr 1894 95.

a. Gymnasium. Sommerhalbjahr 1894.

Lehrer.		Ordinarius in	OIO.	OIM.	UIO.	UIM.	OIIO.	OIIM.	UIIO.	UIIM.	OIIIO.	OIIIM.	UIIIO.	UIIIM.	IVO.	IVM.	VO.	VM.	VIO.	VIM.	Summa der Stunden.
Direktor	**Noetel**		6 Griech.	3 Griech.																	9
1. Oberlehrer	Prof. Dr. **Schumacher**	UIM.			6 Griech.	6 Latein.	6 Griech.														18
2. Oberlehrer	Prof. Dr. **Behncke**	OIO.	6 Latein.	6 Latein.		6 Griech.															18
3. Oberlehrer	Prof. Dr. **Bachmann**	UIO.	4 Math. 2 Phys.		4 Math. 2 Phys.		4 Math. 2 Phys.														18
1. Oberlehrer	Prof. Dr. **Wagner**	OIIIO.	3 Gesch.	3 Gesch.	3 Gesch.	3 Gesch.					2 Dtsch. 7 Latein.										21 + 6T.
2. Oberlehrer	Prof. Dr. **Seckt**	OIIM.	2 Relig. 3 Dtsch.	2 Relig. 3 Dtsch.				2 Relig. 6 Latein.													18
3. Oberlehrer	Prof. Dr. **Schneider**	OIIIM.	2 Franz.	2 Franz.						3 Dtsch. 3 Franz. 3 Gesch.		2 Dtsch. 7 Latein.									22
4. Oberlehrer	Prof. Dr. **Schwieger**	OIIO.			2 Franz.	2 Franz.	6 Latein. 2 Franz.		3 Franz.	6 Griech.											21
5. Oberlehrer	Prof. **Decken**	UIIIM.	2 Hebräisch.		2 Relig. 2 Hebräisch.	2 Relig.	2 Hebräisch.							2 Relig. 2 Dtsch. 7 Latein.							21 + 5T.
6. Oberlehrer	Prof. Dr. **Wezel**	UIIM.			6 Latein.			6 Griech.		7 Latein.											19
7. Oberlehrer	Dr. **Naumann**	UIIO.			3 Dtsch.	3 Dtsch.			3 Dtsch. 7 Latein.								2 Erdk.	2 Erdk.			20
8. Oberlehrer	Dr. **Schimberg**	VO.		3 Griech.			3 Dtsch.									2 Gesch. 2 Erdk.	3 Dtsch. 8 Latein.				21 + 4T.
1. Oberlehrer	Dr. **Fricke**		2 Englisch.		2 Englisch.		2 Englisch.	3 Gesch.	3 Gesch.		3 Gesch.				4 Franz.	4 Franz.					23
2. Oberlehrer	**Frank**	OIM.		4 Math. 2 Phys.		4 Math. 2 Phys.		4 Math. 2 Phys.		4 Math.											22
3. Oberlehrer	**Bohne**	UIIIO.					3 Gesch.	3 Dtsch.					2 Dtsch. 7 Latein. 6 Griech.								21 + 4T.
4. Oberlehrer	Dr. **Hempel**	IVM.									2 Relig. 6 Griech.			3 Gesch.		2 Relig. 3 Dtsch. 7 Latein.					23
5. Oberlehrer	Dr. **Dittmar**	IVO.							2 Relig. 6 Griech.						2 Relig. 3 Dtsch. 7 Latein.		2 Relig.				22 + 4T.
6. Oberlehrer	**Günther**											3 Math. 2 Phys.		3 Math. 2Naturg.		4 Math. 2Naturg.		4 Rechn. 2Naturg.			22 + 5T.
7. Oberlehrer	Dr. **Kleiber**	VIO.												6 Griech.	(2Gesch.) (2 Erdk.)				4 Dtsch. 8 Latein. 2 Erdk.		24
8. Oberlehrer	Dr. **Kirchner**	VM.										6 Griech.	2 Relig.					2 Relig. 3 Dtsch. 8 Latein.			21
9. Oberlehrer	**Hellgrewe**								4 Math. 2 Phys.	2 Phys.	3 Math. 2Naturg.		3 Math. 2Naturg.		(4 Math.) (2 Natg.)						24
10 Oberlehrer	**Pfeifer**	VIM.										3 Gesch.	3 Gesch.						3 Relig. 4 Dtsch. 2 Erdk. 8 Latein.		23 + 4T.
11. Oberlehrer	Dr. **Pfeffer**			2 Relig.	2 Franz.		2 Relig.	3 Franz.	2 Relig. 3 Franz.	3 Franz.	3 Franz.								3 Relig.		23
1. wiss. Hülfslehrer	Dr. **Gleichen**																4 Rechn. 2Naturg.		4 Rechn. 2Naturg.	4 Rechn. 2Naturg.	
2. wiss. Hülfslehrer	**Reichel**														(2Gesch.) (2 Erdk.)						(4)
3. wiss. Hülfslehrer	**Oppler**														(4 Math.) (2 Natg.)						(6)
1. techn. Hülfslehrer	Musikdirektor **Hoffmann**		4 Singen.				2 Singen, II. Abteilung.						2 Singen. II. Abteilung		2 Singen, II. Abteilung		2Singen.	2Singen.	2Singen.	2Singen.	18
2. techn. Hülfslehrer	**Köhler**														2 Zeichn.	2 Zeichn.	2 Zeichn.	2 Zeichn.			8
3. techn. Hülfslehrer	Vorschull. **Schmidt**																2 Schrb.	2 Schrb.	2 Schrb.	2 Schrb.	8
4. techn. Hülfslehrer	**Mielke**		2 Zeichnen.								2 Zeichn.	2 Zeichn.	2 Zeichn.	2 Zeichn.							10

Winterhalbjahr 1894/95.

	Lehrer.		Ordinarius in	OIO.	OIM.	UIO.	UIM.	OIIO.	OIIM.	UIIO.	UIIM.	OIIIO.	OIIIM.	UIIIO.	UIIIM.	IVO.	IVM.	VO.	VM.	VIO.	VIM.	Summe der Stunden
1.	Direktor	**Noetel**		6 Griech.	3 Griech.																	9
2.	1. Oberlehrer	Prof. Dr. **Schumacher**	UIM.			6 Griech.	6 Latein.	6 Griech.														18
3.	2. Oberlehrer	Prof. Dr. **Behncke**	OIO.	6 Latein.	6 Latein.		6 Griech.															18
4.	3. Oberlehrer	Prof. Dr. **Bachmann**	UIO.	4 Math. 2 Physik		4 Math. 2 Physik		4 Math. 2 Physik				2 Dtsch. 7 Latein.										21+5
5.	1. Oberlehrer	Prof. Dr. **Wagner**	OIIO.	3 Gesch.	3 Gesch.	3 Gesch.	3 Gesch.															18
6.	2. Oberlehrer	Prof. Dr. **Seckt**	OIIM.	2 Relig. 3 Dtsch.	2 Relig. 3 Dtsch.				2 Relig. 6 Latein.		3 Franz. 3 Gesch.	3 Franz.	2 Dtsch. 7 Latein.									22
7.	3. Oberlehrer	Prof. Dr. **Schneider**	OIIIM.	2 Franz.	2 Franz.																	21
8.	4. Oberlehrer	Prof. Dr. **Schwieger**	OIIO.			2 Franz.	2 Franz.	6 Latein. 2 Franz.		3 Franz.	6 Griech.				2 Relig. 2 Dtsch. 7 Latein.							21+6
9.	5. Oberlehrer	Prof. **Decken**	UIIIM.	2 Hebräisch.		2 Relig. 2 Hebräisch.	2 Relig.	2 Hebräisch.														19
10.	6. Oberlehrer	Prof. Dr. **Wezel**	UIIM.			6 Latein.			6 Griech.		7 Latein.							2 Erdk.	2 Erdk.			20
11.	1. Oberlehrer	Dr. **Naumann**	UIIO.			3 Dtsch.	3 Dtsch.			3 Dtsch. 7 Latein.							2 Gesch. 2 Erdk.	3 Dtsch. 8 Latein.				21+3
12.	2. Oberlehrer	Dr. **Schimberg**	VO.		3 Griech.				3 Dtsch.													23
13.	1. Oberlehrer	Dr. **Fricke**		2 Englisch.		2 Englisch.		2 Englisch.	3 Gesch.	3 Gesch.		3 Gesch.				4 Franz.	4 Franz.					22
14.	2. Oberlehrer	**Frank**	OIM.		4 Math. 2 Physik		4 Math. 2 Physik		4 Math. 2 Physik		4 Math.											21+3
15.	3. Oberlehrer	**Bohne**	UIIIO.					3 Gesch. 3 Dtsch.						2 Dtsch. 7 Latein. 6 Griech.							4 Dtsch. 8 Latein. 2 Erdk.	22
16.	4. Oberlehrer	Dr. **Hempel**	VIM.									2 Relig. 6 Griech.										
17.	5. Oberlehrer	Dr. **Dittmar**	IVO.							2 Relig. 6 Griech.						2 Relig. 3 Dtsch. 7 Latein.		2 Relig.				22+
18.	6. Oberlehrer	**Günther**											3 Math. 2 Naturg.		3 Math. 2 Naturg.		4 Math. 2 Naturg.		4 Rechn. 2 Naturg.			22+
19.	7. Oberlehrer	Dr. **Kleiber**	VIO.								3 Dtsch.				6 Griech.					4 Dtsch. 8 Latein. 2. Erdk.		23
20.	8. Oberlehrer	Dr. **Kirchner**	IVM.										6 Griech.	2 Relig.			2 Relig. 3 Dtsch. 7 Latein.				3 Relig.	23
21.	9. Oberlehrer	**Hellgrewe**								4 Math. 2 Physik	2 Physik	3 Math. 2 Physik		3 Math. 2 Naturg.		(4 Math.) (2 Natg.)						24
22.	10. Oberlehrer	**Pfeifer**	VM.										3 Gesch.	3 Gesch.	3 Gesch.	(2Gesch.) (2 Erdk.			3 Dtsch. 8 Latein.			24+
23.	11. Oberlehrer	Dr. **Pfeffer**						2 Relig.	2 Franz.		2 Relig.		2 Relig. 3 Franz.	3 Franz.	3 Franz.				2 Relig.	3 Relig.		22
24.	1. wiss. Hülfslehrer	Dr. **Gleichen**																4 Rechn. 2 Naturg.		4 Rechn. 2 Naturg.	4 Rechn. 2 Naturg.	18
25.	2. wiss. Hülfslehrer	**Reichel**														(2Gesch.) (2 Erdk.)						4
26.	3. wiss. Hülfslehrer	**Oppler**														(4 Math.) (2 Natg.)						6
27.	1. techn. Hülfslehrer	Musikdirektor **Hoffmann**		4 Singen.						2 Singen, II. Abteilung.				2 Singen, II. Abteilung.		2 Singen, II. Abteilung.		2 Singen	2 Singen	2 Singen	2 Singen	1
28.	2. techn. Hülfslehrer	Vorschull. **Schmidt**																2 Schrb.	2 Schrb.	2 Schrb.	2 Schrb.	
29.	3. techn. Hülfslehrer	**Köhler**														2 Zeichn.	2 Zeichn.	2 Zeichn.	2 Zeichn.			
30.	4. techn. Hülfslehrer	**Mielke**		2 Zeichnen.								2 Zeichn.	2 Zeichn.	2 Zeichn.	2 Zeichn.							1

Winterhalbjahr 1894/95.

M.	UIO.	UIM.	OIIO.	OIIM.	UIIO.	UIIM.	OIIIO.	OIIIM.	UIIIO.	UIIIM.	IVO.	IVM.	VO.	VM.	VIO.	VIM.	Summe der Stunden
ech.																	9
	6 Griech.	6 Latein.	6 Griech.														18
tein.		6 Griech.															18
	4 Math. 2 Physik		4 Math. 2 Physik														18
esch.	3 Gesch.	3 Gesch.					2 Dtsch. 7 Latein.										21+1
elig. tsch.				2 Relig. 6 Latein.													18
ranz.						3 Franz. 3 Gesch.	3 Franz.	2 Dtsch. 7 Latein.									22
	2 Franz.	2 Franz.	6 Latein. 2 Franz.		3 Franz.	6 Griech.											21
h.	2 Relig. 2 Hebräisch.	2 Relig.	2 Hebräisch.							2 Relig. 2 Dtsch. 7 Latein.							21+1
	6 Latein.			6 Griech.		7 Latein.											19
	3 Dtsch.	3 Dtsch.			3 Dtsch. 7 Latein.								2 Erdk.	2 Erdk.			20
ech.				3 Dtsch.								2 Gesch. 2 Erdk.	3 Dtsch. 8 Latein.				21+1
h.	2 Englisch.		2 Englisch.	3 Gesch.	3 Gesch.		3 Gesch.				4 Franz.	4 Franz.					24
ath. ysik		4 Math. 2 Physik		4 Math. 2 Physik		4 Math.											22
			3 Gesch. 3 Dtsch.						2 Dtsch. 7 Latein. 6 Griech.								21+1
							2 Relig. 6 Griech.									4 Dtsch. 8 Latein. 2 Erdk.	22
					2 Relig. 6 Griech.						2 Relig. 3 Dtsch. 7 Latein.		2 Relig.				22+1
								3 Math. 2Naturg.		3 Math. 2Naturg.		4 Math. 2Naturg.		4 Rechn. 2Naturg.			22+1
						3 Dtsch.				6 Griech.					4 Dtsch. 8 Latein. 2. Erdk.		23
								6 Griech.	2 Relig.			2 Relig. 3 Dtsch. 7 Latein.				3 Relig.	23
					4 Math. 2 Physik	2 Physik	3 Math. 2 Physik		3 Math. 2Naturg.		(4 Math.) (2 Natg.)						24
								3 Gesch.	3 Gesch.	3 Gesch.	(2Gesch.) (2 Erdk.			3 Dtsch. 8 Latein.			24+1
			2 Relig.	2 Franz.		2 Relig.		2 Relig. 3 Franz.	3 Franz.	3 Franz.				2 Relig.	3 Relig.		22
													4 Rechn. 2Naturg.		4 Rechn. 2Naturg.	4 Rechn. 2Naturg.	18
											(2Gesch.) (2 Erdk.)						4
											(4 Math.) (2 Natg.)						6
	4 Singen.				2 Singen, II. Abteilung.				2 Singen, II. Abteilung.		2 Singen, II. Abteilung.		2 Singen	2 Singen	2 Singen	2 Singen	18
													2 Schrb.	2 Schrb.	2 Schrb.	2 Schrb.	8
											2 Zeichn.	2 Zeichn.	2 Zeichn.	2Zeichn.			8
	2 Zeichnen.						2 Zeichn.	2 Zeichn.	2 Zeichn.	2 Zeichn.							10

b. Vorschule, Winterhalbjahr 1894/95.

Lehrer.	Ordinarius in	1A.	1B.	2A.	2B.	3A.	3B.	4A.	4B.	5A.	5B.	6A.	6B.	Summa.
l, Direktor.														
allwitz, ehrer.	1A.	2 Relig. 10Deutsch												12
dt, 2. Lehrer.	2B.				10Deutsch 5 Rechn.									15 und 8 Stunden Schreiben im Gymnasium = 23
y, 3. Lehrer.	1B.		2 Relig. 10Deutsch 5 Rechn. 3 Schreib. 1 Singen.											21
, 4. Lehrer.	6A.							9 Deutsch 5 Rechn. 3 Schreib. 1 Singen.			2 Relig. 1 Deutsch 1 Singen.			22 und 1 Insp. = 23
5. Lehrer.	3A.					2 Relig. 7 Deutsch 5 Rechn.								14 und 8 Stunden Schreiben im Realgymnasium = 22
r, 6. Lehrer.	3B.				3 Schreib.		2 Relig. 9 Deutsch 5 Rechn. 3 Schreib. 1 Singen.							23
mann, 7. Lehrer.	2A.			2 Relig. 10Deutsch 5 Rechn. 3 Schreib. 1 Singen.										21 und 2 Insp. = 23
fel, 8. Lehrer.	5B.				2 Relig.			2 Relig.					2 Relig. 9 Deutsch 6 Rechn. 1 Singen.	22 und 1 Insp. = 23
nitzer, 9. Lehrer.	6B.	5 Rechn.							9 Deutsch 5 Rechn. 3 Schreib. 1 Singen.					23
s, 10. Lehrer.	5A.	3 Schreib. 1 Singen.										2 Relig. 9 Deutsch 6 Rechn. 1 Singen.		22 und 1 Insp. = 23
t, 11. Lehrer.	4B.	2 Turnen		2 Turnen		2 Deutsch 1 Singen.			2 Relig.		8 Deutsch 6 Rechn.			23
ann, 12. Lehrer.	4A.				1 Singen.	3 Schreib.				2 Relig. 9 Deutsch 6 Rechn. 1 Singen.				22 und 1 Insp. = 23

g. Im Sommer-Semester 1894 waren die Ordinariate nebst den entsprechenden Lektionen in folgender Weise verteilt: Dallwitz in 1A, Lübcky in 1B Schmidt in 3B, Pache in 5A, Lüben in 2A, Schiller in 2B, Werdermann in 3A, Manteufel in 4B, Clausnitzer in 5B, Mehles in 4A, Kunert in 6B, Gehrmann in 6A. — Jede Klasse hat einen halbjährigen Kursus und zwei durch A und B unterschiedene Parallelcöten.

3. Übersicht der erledigten Lehrstücke.

Die Lernaufgaben sind im Gymnasium und in der Vorschule gegen die Vorjahre unverändert geblieben. Es folgt daher für diesmal hier nur die Übersicht der im Laufe des Schuljahrs in den Primen und Sekunden erledigten fremdsprachlichen Lektüre.

Ober-Prima, Oster-Cötus.

Lateinisch. Tacitus, Germania und Agricola; Horaz, Oden III und IV m. A.; dazu Sat. II, 6; Ep. I, 10. — Cicero, Philipp. I, II m. A.; Horaz, Oden III und IV m. A.; dazu Ep. I, 7; I, 2; I, 20. — Griechisch. Thuc. VI m. A.; Plato, Laches; Sophocles, Aiax; Homer, Il. XIV—XXIV m. A. — Französisch. Mignet, hist. d. l. rév. fr. I, IV—IX m. A.

Ober-Prima, Michaelis-Cötus.

Lateinisch. Cicero, Tusc. V, I m. A.; Horaz, Oden III und IV m. A.; dazu Ep. I, 7; I, 2. — Tacitus, Germania und Agricola; Horaz, Oden III und IV m. A.; dazu Sat. II, 6; Ep. I, 10. — Griechisch. Plato, Protagoras m. A.; Thuc. I m. A.; Sophocles, Aiax; Homer, Il. XIV—XXIV m. A. — Französisch. Mignet, hist. d. l. rév. fr. I—IX m. A.

Unter-Prima, Oster-Cötus.

Lateinisch. Tacitus Annalen I, III m. A.; Horaz, Oden I und II m. A.; dazu Sat. I, 6; Ep. II, 1. — Tacitus, Annalen I, III, IV m. A.; Horaz, Oden I und II m. A.; dazu Ep. 13; 7; 2; Sat. I, 9. Cicero, Briefe m. A. — Griechisch. Demosthenes, Olynth. I, II, III; Plato, Apologie; Sophocles, Antigone; Homer, Ilias, I—XII m. A. — Französisch. Racine, Iphigénie; Scribe, le verre d'eau.

Unter-Prima, Michaelis-Cötus.

Lateinisch. Tacitus, Annalen, I, III, IV, VI m. A.; Horaz, Oden I und II m. A.; dazu Ep. 7; 2; Sat. I, 9. — Tacitus, Annalen I, II m. A.; Horaz, Oden I und II m. A.; dazu Sat. I, 6; Ep. II, 1. Cicero, Briefe m. A. — Griechisch. Plato, Apologie; Demosthenes, Olynth. I, II, III m. A. Sophocles, Antigone; Homer, Il. I—XII m. A. — Französisch. Scribe, le verre d'eau; Racine, Iphigénie.

Ober-Sekunda, Oster-Cötus.

Lateinisch. Livius, XXII, XXIII, XXIV m. A.; Vergil, Aeneis IX, II, I, IV m. A. — Livius, XXX m. A.; Sallust, Jugurtha m. A.; Vergil, Aeneis II, VI, VIII m. A.; Eclog. 1, 2, 4; Georg. I, II m. A. — Grieschisch. Herodot, VI—IX m. A.; Lysias, Eratosthenes, Agoratos; Homer, Od. VII, IX, X, XI, XII; XIII—XXIV m. A. — Französisch. Thiers, Waterloo.

Ober-Sekunda, Michaelis-Cötus.

Lateinisch. Livius, XXX m. A.; Sallust, Jugurtha und Catilina m. A.; Vergil, Aeneis IV, VI, VIII, II m. A.; Eclog. I, IX. — Livius, XXII, XXIII, XXIV m. A.; Vergil, Aeneis II, IV, IX m. A. — Griechisch. Lysias, Eratosthenes, Agoratos; Herodot, VI—IX m. A.; Homer, Od. VII, IX, X, XI, XII, XIII—XXIV m. A. — Französisch. Thiers, Waterloo.

Unter-Sekunda, Oster-Cötus.

Lateinisch. Cicero, de imp. Cn. Pompei m. A.; in Catilinam I. Livius, XXI m. A. — Vergil, Aeneis I, III, V, IX m. A.; VII, VIII, XII m. A. — Griechisch. Xenophon, Anab. III, IV m. A.; IV, V m. A.; Hellen. V, VII m. A.; Homer, Od. I, V, VI, VII m. A. — Französisch. Rollin, Alexandre, ch. 1—8, 14, 15; 16—18, 24—29.

Unter-Sekunda, Michaelis-Cötus.

Lateinisch. Livius, XXI m. A.; Cicero, de imp. Cn. Pompei m. A.; in Catilinam I m. A. — Vergil, Aeneis VII, VIII, XII m. A.; I, III, V, VII m. A. — Griechisch. Xenophon, anabasis IV m. A.; Hellen. V, VI, VII m. A.; Homer, Od. IV, V, VI m. A.; I, V m. A. — Französisch. Rollin, Alexandre, ch. 16—18, 21, 24, 25 m. A.; 26, 27, 30. — ch. 1, 2, 4—7, 8, 10—15, 16.

Vom Religionsunterrichte ist kein evangelischer Schüler dispensiert gewesen.

Die Anstalt besuchten im S. 1894 712 Schüler, im W. 702.

Von diesen waren vom Turnunterricht befreit:

	vom Turnunterricht überhaupt		von einzelnen Uebungsarten	
auf Grund ärztlichen Zeugnisses	im S. 80,	im W. 70	im S. 7,	im W. 3
auf anderen Gründen	- 7,	- 2	- —	- —
zusammen	im S. 87,	im W. 72	im S. 7,	im W. 3
d. i. von der Gesamtzahl der Schüler	- $12^{1}/_{12}$%	- 10%	- 1%	- $^{1}/_{3}$%

Es bestanden bei 18 getrennt zu unterrichtenden Klassen 12 Turnabteilungen; zur kleinsten von
en gehörten 49, zur gröfsten 98 Schüler. Von zwei besonderen Vorturner- bezw. Anmännerstunden
esehen waren für den Turnunterricht wöchentlich insgesamt im S. 4, im W. 3 Stunden angesetzt.

Ihn erteilten im Sommer:

Professor Dr. Wagner als Leiter, gab die Vorturner- und Anmännerstunde und unterrichtete die VIo,
Professor Decken in OIII und UIII,
Oberlehrer Dr. Schimberg in I und OII,
- Bohne in UII,
- Dr. Dittmar in IVM,
- Günther in IVO und VM,
- Pfeifer in VO und VIM.

Im Winter:

Professor Dr. Wagner als Leiter, gab die Vorturner- und Anmännerstunde und unterrichtete in I,
Professor Decken in VIO und VIM,
Oberlehrer Dr. Schimberg in VO,
- Bohne in UIII,
- Günther in OII und IVM,
- Dr. Dittmar in UII und IVO,
- Pfeifer in OIII und VM.

Gymnasium benützt

1. den geräumigen Turnplatz in der Hasenheide, der etwa 35 Minuten von der Anstalt entfernt liegt, und der, weil das K. Real-Gymnasium das Mitbenutzungsrecht hat, nur an 2 Wochentagen zu unserer Verfügung steht. Seine Gröfse (181 m lang und ca. 140 m breit) gestattet, sämtliche Schüler unter den 7 Turnlehrern gleichzeitig turnen zu lassen. In den unteren Klassen und bei den Gerätübungen wird, wenn auch mit Zuhilfenahme von Zugführern und Vorturnern, nach den Grundsätzen von Spiefs verfahren; die mittleren und oberen Klassen turnen nach der freieren Jahnschen Weise. Eifrig gepflegt werden die taktischen Elementarübungen, welche infolge der grofsen Anzahl der gleichzeitig turnenden Schüler (ca. 600) sich bis zum Bataillonsexercieren steigern. Nähere Angaben darüber sind in dem Aufsatze: Das Massenturnen der Schüler des Kgl. Friedrich-Wilhelms-Gymnasiums zu Berlin auf dem Turnplatze in der Hasenhaide (Zeitschrift für Turnen und Jugendspiel, 1. Jahrg. No. 19 und 20) enthalten.
2. eine neben dem Gymnasium gelegene, ausschliefslich für uns bestimmte Turnhalle, an die sich ein als Turnplatz eingerichteter Teil des Schulhofes anschliefst.

Die Turnspiele werden teils innerhalb des Rahmens des allgemeinen Turnunterrichts betrieben,
fern als in die Gerätordnung an jedem 3. Turntage eine Stunde für Spielen eingesetzt ist, teils wird
Schülern vor und nach dem Turnen je ½ Stunde an jedem Turntage, aufserdem Sonntag Nachmittags
4—6 Uhr Gelegenheit zum Spielen gegeben. Die Beteiligung an den Spielen innerhalb der Turnzeit
ine gebotene, zu den anderen Zeiten eine zwar freiwillige, doch von der Schule überwachte. Sie ist
t ganz gleichmäfsig, doch kann sie auf etwa 15% an den Wochen- und 10% an den Sonntagen ge-
tzt werden. Am beliebtesten sind Barlauf, Schlagball, Kricket, Fufs- und Schleuderball. — Für Schlag-
Kricket und Fufsball bestehen während der sommerlichen Turnzeit besondere Vereinigungen, die ihre
immten Gerätschaften und Plätze zugewiesen erhalten, sich ihre eigenen Leiter wählen und am Ende des
mers einen Bericht über ihre Thätigkeit abstatten müssen. Wettspiele unter diesen Vereinigungen
en besonders bei Schulausflügen statt. — Neben diesen Spielgesellschaften besteht seit 10 Jahren der
nasial-Ruder-Verein „Friedrich Wilhelm“. Über seine Geschichte und seine Thätigkeit geben mehrere
uckte Schriftstücke Auskunft, so dafs von einem näheren Eingehen auf diesen Punkt an dieser Stelle
esehen werden kann. — Der seit 1891 bestehende Gymnasial-Schwimm-Verein „Friedrich-Wilhelm“ hat
seinem 1. Schwimmfeste am 10 Febr. 1895 Erläuterungen über seine Ziele und Einrichtungen sämtlichen
rn unserer Schüler gedruckt vorgelegt. —

Unter den 712 Schülern, die im Sommer die Anstalt besuchten, befanden sich 342 Freischwi
von denen 56 das Schwimmen erst im Berichtsjahre erlernt hatten. Bei dem alljährlich seiten
Gymnasiums veranstalteten Prüfungsschwimmen (die von Pfuelsche Schwimmanstalt wird uns dazu i
freundlichst bewilligt) erwarben sich 89 Schüler ein amtliches Zeugnis über ihre Schwimmferti
53 unter ihnen schwammen zwischen 60 und 90 Minuten.

Die Zahl der Freischwimmer beträgt 48% der Gesamtzahl der Schüler.

Den Gesangunterricht erteilte der Musikdirektor Hoffmann in wöchentlich 18 Stunden.
von kamen vier Stunden auf die 1. Abteilung, eine für vierstimmigen Chorgesang, eine für den Sopra
den Alt, eine für den Tenor und eine für den Bafs bestimmt, zwei auf die 2. Abteilung, welcher dieje
Sänger der Klassen von Unter-Tertia aufwärts angehörten, welche nicht befähigt waren, in die 1. Abt
aufgenommen zu werden. Die folgenden 6 Abteilungen, von denen jede wöchentlich 2 Stunden hat,
für die Schüler der 6 unteren Klassen bestimmt, mit Ausschlufs derjenigen Quartaner und ausnahms
auch Quintaner, welche nach ihren Leistungen der 1. Abteilung eingereiht waren.

Den fakultativen Zeichenunterricht der Klassen OI bis UII erteilte der Zeichen
Mielke in wöchentlich 2 Stunden; es beteiligten sich im Sommer 2 Primaner, 4 Obersekundaner, 4 U
sekundaner; im Winter 3 Primaner, 7 Obersekundaner, 13 Untersekundaner.

4. Zusammenstellung der im Gymnasium eingeführten Schulbücher.

1. **Religion.**
   - Klix, Christliches Gesangbuch . . . . . VI bis OI
   - Schulz, Otto, Biblisches Lesebuch, bearbeitet von G. A. Klix . . . . . VI bis OI
   - Hagenbach, Leitfaden zum christlichen Religions-Unterricht . . . . . UII bis O
2. **Deutsch.**
   - Regeln und Wörterverzeichnis für die deutsche Rechtschreibung zum Gebrauch in den preufsischen Schulen . . . . . VI bis OI
   - Hopf und Paulsiek, Deutsches Lesebuch, her. von Muff, I, II, III, IV . . . . VI, V, IV,
   - Kluge, Geschichte der deutschen National-Litteratur . . . . . OII. bis O
3. **Lateinisch.**
   - Perthes, Lateinische Formenlehre . . . . . VM.
   - ders., Lateinisches Lesebuch für die Quinta . . . . . V. M.
   - ders., Grammatisches Vocabularium für die Quinta . . . . . V. M.
   - O. Richter, Lateinisches Lesebuch, neue Bearbeitung . . . . . VI. VO.
   - Harre, Hauptregeln der lateinischen Syntax . . . . . IV bis UI
   - Wezel, Cäsars Gallischer Krieg. Ein Übungsbuch zum Übersetzen aus dem Deutschen in das Lateinische für Tertia. Teil I bis III . . . . . UIII und
4. **Griechisch.**
   - Franke, Griechische Formenlehre, bearbeitet von v. Bamberg . . . . . UIII bis O
   - Seyffert, Hauptregeln der griechischen Syntax, bearbeitet von v. Bamberg . . . UII bis O
   - von Bamberg, Homerische Formen . . . . . UII bis O
   - Wesener, Griechisches Elementarbuch I . . . . . UIII und
5. **Französisch.**
   - Ploetz, Elementarbuch . . . . . IV und UI
   - ders., Schulgrammatik . . . . . OIII bis O
6. **Hebräisch.**
   - Gesenius, Hebräische Grammatik . . . . . OII bis O
   - ders., Hebräisches Handwörterbuch . . . . . OII bis O
7. **Geschichte.**
   - Jäger, Hülfsbuch für den ersten Unterricht in der Geschichte . . . . . IV. und U
   - Müller, David, Leitfaden zur Geschichte des deutschen Volkes . . . . . UIII, OIII u
   - Herbst, Historisches Hülfsbuch für die oberen Klassen der Gymnasien,
     - I. Teil: Alte Geschichte . . . . . OII.
     - II. Teil: Geschichte des Mittelalters . . . . . UI.
     - III. Teil: Geschichte der Neuzeit . . . . . UI. und O
   - Kiepert, Atlas antiquus, 12 Karten zur alten Geschichte (empfohlen) . . . . . IV bis OI.

8. **Geographie.**
Kirchhoff, Schulgeographie . . . . . VI bis OI.
von Sydow, Schulatlas . . . . . VI bis OI.

9. **Mathematik und Rechnen.**
Harms und Kallius, Rechenbuch . . . . . VI bis IV.
Mehler, Hauptsätze der Elementar-Mathematik . . . . . IV bis OI.
Meyer Hirsch, Sammlung von Beispielen, Formeln und Aufgaben, herausgegeben von Bertram . . . . . UIII bis OI.
August, Vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln . . . . . UII bis OI.

0. **Naturbeschreibung.**
Wossidlo, Leitfaden der Zoologie. Wossidlo, Leitfaden der Botanik . . . . . VI bis OIII.

1. **Physik.**
Jochmann und Hermes, Grundrifs der Experimentalphysik . . . . . OIII bis OI.

2. **Gesang.**
68 Choral-Melodieen zu dem Berliner Gesangbuch . . . . . VI bis OI.
Erk und Greef, Auswahl heiterer und ernster Gesänge . . . . . VI bis OIII.

3. **Turnen.**
Erk, Turn- und Wanderlieder für die deutsche Jugend . . . . . VI bis OI.

Ausgeschlossen aus dieser Zusammenstellung sind die Bibel, der Katechismus, das im kirchlichen rauche befindliche Gesangbuch und die Ausgaben der in der Schule gelesenen Klassiker, welche jeder . jeder evangelische) Schüler haben mufs.

Jeder Schüler mufs in den höheren Klassen im Besitze derjenigen Schulbücher bleiben, zu deren chaffung er in den niedrigeren Klassen verpflichtet war.

Bei Anschaffung sämtlicher Schulbücher sind jedesmal die neuesten Ausen zu wählen.

5. Zusammenstellung der in der Vorschule eingeführten Schulbücher.

1. **Religion.**
Schulz, Otto, Biblisches Lesebuch von G. A. Klix . . . . . 1 und 2.
Memorierstoff für den Religionsunterricht . . . . . 6 bis 1.

2. **Deutsch.**
Unterrichtsstoff für die Deutsche Grammatik und Orthographie,
1. Heft . . . . . 5 und 6.
2. Heft . . . . . 4.
3. Heft . . . . . 3.
4. Heft . . . . . 2.
5. Heft . . . . . 1.
Paulsiek, Deutsches Lesebuch für Vorschulen höherer Lehranstalten,
II. Abteilung — für Septima . . . . . 1 und 2.
I. Abteilung — für Oktava . . . . . 3 und 4.
Fechner, Erstes Lesebuch . . . . . 5.
Pache, Neue Fibel . . . . . 6.

3. **Rechnen.**
Übungsstoff für den Rechenunterricht in Vorschulen,
1. Heft . . . . . 5 und 6.
2. Heft . . . . . 3 und 4.
3. Heft . . . . . 1 und 2.

II. Aus den Verfügungen der Behörden.

K. P. S. K. 24. X. 1894. Ferienordnung für das Jahr 1895.

1. Osterferien:	Schluſs des Unterrichts Sonnabend, den 6. April, Wiederbeginn des Unterrichts Dienstag, den 23. April;
2. Pfingstferien:	Schluſs des Unterrichts Freitag, den 31. Mai, Wiederbeginn des Unterrichts Donnerstag, den 6. Juni;
3. Sommerferien:	Schluſs des Unterrichts Freitag, den 6. Juli, Wiederbeginn des Unterrichts Dienstag, den 13. August;
4. Michaelisferien:	Schluſs des Unterrichts Sonnabend, den 28. September, Wiederbeginn des Unterrichts Dienstag, den 8. Oktober;
5. Weihnachtsferien:	Schluſs des Unterrichts Sonnabend, den 21. Dezember, Wiederbeginn des Unterrichts Dienstag, den 7. Januar 1896.

III. Zur Chronik der Anstalt.

Aus dem Schuljahr 1893/94 ist noch nachzutragen, daſs am 2. März ein Schulkonzert statt das, teils von Herrn Musikdirektor Hoffmann, teils von Herrn Oberlehrer Dr. Dittmar vorbereitet, eines zahlreichen Besuches von Angehörigen unserer Schüler und sonstigen Freunden der Anstalt erf

In den Osterferien verloren wir einen lieben Schüler: am 26. März starb der Unterprim Karl Zander an den Folgen einer Lungenentzündung; wir schenkten den betrübten Eltern unsre her Teilnahme.

Auch in diesem Jahre hat das Gymnasium den Tod eines seiner früheren Lehrer beklagen mü Am 11. Mai starb an einem Herzschlag der frühere Oberlehrer Herr Professor Dr. Moritz Bernha Am 25. Februar 1823 geboren, war er alsbald nach Erledigung der Lehramtsprüfung zu Ostern 184 Probekandidat an der Anstalt eingetreten und seitdem — zu Michaelis 1868 zum Oberlehrer beförder 13. September 1880 durch die Verleihung des Professortitels ausgezeichnet — bei ihr geblieben, bis Michaelis 1886, durch Gesundheitsrücksichten bestimmt, die Versetzung in den Ruhestand erbat und er Wie er gegen sich keine Schonung kannte, so war er seinen Schülern ein Lehrer von strenger Gewi haftigkeit, der nicht müde wurde, sie in ihren Kenntnissen zu fördern und festigen, wie er sich in Vermehrung des eigenen, reichen Wissens nie genug thun konnte. Auch nachdem er von der A geschieden war, hat er sie gern aufgesucht und namentlich seine Freude daran gehabt, andern mit Schätzen seiner Büchersammlung zu Hilfe zu kommen. Wir bewahren ihm ein treues, ehrendes Ande

Herr Oberlehrer Hellgrewe war im August von seinen Leiden wiederhergestellt, sodaſs er Ablauf der Sommerferien seine Thätigkeit am Gymnasium zu unsrer Freude wieder aufnehmen konnte. dahin hatte Herr Schulamtskandidat Oppler fortgefahren, ihn zu vertreten. Derselbe ist, ebenso wie Schulamtskandidat Reichel, während des ganzen Schuljahrs an der Anstalt als Hilfslehrer verblieben

Als Mitglieder des pädagogischen Seminars waren dem Gymnasium überwiesen die Herren Dr. Fritz ösch, Dr. Max Jumpertz, Friedr. Klein, Paul Meyer, Wilhelm Weber, Dr. Ernst Wiehr und gen Wolff.

Durch Patent vom 23. Juni wurde dem Herrn Oberlehrer Dr. Wezel zu unsrer herzlichen Genugung der Professortitel verliehen.

Der Vorschullehrer Herr Schmidt wurde leider, wie in den letzten Wochen des Winterhalbjahrs auch nach Ostern wieder längere Zeit durch Krankheit vom Unterrichte ferngehalten; der frühere Schulstcher Herr Wesslau leistete dankenswerte Aushülfe.

Im Laufe des Sommers ist die künstlerische Ausschmückung der Aula in Übereinstimmung mit den hier aus gestellten Anträgen zum Abschlufs gekommen. An der Hauptwand des Saales erhebt sich jetzt einem schlichten Holzsockel die marmorne Kolossalbüste Seiner Majestät des Kaisers und Königs, beherrschender Höhe den Raum weitüberschauend, dahinter ein in Rot und Gold gewirkter Teppich, faltenreich von der Gesimslinie der Wand bis auf das Podium herabfällt. Die Büste ist das wohlungene Werk des Herrn Professor Heinz Hofmeister, dem Seine Majestät für diesen Zweck wiederholt zungen gewährt hat. Leider ist es dem trefflichen Künstler nicht beschieden gewesen, die Vollendung seiner beit zu sehen; schon leidend, war er immer wieder an ihr thätig; da nahm ihn, während er an der Ausbeitung in Marmor beschäftigt war, die Krankheit aus dem Leben fort, die er sich im letzten Kriege gezogen hatte; die letzte Hand legte Herr Bildhauer Lange an. Zu den beiden Seiten der Kaiserbüste d unsre Ehrentafeln angebracht; die eine, im März 1863 von den damaligen Schülern gestiftet, verzeichnet die men aller derjenigen Genossen der Anstalt, die im Jahre 1813 dem Rufe des Königs in den Franzosenkrieg gten; auf der andern sind alle die ehemaligen Lehrer oder Schüler des Gymnasiums genannt, die in den egen König Wilhelms I. geblieben sind. Beim Wiederbeginn des Unterrichts nach den Sommerferien lt nach der gemeinschaftlichen Morgenandacht der Direktor an die Schüler eine Ansprache, in welcher sie auf die Bedeutung dieses Schmuckes hinwies: wie die Königs- und Kaiserbilder im Saale ihnen vor gen stellten, was die Hohenzollernfürsten aus ihrem Lande und Volke gemacht, wie die Gedächtnistafeln daran erinnerten, dafs die Glieder des Friedrich-Wilhelms-Gymnasiums in schweren Zeiten dem König dem Vaterland Treue bewährt, so sollten auch sie in Dankbarkeit danach trachten, alle Zeit und wo auch mer dem Wahlspruch nachzuleben: Mit Gott für König und Vaterland.

Am 23. Juni unternahm das ganze Gymnasium einen Ausflug nach Grünau, an dem sich auch die gehörigen unsrer Schüler in erfreulich reicher Zahl beteiligten. Ein Extrazug beförderte uns hin und ück. Gesang, Kriegsspiel, Turnspiele, Reigen und Parademarsch füllten die Stunden aus. In der Mitte Tages fand zur Feier des zehnjährigen Jubiläums unsers Gymnasial-Ruder-Vereins „Friedrich Wilhelm“ fe und Stapellauf eines neuen Bootes statt, das, aus Mitteln der Turnkasse und dem Ertrage eines ülerkonzerts beschafft, den Namen „Kaiser“ erhielt; daran schlofs sich ein Wettrudern der Mannschaften Vereins mit den beiden eigenen Booten „Friedrich Wilhelm“ und „Kaiser“ und einem dritten, das die ergesellschaft Victoria freundlichst zur Verfügung gestellt hatte.

Am 25. Juni feierten wir das fünfzigjährige Bestehen des Turnplatzes in der Hasenheide. Im e 1844 hatte die hochherzige Gnade weiland Sr. Majestät König Friedrich Wilhelm IV. diesen lichen Platz beschafft und zunächst den vereinigten Anstalten des Königlichen Friedrich Wilhelmsmasiums und der Königlichen Realschule zur Benutzung überwiesen. Am 26. Juni 1844 hatte der ektor Ferdinand Ranke im Beisein der höchsten Vertreter der preufsischen Unterrichtsverwaltung, licher Angehörigen beider Anstalten und eines grofsen Kreises von Freunden des Turnwesens in ungvoller Rede den Platz geweiht und übernommen. Ein ungewöhnlich reges, fröhliches Turnwesen hat von dort aus entwickelt; bald zog es die Kunst der Musik und des Gesanges heran, früh breitete es über die Nachbargebiete des Schwimmens, des Eislaufs, des Ruderns aus; zur sorglichen Pflege des enbaues finden die Schüler dort Gelegenheit und gern gewährte Anleitung; an den schulfreien Sommermittagen tummeln sie sich dort in turnerischen Spielen, soweit nicht die immer umfangreicher geübte freundschaft gegen Turnvereine u. ä. den Raum allzusehr beschränkt. Die hohe Blüte, in welcher die nerei seit langer Zeit an der Anstalt steht, würde ohne den Besitz jenes Platzes gar nicht erreichbar sen sein. — Da an dem eigentlichen Festtage, dem 26. Juni, der Platz nicht zu unserer Verfügung so wurde am Tage zuvor der regelmäfsige Turnunterricht reicher ausgestattet, und der erste Turner, Herr Professor Dr. Wagner, hielt eine Ansprache an die Schüler, die ihnen die Segnungen des ens und die unschätzbare Wohlthat dieses Platzes darlegte und in einem jubelnd aufgenommenen Hoch Seine Majestät den Kaiser und König gipfelte.

Die herkömmliche Schwimmprüfung fand am Tage des Schulschlusses vor den Sommerferien, am di, in der gütigst überlassenen v. Pfuelschen Schwimmanstalt statt. Am 10. Februar wurde im Kaiserelms-Bad in Gegenwart geladener Gäste und unter freundlicher Beihülfe von Mitgliedern hiesiger

Schwimmvereine ein Schwimmfest zunächst unseres Gymnasial-Schwimm-Vereins „Friedrich Wilhelm“ anstaltet: es wurde Wettschwimmen, Tauchen nach Gegenständen, Springen, Hechttauchen und Ba rudern vorgeführt und schliefslich der „Sang an Ägir“ gesungen und als lebendes Bild dargestellt.

Bei der Feier des Sedantages, die am 1. September in der in den letzten Jahren üblich geword Weise in der Aula stattfand, hielt Herr Professor Decken die Festrede; auch die Vorschule veranst eine gemeinsame Feier, bei welcher Herr Mehles sprach.

Am 27. September wurde das Schlufsturnen in der Hasenheide abgehalten; die silbernen Denkmü erhielten der Abiturient Emil Schröder und die Oberprimaner Wilhelm Triebensee und Walter Braune

Die Erinnerung an die Einführung der Reformation in die Mark Brandenburg begingen wi 2. November; die Festrede hielt Herr Professor Dr. Wagner; die von dem Magistrat übersandte D münze wurde dem primus omnium Wolfgang Stäckel übergeben; aufserdem erhielt eine gröfsere Zahl Schülern der oberen und mittleren Klassen die von dem Herrn Minister für diesen Zweck übersa Exemplare der Schriften „Urkunde über die Einweihung der erneuerten Schlofskirche zu Wittenberg“ „Witte, die Erneuerung der Wittenberger Schlofskirche.“ In der Vorschule teilten die Lehrer Schülern über die Bedeutung des Tages mit, was in ihrem Gesichtskreise zu liegen schien.

Der vierhundertjährigen Wiederkehr des Geburtstages von Hans Sachs wurde in den 5. November nächst vorangehenden deutschen Unterrichtsstunden in den oberen Klassen gedacht. Aufse veranstalteten am Abend des 5 November einige Schüler der Unterprima und anderer Klassen vor Lehrern und Schülern der Anstalt eine Aufführung von 2 Fastnachtsspielen des Hans Sachs, die Herrn Oberlehrer Dr. Schimberg vorbereitet war.

In allen Klassen des Gymnasiums und der Vorschule wurden die evangelischen Schüler in letzten Religionsstunde vor dem 9. Dezember an die hohe Bedeutung Gustav Adolfs für die evangel Kirche erinnert und darauf hingewiesen, dafs am nächsten Sonntage die kirchliche Feier des dreihun jährigen Geburtstages desselben stattfinde.

Durch die Güte des Vorsitzenden des Berliner Zweigvereins der Evangelischen Gustav-A Stiftung Herrn Geheimen Rates Dr. Krech wurden mehrere Primaner in den Stand gesetzt, der an d Tage in der Singakademie veranstalteten Festfeier beizuwohnen.

Den Geburtstag Seiner Majestät des Kaisers und Königs feierten Gymnasium und schule tags zuvor durch Gesang, Schülerdeklamationen und Festrede; dieselbe hielt im Gymnasium Oberlehrer Günther, in der Vorschule Herr Mehles.

Die Entlassungsprüfungen wurden am 7. und 8. September und am 29. und 30 März abgeh beidemal unter dem Vorsitz des Herrn Geheimen Regierungsrates Dr. Pilger.

Im Winterhalbjahre fand der applikatorische Unterricht eines Teiles der Kursisten der Königl Turnlehrer-Bildungsanstalt in den Klassen Ober- und Unter-Sekunda und Ober-Tertia des Gymnasiums

Leider ist auch dieses Schuljahr nicht vorübergegangen, ohne uns einen lieben Schüler zu ra am 9. September starb nach kurzem Krankenlager der Unter-Tertianer Paul Langenbach an einer D darmentzündung; wir widmeten den schwergeprüften Eltern unsere herzliche Teilnahme.

IV. Statistische Mitteilungen.

1. Übersicht über die Frequenzverhältnisse im Laufe des Schuljahres.

	A. Gymnasium.																		B. Vorschule.											
	OIO.	OIM.	UIO.	UIM.	OIIO.	OIIM.	UIIO.	UIIM.	OIIIO.	OIIIM.	UIIIO.	UIIIM.	IVO.	IVM.	VO.	VM.	VIO.	VIM.	Summe	1A.	1B.	2A.	2B.	3A.	3B.	4A.	4B.	5A.	5B.	6A.	6B.	Summe
1. Bestand am 1. Februar 1894	29	24	29	18	42	26	48	40	43	40	49	43	49	46	51	37	51	50	715	44	45	47	46	47	46	47	48	48	49	43	43	553
2. Abgang bis zum Schluſs des Schuljahres 1893/94	24	—	3	1	7	—	7	1	6	—	6	3	2	1	4	—	4	1	70	40	40	1	—	1	1	1	4	1	2	—	—	91
3a. Zugang zu Ostern 1894 durch Versetzung	22	—	29	—	29	—	23	—	28	—	29	—	39	—	38	—	—	—	237	38	38	40	40	42	41	43	44	43	43	—	—	412
3b. Zugang zu Ostern 1894 durch Übertritt aus dem Nebencötus	—	5	—	4	—	6	—	12	2	12	4	12	3	15	1	5	3	9	93	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3c. Zugang zu Ostern 1894 durch Aufnahme	—	—	1	1	5	1	2	—	1	—	2	—	2	1	1	—	48	1	66	1	1	—	—	—	—	—	1	1	1	44	43	92
4. Bestand am Anfang des Schuljahres 1894/95	22	29	30	22	34	33	25	51	33	50	38	48	47	58	43	41	51	56	711	43	44	48	48	48	46	48	47	48	47	44	43	554
5. Zugang im Sommerhalbjahr 1894	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	1	—	2	—	—	—	—	—	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
6. Abgang im Sommerhalbjahr 1894	—	22	—	2	—	4	—	6	1	3	1	6	4	3	2	4	1	7	66	36	36	2	4	—	1	2	—	1	2	1	4	89
7a. Zugang zu Michaelis 1894 durch Versetzung	—	12	—	13	—	26	—	35	—	31	—	36	—	30	—	39	—	—	222	38	38	40	40	41	43	41	40	41	36	—	—	398
7b. Zugang zu Michaelis 1894 durch Übertritt aus dem Nebencötus	7	1	7	—	14	1	16	3	12	1	11	3	14	2	7	2	8	1	110	—	1	—	1	—	—	—	—	—	2	—	—	4
7c. Zugang zu Michaelis 1894 durch Aufnahme	—	—	1	—	—	1	2	2	1	—	3	3	—	2	—	3	1	39	58	1	—	—	—	—	—	1	3	—	2	40	37	84
8. Bestand am Anfang des Winterhalbjahrs 1894/95	28	13	38	14	47	30	40	44	44	32	49	42	57	39	46	44	58	42	707	45	47	47	47	49	48	47	47	45	45	42	40	549
9. Zugang im Winterhalbjahr 1894/95	—	2	—	—	—	1	—	—	—	1	—	—	—	—	1	—	—	—	5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10. Abgang im Winterhalbjahr 1894/95	4	—	—	—	—	2	—	—	1	—	—	—	1	—	1	—	1	1	11	—	—	1	—	—	—	—	—	2	1	—	1	5
11. Bestand am 1. Februar 1895	24	15	38	14	47	29	40	44	43	33	49	42	56	39	46	44	57	41	701	45	47	46	47	49	48	47	47	43	44	42	39	544
12. Durchschnittsalter am 1. Februar 1895. Jahre	19,2	18,6	18,1	17,4	17,2	16,7	16,2	16	15	14,1	14	13,1	12,8	12,1	11,7	11,1	10,7	10		9,7	9,5	8,6	8,7	8,2	8,3	7,9	7,7	7,6	7,7	6,5	6,1	

2. Übersicht über die Religions- und Heimatsverhältnisse der Schüler.

	A. Gymnasium.							B. Vorschul				
	Evang.	Kath.	Diss.	Jud.	Einh.	Ausw.	Ausl.	Evang.	Kath.	Diss.	Jud.	Ei
Am Anfang des Sommerhalbjahres 1894 .	622	25	—	64	643	67	1	474	22	1	57	5
Am Anfang des Winterhalbjahres 1894/95	618	22	—	67	633	73	1	466	25	2	56	5
Am 1. Februar 1895	612	22	—	67	627	73	1	463	25	2	54	5

3. Übersicht über die Abiturienten.

a. Ostern 1894.

No.	Name.	Geburts- Zeit.	Geburts- Ort.	Religion.	Des Vaters Stand.	Des Vaters Wohnort.	Aufenthalt auf dem Gymnasium Jahre.	Aufenthalt in Prima Jahre.	
1.	Wilhelm Bayer	2. Dezember 1875	Berlin	kath.	Geh. Sekretär †	Berlin	6	2	R
2.	Hans Meyer	22. Mai 1876	Berlin	jüd.	Buchdruckereibesitzer	Berlin	9	2	R
3.	Alfred Kind	2. Januar 1876	Berlin	evang.	Kaufmann	Berlin	9	2	
4.	Gerhard Zeller	14. Mai 1875	Oranienburg	evang.	Oberprediger †	Oranienburg	7	2	
5.	Ernst Jacobsohn	19. Oktober 1875	Berlin	jüd.	Kaufmann	Berlin	9	2	
6.	Karl Boldt	20. November 1875	Werder	evang.	Arzt	Berlin	9	2	
7.	Franz Sachs	6. März 1875	Berlin	jüd.	Kaufmann †	Berlin	9 1/2	2 1/2	
8.	Georg Kerner	14. Januar 1874	Berlin	evang.	Kaufmann	Berlin	9	2	
9.	Erich Kirchner	12. September 1874	Kl.-Ziethen b. Berlin	evang.	Domänenpächter†	Dahlem, Kr. Teltow	3	2 1/2	
10.	Georg Seibt	2. September 1874	Meseritz	evang.	Kaufmann	Berlin	2 1/2	2	M
11.	Ernst Breest	24. April 1875	Wilsnack	evang	Pastor	Berlin	9	2	P
12.	Otto Goldstein	10. September 1875	Berlin	jüd.	Kaufmann	Berlin	9 1/2	2 1/2	
13.	Wilhelm Borchert	29. November 1873	Berlin	evang.	Kaufmann	Berlin	10 1/2	3 1/2	
14.	Franz Tiburtius	24. Januar 1876	Berlin	evang.	Oberstabsarzt a.D.	Berlin	9	2	
15.	Paul Pirl	23. März 1873	Halle a. S.	evang.	Rentier	Charlottenburg	10	3 1/2	
16.	Robert Hantke	21. Januar 1876	Berlin	jüd.	Kaufmann	Berlin	9	2	
17.	Hermann Ernst	27. Dezember 1873	Berlin	evang.	Kaufmann †	Berlin	10 1/2	2	
18.	Max Warneck	28. Februar 1874	Berlin	evang.	Kürschner †	Berlin	10 1/2	3	
19.	Hans Pelte	4. Dezember 1873	Berlin	evang.	Geheim-Sekretär	Berlin	10 1/2	2 1/2	
20.	Hermann Voigt	28. Januar 1875	Berlin	evang.	Professor †	Berlin	10	2 1/2	
21.	Willibald Motzkau	4. Dezember 1874	Berlin	evang.	Kriminalkommiss.	Berlin	2	2	
22.	Martin Haufs	24. März 1875	Berlin	evang.	Postsekretär	Rixdorf	10	2	
23.	Ernst Schmidt	24. Januar 1873	Berlin	evang.	Versicherungsbeamter	Berlin	11	3	
24.	Fritz Dammer	4. April 1874	Berlin	evang.	Dr. phil.	Friedenau	11	3	

b. Michaelis 1894.

Name.	Geburts-Zeit.	Geburts-Ort.	Religion.	Des Vaters Stand	Des Vaters Wohnort	Aufenthalt auf dem Gymnasium Jahre.	Aufenthalt in Prima Jahre.	Gewählter Beruf.
Strasburger	2. August 1875	Koburg	evang.	Kaufmann †	Berlin	9	2	Ingenieurfach.
ıke	16. März 1876	Leipzig	evang.	Ober-Inspektor †	Berlin	9	2	Medizin.
ɔder	11. Oktober 1876	Berlin	evang.	Zugführer †	Berlin	9	2	Medizin.
Kaltwasser	9. Juni 1875	Dornum, R.-B. Aurich	evang.	Hausvater	Berlin	9½	2½	Theologie.
enbach	13. August 1876	Berlin	evang.	Kaufmann	Berlin	9	2	Medizin.
ze	21. Februar 1874	Berlin	evang.	Geh. Kanzleirat	Berlin	10	2	Rechtswissenschaft.
urtin	29. August 1874	Berlin	evang.	Dr. phil. †	Berlin	10½	2½	Maschinenbaufach.
ulz	27. Juli 1876	Berlin	evang.	Geh. Sekretär	Berlin	9	2	Medizin.
matzsch	14. November 1873	Berlin	evang.	Universitäts-Prof.	Berlin	11	3	Theologie.
a	12. Oktober 1875	Berlin	evang.	Rentier	Berlin	9½	2	Bergfach.
lt	6. November 1873	Berlin	evang.	Kaufmann †	Berlin	3	2	Heeresdienst.
mgarten	5. Oktober 1875	Berlin	evang.	Rentier	Berlin	9½	2	Theologie.
mer	19. November 1875	Berlin	evang.	Kanzleirat	Berlin	9	2	Rechtswissenschaft.
ıer	9. Juni 1876	Berlin	evang.	Marine-Oberingenieur †	Berlin	9½	2	Rechtswissenschaft.
hm	30. Juni 1875	Kloster-Häseler bei Naumburg a. S.	evang.	Superintendent	Treuenbrietzen	6½	2	Medizin.
igemüller	5 November 1872	Beeskow	evang.	Bureauvorsteher	Schöneberg	12½	3½	Maschinenbaufach.
r	19. August 1872	Lingen	evang.	Kreisbaumeister †	Pleschen	3	2	Baufach.

c. Ostern 1895.

Die Mitteilung kann erst im nächstjährigen Programm erfolgen.

V. Sammlungen von Lehrmitteln.

1. **Lehrerbibliothek.** Fortgesetzt wurden: Annalen für Physik und Chemie nebst Bei-ern; Neue Jahrbücher für Philol. und Paedag.; Philologus; Rheinisches Museum; Hermes; Centralblatt reufsische Unterrichtsverwaltung; Zeitschrift für Gymnasialwesen; Literarisches Centralblatt; Theologische aturzeitung; Zeitschrift für den Unterricht in Chemie und Physik; Hoffmann, Zeitschrift für mathemat. naturwiss. Unterricht; Allgemeine deutsche Bibliographie; Kehrbach, Mitteilungen der Gesellschaft für sche Erziehungs- und Schulgeschichte; Grimm, Deutsches Wörterbuch; Allgemeine deutsche Biographie; iv für Lateinische Lexicographie; Fries u. Meier, Lehrproben und Lehrgänge; Roscher, Mythologisches erbuch; Verhandlungen der Direktoren-Versammlungen; Rethwisch, Jahresberichte über das höhere lwesen; Monumenta Germaniae Paedagogica; Goethe's Werke (herausgegeben im Auftrage der Grofs-gin Sophie von Sachsen); Iwan Müller, Handbuch der klassischen Altertumswissenschaften; Holm, chische Geschichte; Gröber, Grundrifs der romanischen Philologie; E. Curtius, Gesammelte Abhand-n; Treitschke, deutsche Geschichte im 19. Jahrhundert; Gemoll, Realien bei Horaz; Sybel, Begründung Deutschen Reiches unter Wilhelm I.; Cantor, Geschichte der Mathematik. — Ferner wurden an-hafft: Jebb, Homer, Einführung in Ilias und Odyssee; Reitzenstein, Drei Vermutungen zur Geschichte römischen Literatur; Ries, Was ist Syntax? Schwartz, Über Demosth. erste Philippica; Schanz, Platos

Apologie, kritische Ausgabe mit lateinischen Anmerkungen und erklärende Ausgabe mit deutschen
merkungen; Jörs, Die Ehegesetze des Augustus; Birt, Das antike Bücherwesen; Schmidt, Adolf, Handb
der griechischen Chronologie, herausgegeben von Rühl; Schmidt, Friedrich, Der Briefwechsel Ciceros
Proconsulat in Cilicien bis zur Ermordung Cäsars; Pauly, Realencyclopädie des klassischeu Altertums, N
bearbeitung, veranstaltet von G. Wissowa, I.; Heberding, Die Reisen des Pausanias durch Griechenla
Thomasius, Über die Nachahmung der Franzosen; Friedrich, Horaz-Untersuchungen; Seek, Geschichte
Unterganges der antiken Welt; Reinach, Mithradates, übersetzt von Goetz; Cicero, de officiis und de fini
bonorum et malorum, ed. Müller, je 6 Exemplare. — An Geschenken gingen ein: Vom Herrn Mini
der geistlichen, Unterrichts- und Medizinal-Angelegenheiten: Witte, Die Erneuerung der Wittenberger Schl
kirche; Urkunde über die Einweihung der erneuerten Schlofskirche in Wittenberg; vom Magistrat
Stadt Berlin: Katalog der Bibliothek der Göritz-Lübeck-Stiftung, II, 1 u. 2, Zur vaterländischen Geschicl
Statistisches Jahrbuch der Stadt Berlin, 1891 u. 1892; von den Herren Verfassern: Schenkendorff
Schmidt, Jahrbuch für Jugend- und Volksspiele, III; Christlieb, Handbuch der evangelischen Religionsle
nach den neuesten Lehrplänen bearbeitet; Wiehr, Napoleon und Bernadotte; Strack, H., Einleitung in
Talmud; Altenkrieger, Friedrich Nicolais Jugendschriften; Naumann, Odyssee, Text und Kommentar; Pl
Die Königspfalzen der Merowinger und Karolinger; Scheffler, Hermann, Die Welt nach menschlicher
fassung; Beiträge zur Theorie der Gleichungen; Beiträge zur Zahlentheorie; Die Äquivalenz der Naturkr
und das Energiegesetz als Weltgesetz; Die Grundlagen der Wissenschaft; Die Hydraulik auf neuer Gr
lage; Die quadratische Zerfällung der Primzahlen; Ein Satz aus Legendres Zahlentheorie; Die Naturges
und ihr Zusammenhang mit den Prinzipien der abstrakten Wissenschaften; von Herrn Rechnungsrat H
Fortsetzung der Zeitschrift des statistischen Büreaus der Stadt Berlin; von der Wittwe des Verfass
Bobrik, Horaz, Entdeckungen und Forschungen; von dem Herrn Verleger Rüger: Weddigen, Ein ein
Christentum und eine einige christlich-deutsche Schule; A. Pappritz, Vorurteile, Roman aus dem märkis
Gesellschaftsleben; A. Pappritz, Aus den Tiroler Bergen; v. Essen, Vergangenes aus dem Leben e
Diplomaten. — Aus dem Nachlasse des Professors Eduard Borchard durch die Erben überwiesen
Reihe von theologischen, philosphischen, philologischen, literar-historischen, geographischen und biographis
Schriften und von Ausgaben deutscher, griechischer und römischer Autoren, letztere zum Teil in Ü
setzungen. Unter anderem: Schwarz, Predigten aus der Gegenwart; Bluntschli, Holtzmann, Rothe, Schei
vier Vorträge über Aufgaben des Christentums; Luther's reformatorische Schriften, herausgegeben
Zimmermann; D. Strauss, Der Romantiker auf dem Thron der Cäsaren, Julian der Abtrünnige; Less
Christentum und Philosophie, gegen Joh. Jacoby verteidigt; Koette, Concordia, Die symbolischen Bü
der evangelisch-lutherischen Kirche; K. Hase, Neue Propheten; Aus Schleiermacher's Leben in Brie
Krummacher, Bibelkatechismus; Pfleiderer, Das Wesen und die Geschichte der Religion; Lisco, Das
Testament, nach Luther's Übersetzung erklärt; Feuerbach über Philosophie und Christentum; Engel
Johann Bugenhagen; De Wette, Kurze Erklärung des Römerbriefes; Helbig, Ch. L. Liskow, ein Be
zur Litteratur und Culturgesch. d. 18. Jhdts. Joh. Ronge, Schriften über die römisch-katholische Kir
D. Strauss, Chr. Märklin, ein Lebensbild; Phil. Wolff, Jerusalem; Philipp Melanchthon, der Le
Deutschlands; Benecke, Wilhelm Vatkes Leben und Schriften; Sydow, Aktenstücke über das Disziplı
verfahren über ihn; Bunsen, Die Verfassung der Kirche der Zukunft. — Reinhold, Gesch. der Philosop
Schleiermacher, Erziehungslehre, herausgegeb. v. Platz; einige Hauptwerke Kants, erklärt v. Kirchm
Reimarus, allgem. Betrachtungen über die Triebe der Tiere; Schubert, die Symbolik des Traumes; Schu
die Nachtseiten der Naturwissenschaft; Platos Staat, von Schleiermacher, erkl. v. Kirchmann; Reinh
der Kleinigkeitsgeist in der Sittenlehre; Schaller, Leib und Seele, zur Aufklärung über Köhlerglauben
Wissenschaft; Erasmus Roterod., colloquia familiaria; Vogler, Karakter und Autorschaft der epis
obscurorum viror.; Pappenheim, Amos Comenius; Langenberg, Diesterwegs Leben und Schriften; Pestal
Fabeln; Gorne, die Principien der Sittenlehre von Aristoteles bis in die neueste Zeit. — M. Müller,
lesungen über die Wissenschaft der Sprache; H. Leo, Lehrbuch der Universalgeschichte; Daumer,
theilungen über Kaspar Hauser; E. M. Arndt, Erinnerungen aus dem äufseren Leben. — Grube, Al
wanderungen; Müller von Halle, Ansichten aus den deutschen Alpen; Desor, Die Sahara; Schauenb
Reisen in Centralafrika von Mungo-Park bis Barth und Vogel; Kletke, Livingstones Reisen in Südaf
Vaerst, die Pyrenäen; Schweitzer, Island; Kant, Physische Geographie; Kippis, Leben des Kapitäns J
Cook; Arenz, die Entdeckungsreisen in Nord- und Mittelafrika von Richardsen, Overweg, Barth und V
Büttner, Briefe aus Nordamerika; Pichler, Aus den Tiroler Bergen; Drosinis, Land und Leute in N
Euboea, deutsch v. Boltz; Maron, Japan und China; Häring (W. Alexis), Andalusien; Apel, 3 Monat
Abyssinien. — Jean Paul, sämmtl. Werke; Klopstocks Werke; Goethes Egmont, erkl. v. Düntzer; Goe
Hermann und Dorothea, erkl. v. Cholevius; Über lyrische Ged. Goethes, von Kannegiesser; Rosenk
Rede zur Säkularfeier Herders; Ludwig I. v. Baiern, Walhallas Genossen; Vilmar, Gesch. d. deuts
Nationalliteratur; Weber, Gesch. d. deutschen Litteratur; Rönnefahrt, Goethes Faust und Schillers
Wieland, Idris, Agathon, der neue Amadis, neue Göttergespräche; Haller, Gedichte; Chr. E. Kleists W
Jac. Grimm, Rede auf W. Grimm und über das Alter; Collin, Regulus; Schillers Tell und seine Qu

von J. Meyer; Frischbier, preufs. Sprichwörter; Minckwitz, Lehrbuch d. deutschen Verskunst; K. F. Becker, ausführliche Grammatik der deutschen Sprache. — Homers Ilias und Odyssee v. Faesi; Wolf, Prolegom. ad Homerum; W. Müller, Homerische Vorschule; Retzlaff, Vorschule zu Homer; Seiler, Wörterbuch zu Homer; Aeschylus von Bloomfield; Aeschylus v. Dindorf; Aeschylus, lat. v. Schütz; Aeschylus Choephori v. Weil; Sophocles von Schneidewin; Euripides Iphig. i. Aul. mit Commentar v Firnhaber; Euripides ausgewählte Tragöd., metrisch übers. v. Fritze. Herodot, übers. v. Lange; Theocritus, Bion und Moschus v. Meineke; Xenophon, in Ausgaben von Krüger, Breitenbach, Hertlein, Büchsenschütz, Rehdantz, Vollbrecht; Xenophon, sämmtl. Werke, deutsch von Walz, Tafel, Osiander, Frick, Christian; Lysias ausgew. Reden, von Frohberger; Plato v. Stallbaum; Platos Kriton, übers. u. erkl. v. Nüsslin; Vergils Ged. v. Ladewig; Vergil, übers. v. Voss; Horaz, Satir. u. Episteln v. Krüger; Livius v. Weifsenborn; Ciceros Reden, v. Halm; Cicero de offic. v. Heine; Cic. Tusculanae, v. Fischer-Soroff; Ciceros Briefe, übers. v. Wieland; Cicero de nat. deor. v. Schoemann. — Aufserdem eine Reihe von Nachschriften der Vorlesungen von Boeckh, L. Ranke, C. Ritter, Trendelenburg und Zumpt. —

2. Die Schülerbibliothek des Gymnasiums wurde vom 1. April 1894 bis 15. Februar 1895 benützt von 49 + 34 + 64 + 47 Schülern. Angeschafft wurden: Fortsetzung von Onckens Allgemeiner Geschichte in Einzeldarstellungen; Schmidt, Graf Albert von Hohenberg; Landsberg, Streifzüge durch Wald und Flur; Seemann, Kunsthistorische Bilderbogen; Wichert, Heinrich von Plauen; Schwebel, Markgraf Waldemar. — Als Geschenke gingen ein: Verne, Das Land der Pelze; Höcker, Der Kampf um Thron und Ehre; Piazzi, Lehrbuch der Astronomie; Lackowitz, Ekkehard und die Klosterknaben von St. Gallen; Pajeken, Im wilden Westen; Weddigen, Der deutschen Jugend Schatzkästlein; Andree, Die deutschen Nordpolfahrer auf der Germania und Hansa; Witte, Erneuerung der Wittenberger Schlofskirche; Urkunde über die Einweihung der Wittenberger Schlofskirche.

3. Für die Schülerbibliothek der Vorschule wurden angekauft Jugendschriften von Fr. Hoffmann, Gust. Nieritz, Osk. Höcker, Christoph v. Schmid, Ottilie Wildermuth. Ferner: V. Rein, Ich will nicht; Stephan, Zum heiligen Kreuz; Bahmann, Das letzte Kleinod; Jaeger, Der verlorene Sohn; E. Carlowitz, Gefährliche Wege; Werther, Kleine moralische Erzählungen; G. Walther, Erzählungen und Märchen; Friedrich Jacobs. Kleine Erzählungen; Plieninger, Beispiele des Guten; Neumann-Strela, Hohenzollern-Märchen; Henriette Anders, Rübezahl; Herbert von Osten, Erzählungen für die Jugend; Hermann Wagner, Der Spielkamerad.

4. Der geographisch-historische Apparat wurde durch folgende Anschaffungen ergänzt: Kiepert, Palästina, Orbis terrarum; Italien (pol.), Balkanländer, Scandinavien; Vincens von Haardt, Amerika; Stülpnagel, Europa (pol.); Boettcher-Freitag, Mitteleuropa; Pläne der Schlachtfelder von Trautenau, Gitschin, Königgrätz.

5. Für das physikalische Kabinet wurde eine neue Luftpumpe angeschafft, aufserdem mufsten an mehreren Apparaten Reparaturen ausgeführt werden. Geschenkt wurde von Herrn Dr. Weise eine Sammlung verschiedener Arten von Schiefspulver; der Unterprimaner Neumann fertigte ein Modell des Grafs-Hannschen Hahnes an.

6. Für die naturhistorische Sammlung wurden angeschafft: 10 Blätter der neuen Wandtafeln für den Unterricht in der Naturgeschichte von Jung, von Koch und Quentell; ein Situs-Präparat von Miurus vulgaris; Mus musculus; Hirundo urbica. An Geschenken gingen ein: Von Herrn Franz Amft, Erzeugnisse des Stafsfurter Salzbergbaus; vom Ober-Tertianer Streckfufs Trigla hirundo; vom Quartaner Latschkowski das Nest eines Singvogels; von den Quintanern Heymann eine Kupferotter, Drügemüller ein Kieglitz, Ollendorf, ein Hasenschädel, Deter, ein Gänseschädel.

7. Für die Musikalien-Sammlung wurden angeschafft: Altniederländische Volkslieder des Adrianus Valerius, bearbeitet von Kremser, sowie Mendelssohns Comitat für gemischten Chor.

Für alle Zuwendungen sagen wir auch an dieser Stelle unseren herzlichen Dank.

VI. Stiftungen und Unterstützungen von Schülern.

1. Die Lehrerwitwen-Kasse des Königlichen Friedrich-Wilhelms-Gymnasiums, der Königlichen Real-, Elisabeth- und Vorschule besafs am Schlusse des Jahres 1894 zwei Hypotheken von zusammen 46500 Mark, aufserdem an Wertpapieren mit Einschlufs des Lehmann'schen Legates 28000 Mark und einen Baarbestand von 1200,75 Mark. Die Zahl der Witwen betrug 19, von denen jedoch eine, Frau Professor Kroenig, die ihr zustehende Pension von 172 Mark der Kasse, wie bisher immer, als Geschenk überwiesen hat. Aufserdem überwiesen die Lehrer der Vorschule der Kasse 100 Mark. Für Zeugnisabschriften gingen 15 Mark ein.

2. Das Schülerstipendium, nach den Statuten dazu bestimmt, dürftige, aber würdige Zöglinge, besonders der oberen Klassen, zu unterstützen, wobei ganz- oder halbverwaiste bei sonst gleichen Verhältnissen jederzeit den Vorzug haben sollen, hat in dem Zeitabschnitt, über den wir hier zu berichten haben (vom 15. Februar 1894 bis ebendahin 1895), sich in folgender Weise weiter entwickelt: Es gingen ein:

A. Aus dem Kaiserlichen Hause:
150 M. von Seiner Majestät dem Kaiser;
30 M. von Ihrer Majestät der Kaiserin Friedrich.

B. An aufserordentlichen Beiträgen oder Einnahmen:
100 M. von dem Abiturienten Pickenbach und
2 M. 70 Pf. für 9 von der Befserschen Buchhandlung verkaufte Exemplare der Schrift von R. Fofs über Ludwig Uhland.

Wir fühlen uns durch diese Gaben und Zuwendungen von neuem zu tiefstem Danke verpflichtet, zugleich aber freuen wir uns, mitteilen zu können, dafs es uns möglich gewesen ist, aus den Zinsen der Stiftung im Berichtsjahre 6 Schüler mit insgesamt 840 M. zu unterstützen.

3. Aus dem Rankefonds wurden zu Ostern den Abiturienten Wilhelm Bayer, Hans Meyer, Alfred Kind und Gerhard Zeller, zu Michaelis dem Abiturienten Willy Rathke Prämien übergeben.

4. Von den Universitäts-Stipendien des Gymnasiums sind zum 1. April d. J. zwei Staatsstipendien und zu Michaelis d. J. ein Staatsstipendium, das einmalige Geschenk aus Staatsfonds und das Oelrichssche Viatikum zu vergeben.

VII. Mitteilungen an die Schüler und ihre Eltern.

Das Schuljahr wird Sonnabend, den 6. April, um 8 Uhr mit der Verkündigung der Versetzungen und der Austeilung der Zeugnisse innerhalb des Schulkreises geschlossen.

Das Sommerhalbjahr beginnt Dienstag, den 23. April, im Gymnasium um 8 Uhr, in der Vorschule um 11 Uhr.

Der Direktor.
Noetel.

Königliches Gymnasium zu Deutsch Krone.

Schuljahr 1890/91.

Sechsunddreißigster Jahresbericht

erstattet vom

Direktor des Gymnasiums

Dr. Stuhrmann.

Inhalt: 1. Integration einiger bestimmten Integrale auf complexem Wege. Von Gymnasiallehrer Frech.
2. Schulnachrichten von dem Direktor.

Deutsch-Krone.
Druck von F. Garms.
1891.

1891. Progr. Nr. 26.

Integration einiger bestimmten Integrale auf complexem Wege.

Aus der analytischen Geometrie ist bekannt, daß man jede reelle stetige Variable als einen Punkt tellt, der sich in einer geraden Linie bewegt. Will man jedoch $z = x + i y$ geometrisch dar- en, so gehören zwei Dimensionen dazu. Man nennt dann den Punkt $x + i y$, dessen Coordinaten nd y sind. Ist $z = x + i y$ stetig veränderlich, so wird der Punkt z eine ununterbrochene e durchlaufen, die aber ganz beliebig ist, da x und y sich unabhängig von einander verändern nen. Während eine reelle Variable nur auf einem Wege von einem Orte zu einem andern gelangen t, kann es eine complexe auf unendlich viele Arten. Definiren wir mit Schlömilch das bestimmte egral durch:

$$\int f(z)\,dz = \operatorname{Lim}\left[f(z_0)(z_1 - z_0) + f(z_1)(z_2 - z_1) + \ldots\ldots + f\left(\begin{matrix} z \\ n-1 \end{matrix}\right)\left(\begin{matrix} Z - z \\ n-1 \end{matrix}\right)\right.$$

behalten diese Definition auch für complexe $z_0\ z_1 \ldots$ bei, so sehen wir, daß der Weg von z_0 Z willkürlich ist. Riemann hat nun gefunden, daß $\int f(z)\,dz$ immer Null ist, falls $f(z)$ rhalb eines geschlossenen Gebietes und auf der Begrenzung eindeutig, stetig und endlich ist, woraus t, daß solche Integrale über zwei verschiedene Wege, die von z_0 nach Z in demselben Sinne führen, elben Werth haben. So ist für Figur I

$$\int_0^a f(z)\,dz + \int_a^{a+ib} f(z)\,dz = \int_0^{ib} f(z)\,dz + \int_{ib}^{ib+a} f(z)\,dz\,.$$

Im ersten Integrale ist für $z : x$, im zweiten für $z : a + i y$, im dritten für $z : i y$ und vierten für $z : i b + x$ zu setzen, so daß ich erhalte:

$$\int_0^a f(x)\,dx + i\int_0^b f(a + iy)\,dy = i\int_0^b f(iy)\,dy + \int_0^a f(ib + x)\,dx$$

oder

$$\int_0^a f(ib + x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx = i\left\{\int_0^b f(a + iy)\,dy - \int_0^b f(iy)\,dy\right\}$$

Setze ich $f(z) = z\, e^{i c z}$ so ist dieses stetig und eindeutig für endliche z; für $z = 0$ w
$f(z) = 0$ und für $z = i \infty$ wird $f(z) = 0$. Nun ist:

$$f(a + i y) = (a + i y)\, e^{i c (a + i y)};\ f(x + i b) = (x + i b)\, e^{i c (x + i b}$$

$$f(i y = i y\, e^{-c y},\ \text{also:}$$

$$e^{-c b} \int_0^a (x + i b)(\cos c x + i \sin c x)\, d x - \int_0^a x (\cos c x + i \sin c x)\, d x$$

$$i \int_0^b (a + i y)(\cos c a + i \sin c a)\, e^{-c y}\, dy + \int_0^b y\, e^{-c y}\, dy$$

$b = \infty$, das Reelle gleich dem Reellen gesetzt:

$$-\int_0^a x \cos c x\, d x = \int_0^\infty y\, e^{-c y}\, dy - \cos c a \int_0^\infty y\, e^{-c y}\, dy - a \sin c a \int_0^\infty e^{-c}$$

$$-\int_0^a x \sin c x\, d x = a \cos c a \int_0^\infty e^{-c y}\, dy - \sin c a \int_0^\infty y\, e^{-c y}\, dy$$

$a = 1$

$$\int_0^1 x \cos c x\, d x = -\left(\frac{1}{c^2} - \frac{\cos c}{c^2} - \frac{\sin c}{c}\right) = \frac{1}{c^2}(\cos c + c. \sin c - 1$$

$$\int_0^1 x \sin c x\, d x = -\left(\frac{\cos c}{c} - \frac{\sin c}{c^2}\right) = \frac{1}{c^2}(\sin c - c. \cos c)$$

$a = \pi$ und c eine ganze Zahl:

$$+\int_0^\pi x \cos c x\, d x = -\int_0^\infty y\, e^{-c y}\, dy + \cos c \pi \int_0^\infty y\, e^{-c y}\, dy = \frac{1}{c^2}(\cos \pi c$$

$$+\int_0^\pi x \sin c x\, d x = -\pi \cos c \pi \int_0^\infty e^{-c y}\, dy = \frac{\pi}{c}\{\cos (c + 1)\pi\},\ \text{da}$$

$\int_0^\infty y\, e^{-cy}\, dy = \frac{1}{c^2}$ und $\int_0^\infty e^{-c y}\, dy = \frac{1}{c}$ ist.

Setze ich $f(z) = e^{q z + i p z}$, so ist

$f(x + i b) = e^{x q - b p} \{\cos(b q + p x) + i \sin(b q + p x)\}$

$f(a + i y) = e^{q a - p y} \{\cos(p a + q y) + i \sin(p a + q y)\}$

$f(i y) = e^{-p y} (\cos q y + i \sin q y)$; also

$$\int_0^a e^{x q - b p} \{\cos(b q + p x) + i \sin(b q + p x)\}\, dx - \int_0^a e^{x q} (\cos p x + i \sin p x)\, dx =$$

$$e^{q a - p y} \{\cos(p a + q y) + i \sin(p a + q y)\} - i \int_0^b (\cos q y + i \sin q y)\, e^{-p y}\, dy$$

Lasse ich $b = \infty$ werden, so verschwindet das erste Integral wegen $e^{-b p}$, setze ich $a = \pi$, wird, wenn p eine ganze Zahl ist, $\sin p \pi = 0$, also:

$$\int_0^\pi e^{x q} \cos p x\, dx = -\cos p \pi\, e^{q \pi} \int_0^\infty e^{-py} \sin q y\, dy + \int_0^\infty e^{-py} \sin q y\, dy =$$

$$\int_0^\infty e^{-py} \sin q y\, dy\, (1 - e^{q \pi} \cos p \pi)$$

$$\int_0^\pi e^{x q} \sin p x\, dx = \cos p \pi\, e^{q \pi} \int_0^\infty e^{-py} \cos q y\, dy - \int_0^\infty e^{-py} \cos q y\, dy =$$

$$\int_0^\infty e^{-py} \cos q y\, dy\, (\cos p \pi \,.\, e^{q \pi} - 1)$$

Nun ist $\int_0^\infty e^{-y(p + iq)}\, dy = \frac{1}{p + i q} = \frac{p - i q}{p^2 + q^2}$

$$\int_0^\infty e^{-py} \sin q y\, dy = \frac{q}{p^2 + q^2}; \quad \int_0^\infty e^{-py} \cos q y\, dy = \frac{p}{p^2 + q^2}$$

$$\text{also } \int_0^\pi e^{x q} \cos p x\, dx = \frac{q\,(e^{q \pi} \cos \pi - 1)}{p^2 + q^2}$$

$$\int_0^\pi e^{x q} \sin p x\, dx = \frac{p\,(1 - e^{q \pi} \cos p \pi)}{p^2 + q^2},$$

e Werte Dienger auf anderem Wege gefunden hat.

Setze ich $f(z) = \frac{1}{1 - p z}$ und integriere in Figur II über D A B C D, so erhalte ic
$a = 1$:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d x}{1 - p x} = -i \int_0^{\pi} e^{i \delta} \frac{1}{1 - p e^{i \delta}} d \delta = -i \int_0^{\pi} \frac{e^{i \delta} (1 - p e^{i \delta})}{1 + p^2 - 2 p \cos \delta}$$

$$i \int_0^{\pi} \frac{(e^{i \delta} - p) d \delta}{1 + p^2 - 2 p \cos \delta} \text{ und folglich:}$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d x}{1 - p x} = \int_0^{\pi} \frac{\sin \delta \, d \delta}{1 + p^2 - 2 p \cos \delta} = \frac{1}{2 p} \log \left(\frac{1 + p}{1 - p}\right)^2 = \frac{1}{p} \log \frac{1 + p}{1 - p}$$

$$\text{während } \int_0^{\pi} \frac{(\cos \delta - p) d \delta}{1 + p^2 - 2 p \cos \delta} = 0 \text{ ist.}$$

Bis jetzt war f (z) stetig, eindeutig und endlich; ist eine dieser Bedingungen nicht erfü
wird der Satz hinfällig. Schlömilch unterscheidet zwei Fälle; liegt der Ausnahmepunkt au
Begrenzung, so umschließen wir ihn durch einen Kreisbogen, dessen Radius r ist, und lassen
gegen Null convergieren. Liegt der Ausnahmepunkt in der Begrenzung, so umschließen wir ih
einem Kreise. Hierbei findet man, daß man einen größeren Integrationsweg auf einen kleineren z
führen kann, z. B. auf einen kleinen Kreis um den Ausnahmepunkt, vorausgesetzt, daß

$$\operatorname{Lim}_{r = 0} f (z + r e^{i \delta}) \, r e^{i \delta} \text{ immer eine endliche Größe ist.}$$

Es sei $f(z) = \frac{1}{z^2 + p^2}$; f (z) wird unstetig für $z = \pm i p$. Wähle ich in Fig
den Integrationsweg D A B C D, wo $a > p$ sei, so habe ich nur den einen Unstetigkeits
$+ i p$ und habe also:

$$\int_{-a}^{+a} f (z) \, d z + J (B C D) = J (E F G H);$$

im ersten Integrale ist $z = x$; im zweiten $z = a e^{i \delta}$ und im dritten $i p + r e^{i \delta}$

$$\int_{-a}^{+a} \frac{d x}{x^2 + p^2} + \int_0^{\pi} \frac{i a e^{i \delta} d \delta}{a^2 e^{2 i \delta} + p^2} = \int_0^{2 \pi} \frac{i r e^{i \delta} d \delta}{r^2 e^{2 i \delta} - p^2 + 2 i p r e^{i \delta} + p^2} = \int_0^{2 \pi} \frac{i d}{r e^{i \delta} +}$$

wird $r = 0$, so erhalte ich $\frac{1}{2 p} \int_0^{2 \pi} d \delta = \frac{\pi}{p}$. Lasse ich jetzt $a = \infty$ werden, so wird das
Integral Null, also

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d x}{x^2 + p^2} = \frac{\pi}{p}.$$

Es sei $f(z) = \frac{(-iz)^{p-1}}{1-z^2}$, so wird $f(z)$ unstetig für $z = \pm 1$. Diese Punkte sind
uschließen, und ich erhalte unter Benutzung der Figur IV:

$$\int_a^{-(1+r)} f(z)\,dz + \int_{-(1-r)}^{1-r} f(z)\,dz + \int_{1+r}^{a} f(z)\,dz + J(B\,C\,D) = J(E\,F\,G) + J(H\,J\,K)$$

In den 3 ersten Integralen setze ich $z = x$; im vierten $z = a\,e^{i\delta}$, im fünften $z = \left(1 - r\,e^{i\delta}\right)$ im sechsten $z = \left(1 + r\,e^{i\delta}\right)$

Das vierte wird dann $\int_0^{\pi} \frac{i\,a\,e^{i\delta}\left(-i\,a\,e^{i\delta}\right)^{p-1}}{1-\left(a\,e^{i\delta}\right)^2}\,d\delta$;

Das fünfte: $\int_0^{\pi} \frac{i\,r\,e^{i\delta}\,(+i)^{p-1}\left(1-r\,e^{i\delta}\right)^{p-1}}{1-1-r^2e^{2i\delta}+2\,r\,e^{i\delta}}\,d\delta = \int_0^{\pi} \frac{i^p\left(1-r\,e^{i\delta}\right)^{p-1}}{2-r\,e^{i\delta}}\,d\delta$

Das sechste: $\int_0^{\pi} \frac{i\,r\,e^{i\delta}\,(-i)^{p-1}\left(1+r\,e^{i\delta}\right)^{p-1}}{1-1-r^2e^{2i\delta}-2\,r\,e^{i\delta}}\,d\delta = \int_0^{\pi} \frac{i^p\left(1+r\,e^{i\delta}\right)^{p-1}}{2+r\,e^{i\delta}}\,d\delta$

Lasse ich jetzt $r = 0$ werden, so erhalte ich:

$$V + VI = \frac{\pi}{2}\left\{i^p + (-i)^p\right\} \text{ also}$$

$$\int_a^{+a} \frac{(-ix)^{p-1}\,dx}{1-x^2} = \pi\cos\frac{p\,\pi}{2} - \int_0^{\pi} \frac{i\,a\,e^{i\delta}\left(-i\,a\,e^{i\delta}\right)^{p-1}}{1-\left(a\,e^{i\delta}\right)^2}\,d\delta$$

Ist nun $p < 2$, so verschwindet für $a = \infty$ das letzte Integral, und ich erhalte:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-ix)^{p-1}\,dx}{1-x^2} = \pi\cos\frac{p\,\pi}{2}$$

Es sei $f(z) = \frac{1}{1+z+z^2}$, so wird $f(z)$ unendlich und unstetig für $z = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{3}$
ich in Figur V den Integrationsweg D C B A D, so ist der Punkt $\varsigma = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$
schließen, und ich erhalte: $J(D\,C\,B) + J(B\,A\,D) = J(E\,H\,G\,F)$.

Im ersten Integral setze ich $z = a\,e^{i\delta}$, im zweiten $z = x$, im dritten $z = \zeta - r\,e^{i\delta}$, so ist:

$$\frac{i\,e^{i\delta}\,a\,d\delta}{-a\,e^{i\delta}+a^2e^{2i\delta}} + \int_{+a}^{-a} \frac{dx}{1+x+x^2} = -\int_0^{2\pi} \frac{i\,r\,e^{i\delta}\,d\delta}{1+\zeta-r\,e^{i\delta}+\zeta^2-2r\zeta e^{i\delta}+r^2e^{2i\delta}}$$

Das letzte Integral wird, da $1 + \zeta + \zeta^2 = 0$ ist:

$$-\int_0^{2\pi} \frac{i\,r\,e^{i\delta}\,d\delta}{-r\,e^{i\delta}(1 + 2\zeta - r\,e^{i\delta})} = \int_0^{2\pi} \frac{i\,d\delta}{1 - 1 - i\sqrt{3} - r\,e^{i\delta}} \text{ und für } r = 0:$$

$$-\int_0^{2\pi} \frac{d\delta}{\sqrt{3}} = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \text{ Lasse ich a } \infty \text{ werden, so ist;}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x + x^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

Es sei $f(z) = \frac{1}{1 - z + z^2}$, so wird f (z) unstetig für $z = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} i\sqrt{3}$. Wähle in Figur VI den Integrationsweg D A B C D, so ist der Punkt $\zeta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}$ auszuschlie es wird: J (D A B) + J (B C D) = J (E H G F E) Im ersten Integrale ist $z = x$ zweiten $z = a\,e^{i\delta}$, im dritten $z = \zeta + r\,e^{i\delta}$ also:

$$\int_{-a}^{+a} \frac{dx}{1 - x + x^2} + \int_0^{\pi} \frac{i\,a\,e^{i\delta}\,d\delta}{1 - a\,e^{i\delta} + a^2 e^{2i\delta}} = \int_0^{2\pi} \frac{i\,r\,e^{\imath\delta}\,d\delta}{1 - \varsigma - r\,e^{i\delta} + \zeta^2 + 2r\zeta e^{i\delta} + r^2 e}$$

Nun ist $1 - \zeta + \zeta^2 = 0$ also wird die rechte Seite für $r = 0$

$$\int_0^{2\pi} \frac{i\,r\,e^{i\delta}\,d\delta}{-r\,e^{i\delta}(1 - 2\zeta - r\,e^{i\delta})} = -\int_0^{2\pi} \frac{i\,d\delta}{1 - 1 - i\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Lasse ich $a = \infty$ werden, so wird das zweite Integral Null, folglich:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 - x + x^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}; \text{ mithin } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x + x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 - x + x^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Es sei $f(z) = \frac{1}{e^{pz} + e^{-pz}}$. ist $z = q \cdot \frac{i\pi}{2}$, so verschwindet f (z) wenn p mod 2 und q = 1, 3, 5, 7 ꝛc. ist.

Wähle ich in Figur VII den Integrationsweg A B C D A, so ist der Punkt $\zeta =$ auszuschließen, wenn $1 < A\,D < \frac{3\pi}{2}$ ist.

Es ist dann: J (A B) + J (B C) + J (C D) + J (D E) + J (G A) = J (G

Im ersten Integral ist z = x, im zweiten z = a + i y, im dritten z = x + i b, vierten z = i y, im fünften z = i y und im sechsten $z = \frac{i\pi}{2} + r\,e^{\imath\delta}$; ich erhalte

$$\int_0^a \frac{dx}{e^{px} + e^{-px}} + i\int_0^b \frac{dy}{e^{p(a+iy)} + e^{-p(a+iy)}} + \int_a^0 \frac{dx}{e^{p(x+ib)} + e^{-p(x+ib)}}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}+r} \frac{dy}{e^{piy}+e^{-piy}} + i\int_{\frac{\pi}{2}-r}^{0} \frac{dy}{e^{piy}+e^{-piy}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{ire^{i\delta}\,d\delta}{e^{\frac{i\pi p}{2}+pre^{i\delta}}+e^{-\frac{i\pi p}{2}-pre^{i\delta}}}$$

ist $\cos\frac{\pi p}{2} = 0$, $\sin\pi p = \pm 1$ weil $p \equiv 1 \bmod 2$ und zwar $\sin\frac{\pi p}{2} = +1$ wenn $p \equiv 1 \bmod 4$ und $\sin\frac{\pi p}{2} = -1$ wenn $p \equiv 3 \bmod 4$ ist. Nehme ich den ersten Fall, so ist

rechte Seite: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{re^{i\delta}\,d\delta}{e^{-pre^{i\delta}}-e^{pre^{i\delta}}}$. Nun ist

$$e^{pre^{i\delta}} = 1 + pre^{i\delta} + \frac{p^2r^2e^{2i\delta}}{1\cdot 2} + \text{&c.}$$

$$e^{-pre^{i\delta}} = 1 - pre^{i\delta} + \frac{p^2r^2e^{2i\delta}}{1\cdot 2} - \text{&c.}$$

$$ipre^{i\delta} - e^{-ipre^{i\delta}} = 2ire^{i\delta}p\left(1 + \frac{p^2r^2e^{2i\delta}}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{&c.}\right)$$

Setze ich dieses ein, so erhalte ich:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{d\delta}{2p\left(1 + \frac{p^2r^2e^{2i\delta}}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{&c.}\right)}$$ und für verschwindendes r: $+\frac{\pi}{2p}$

Lasse ich jetzt $b = \pi$ werden, so ist

$$\int_a^0 \frac{dx}{e^{(x+ib)p}+e^{-p(x+ib)}} = \int_0^a \frac{dx}{e^{xp}+e^{-xp}}$$ und

$$\int_b^0 \frac{dy}{e^{piy}+e^{-piy}} = -\int_0^{\pi} \frac{dy}{2\cos py}.$$ Lasse ich $a = \infty$ werden,

so ist: $\int_0^{\pi} \frac{dy}{e^{p(a+iy)}+e^{-p(a+iy)}} = 0$; ich erhalte also:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^{px}+e^{-px}} = \frac{\pi}{2p}$$ oder $\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^{px}+e^{-px}} = \frac{\pi}{4p}$; $p \equiv 1 \bmod 4$

und $\int_0^\infty \frac{dx}{e^{px} + e^{-px}} = \frac{\pi}{4p}$ $p \equiv 3 \bmod 4$. Ferner $\int_0^\pi \frac{dy}{\cos py} = 0$

Es sei $f(z) = \frac{1}{1+z^3}$, so wird $f(z)$ unendlich für $z = -1$, $e^{\frac{i\pi}{3}}$ $e^{-\frac{i\pi}{3}}$;

ich als Integrationsweg in Figur VIII A B C A, so habe ich nur den Punkt $z = \frac{i\pi}{3}$ auszuschl

Es wird $J(A\,B) + J(B\,C) + J(C\,A) = J(D\,F\,E\,D)$.

Im ersten Integral ist $z = x$, im zweiten $z = a\,e^{i\delta}$ im dritten $z = i\,y$, im

$z = e^{\frac{i\pi}{3}} + r\,e^{i\delta}$; es wird dann:

$$\int_0^a \frac{dx}{1+x^3} + i\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\,e^{i\delta}\,d\delta}{1+a^3 e^{3i\delta}} + i\int_a^0 \frac{dy}{1-iy^3} = i\int_0^{2\pi} \frac{r\,e^{i\delta}\,d\delta}{1+e^{i\pi}+re^{i\delta}\left(3e^{\frac{2i\pi}{3}}+3e^{\frac{i\pi}{2}}re^{i\delta}+r^2e\right.}$$

$$= i\int_0^{2\pi} \frac{d\delta}{3\,e^{\frac{2i\pi}{3}} + 3\,e^{\frac{i\pi}{3}}\,r\,e^{i\delta} + r^2 e^{2i\delta}} \quad \text{und für } r = 0: = i\int_0^{2\pi} \frac{d\delta}{3\,e^{\frac{2i}{3}}}$$

$-\frac{i\,2\pi}{3}(\cos 60^0 + i \sin 60^0) = -\frac{i\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\sqrt{3}$. Nun ist für $a = \infty$ das zweite In

Null; das dritte wird:

$$-i\int_0^\infty \frac{dy\,(1+iy^3)}{1+y^6} = -i\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^6} + \int_0^\infty \frac{dy\,.\,y^3}{1+y^6} = -i\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^6} + \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{y\,.}{1+}$$

folglich: $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} + \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{y\,dy}{1+y^3} = \frac{\pi}{3}\sqrt{3}$ und $\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^6} = \frac{\pi}{3}$.

Es sei $f(z) = \frac{z}{1+z^3}$, so erhalte ich auf demselben Wege:

$$i\int_0^{2\pi} \frac{r\,e^{i\delta}\,d\delta\left(e^{\frac{i\pi}{3}} + r\,e^{i\delta}\right)}{1+e^{i\pi}+re^{i\delta}\left(3e^{\frac{2i\pi}{3}}+3e^{\frac{i\pi}{3}}re^{i\delta}+r^2e^{2i\delta}\right)} = i\int_0^{2\pi} \frac{d\delta\left(e^{\frac{i\pi}{3}} + re^{i\delta}\right)}{3e^{\frac{2i\pi}{3}}+3e^{\frac{i\pi}{3}}re^{i\delta}+r}$$

$$= \int_0^a \frac{x\,dx}{1+x^3} + i\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 e^{2i\delta}\,d\delta}{1+a^3 e^{3i\delta}} - \int_a^0 \frac{y\,dy}{1-iy^3} = i\int_0^{2\pi} d\delta\, e^{-\frac{i\pi}{3}} = \frac{i\,2\pi}{3}(\cos 60^0 - i\sin$$

$= \frac{i\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\sqrt{3}$, für $r = 0$. Für $a = \infty$ verschwindet das zweite Integral, das dritte

$$\int_0^\infty \frac{y\,dy\,(1+i\,y^3)}{1+y^6} = \int_0^\infty \frac{y\,dy}{1+y^6} + i\int_0^\infty \frac{y^4\,dy}{1+y^6} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^3} + i\int_0^\infty \frac{y^4\,dy}{1+y^6},$$

aus folgt:

$$\int_0^\infty \frac{y^4\,dy}{1+y^6} = \frac{\pi}{3} \text{ und } \int_0^\infty \frac{x\,d\,x}{1+x^3} + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^3} = \frac{\pi}{3}\sqrt{3};$$ wir hatten vorher

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{y\,dy}{1+y^3} + \int_0^\infty \frac{d\,x}{1+x^3} = \frac{\pi}{3}\sqrt{3}, \text{ also: } \int_0^\infty \frac{x\,d\,x}{1+x^3} = \int_0^\infty \frac{d\,x}{1+x^3} = \frac{2\,\pi}{9}\sqrt{3}.$$

Es sei $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^3}$: $f(z)$ wird unstetig für $z = \pm i$; wähle ich in Figur III Weg D A B C D, so habe ich den Punkt $z = +i$ auszuschließen: ich erhalte:

$$J(D\,A\,B) + J(B\,C\,D) = J(E\,F\,G\,H);$$

ersten Integrale setze ich $z = x$, im zweiten $z = a\,e^{i\delta}$, im dritten $z = i + r\,e^{i\delta}$, also

$$\int_{-a}^{+a} \frac{d\,x}{(1+x^2)^3} + i\int_0^\pi \frac{a\,e^{i\delta}\,d\,\delta}{(1+a^2\,e^{2\,i\,\delta})\,3} = i\int_0^{2\,\pi} \frac{r\,e^{i\delta}\,d\,\delta}{(1+(i+r\,e^{i\delta})^2)\,3}.$$

Den Wert rechts erhalte ich, wenn ich zunächst $\frac{1}{(1+z^2)^3}$ nach Potenzen von $\frac{1}{i-z}$ entwickle.

ist $\frac{1}{(1+z^2)^3} = \frac{-i^3}{(1-i\,z)^3\,(z-i)^3}$ und also $\frac{-i^3\,(z-i)^3}{(1-i\,z)^3\,(z-i)^3}$ für $z = i$ ch, so daß $\underset{z=i}{\text{Lim}} \frac{(z-i)^3}{(1-i\,z)^3\,(z-i)^3} = \frac{1}{2^3}$ ist, folglich muß auch $\frac{(z-i)^2}{(1-i\,z)^3\,(z-i)^3}$ $\frac{1}{^3\,(z-i)}$ für $z = i$ endlich, es ist

$$\underset{z=i}{\text{Lim}} \frac{1}{(1-i\,z)^3\,(z-i)} - \frac{1}{2^3\,(z-i)} = \underset{z=i}{\text{Lim}} \frac{2^3-(1-i\,z)^3}{2^3\,(z-i)\,(1-i\,z)^3}$$

s ergiebt $\frac{0}{0}$. Differentiere ich im Zähler und Nenner nach z, so ist:

$$\text{m} \frac{i^3\,(1-i\,z)^2}{= i\,2^3\,(1-i\,z)^3 - 2^3.\,3\,i\,(z-i)\,(1-i\,z)^2} = \frac{3\,.\,2^2.\,i}{2^3\,.\,2^3} = \frac{3\,i}{2^4};$$ mithin:

$$\underset{z=i}{\text{Lim}} \frac{(z-i)^2}{(1-i\,z)^3\,(z-i)^3} - \frac{1}{2^3\,(z-i)} - \frac{3\,i}{2^4}$$ Null und

$$\underset{z=i}{\text{Lim}} \frac{(z-i)}{(1-i\,z)^3\,(z-i)^3} - \frac{1}{2^3\,(z-i)^2} - \frac{3\,i}{2^4\,(z-i)}$$ endlich.

Bringe ich es auf einen Nenner, so ist:

$$\underset{z=i}{\text{Lim}} \frac{6\,i\,(1-i\,z)^2 - 3\,i\,(1-i\,z)^3 - 9\,(z-i)\,(1-i\,z)^2}{2^5\,(1-i\,z)^3\,(z-i) + 2^4.\,3\,(1-i\,z)^2\,(z-i)^2} = \frac{0}{0}$$

noch einmal differentiert:

$$\operatorname*{Lim}_{z=i} \frac{3 \cdot 2^2 (1 - i z) - 3 \cdot 3 (1 - i z)^2 - 9 (1 - i z)^2 + 9 \cdot 2 i (z - i) (1 - i z}{2^5 (1 - i z)^3 - i \cdot 2^5 \cdot 3 (z - i)(1 - i z)^2 - i \cdot 2^5 \cdot 3 (1 - i z)(z - i)^2 + 2^5 \cdot 3 (1 - i z)^2 \cdot (z -}$$

$$\frac{3 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2^2}{2^8} = \frac{-3 \cdot 2^4}{2^8} = -\frac{2}{2^4}.$$

Mithin haben wir:

$$\frac{1}{(1 - i z)^3 (z - i)^3} - \frac{1}{2^3 (z - i)^3} - \frac{3 i}{2^4 (z - i)^2} + \frac{3}{2^4 (z - i)} - \psi (z) = 0$$

wo $\psi (z)$ für $z = i$ endlich bleibt. Integriere ich dieses längs des kleinen Kreises, so verschw die Integrale bis auf $\int \frac{d z}{z - i}$, welches $2 \pi i$ ergiebt.

$$\text{Mithin } i \int_0^{2\pi} \frac{r e^{i \delta} d\delta}{\{1 + (1 + r e^{i \delta}) 2\}^3} = \frac{2 \pi i \cdot 3 i^3}{2^4} = \frac{3 \pi}{16} \cdot 2$$

Lasse ich jetzt D und B in die Unendlichkeit rücken, so wird

$$\int_0^{\pi} \frac{a e^{i \delta} d \delta}{(1 + a^2 e^{2 i \delta})^3} = 0 \text{ und folglich:}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d x}{(1 + x^2)^3} = \frac{2 \cdot 3 \pi}{16} \quad \text{und} \quad \int_0^{\infty} \frac{d x}{(1 + x^2)^3} = \frac{3 \pi}{16}$$

Es sei $f (z) = \frac{1}{(q^2 - z^2)^2}$; dieses wird unstetig für $z = \pm q$; ich benut Figur IV, in der ich statt 1 : q zu setzen habe, welche Punkte ich durch Halbkreise ausschließe ist dann:

$$J (D E) + J (E F G) + J (G H) + J (H I K) + J (K B) = J (D C B).$$

Die Integrale über die Halbkreise betrachte ich besonders, indem ich $f (z)$ einmal nach Po von $\frac{1}{q - z}$ und dann nach Potenzen von $\frac{1}{q + z}$ entwickle. Es ist:

$$\operatorname*{Lim}_{q=z} \frac{(q - z)^2}{(q - z)^2 (q + z)^2} - \frac{1}{(2 q)^2} = 0 \text{ also}$$

$$\operatorname*{Lim}_{q=z} \frac{q - z}{(q - z)^2 (q + z)^2} - \frac{1}{(2 q)^2 (q - z)} = \frac{1}{(2 q)^2 q} \quad \text{also}$$

$$\frac{1}{(q - z)^2 (q + z)^2} - \frac{1}{(2 q)^2 (q - z)^2} - \frac{1}{(2 q)^2 (q - z) q} - \psi (z) = 0,$$

wo $\psi (z)$ für $z = q$ endlich ist. Ebenso ist

$$\frac{1}{(q - z)^2 (q + z)^2} - \frac{1}{(2 q)^2 (q + z)^2} - \frac{1}{(2 q)^2 q (q + z)} - \psi, (z) = 0,$$

wo $\psi, (z)$ für $z = -q$ endlich ist.

Beim Halbkreise H I K muß ich $q - z = r e^{i \delta}$ setzen, wo δ von 0 bis π geht. In K muß ich $q + z = r e^{i \delta}$ setzen, wo δ von π bis 0 geht. Hieraus folgt, daß:

$$J\,(E\,F\,G) = i \int_0^{\pi} \frac{d\,\delta}{(2\,q)^2\,r\,e^{i\,\delta}} + i \int_0^{\pi} \frac{d\,\delta}{(2\,q)^2\,q}$$

$$J\,(H\,I\,K) = i \int_{\pi}^{0} \frac{d\,\delta}{(2\,q)^2\,r\,e^{i\,\delta}} + i \int_{\pi}^{0} \frac{d\,\delta}{(2\,q)^2\,q} \quad \text{ist, folglich}$$

$$J\,(E\,F\,G) + J\,(H\,I\,K) = 0$$

$(z)\,r\,e^{i\,\delta}\,d\,\delta$ und $\int_0^{\pi} \psi_1(z)\,r\,e^{i\,\delta}\,d\,\delta$ sind Null, wenn r sich der Null nähert, da $\psi(z)$ $_1(z)$ in $q = x$ eindeutig, stetig und endlich bleiben. Betrachte ich:

$$C\,B) = i \int_0^{\pi} \frac{a\,e^{i\,\delta}\,d\delta}{(q^2 - a^2\,e^{2\,i\,\delta})^2}$$ und lasse $a = \infty$ werden, so ist $J\,(D\,C\,B) = 0$,

folglich ist $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\,x}{(q^2 - x^2)^2} = 0$ und auch $\int_0^{\infty} \frac{d\,x}{(q^2 - x^2)^2} = 0.$

iere ich in Figur IX längs C D B C, so ist $J\,(C\,B\,D) = i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{a\,e^{i\,\delta}\,d\delta}{(q^2 - a^2\,e^{2\,i\,\delta})^2}$;

für $a = \infty$ ist $J\,(C\,B\,D) = 0$; $J\,(C\,D) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{(q^2 + y^2)^2}$ und

$J\,(E\,F\,G\,H) = i \int_0^{2\,\pi} \frac{d\,\delta}{(2\,q)^2 . q} = \frac{i\,.\,2\,\pi}{4\,q^3}$ also $\int_0^{\infty} \frac{dy}{(q^2 + y^2)^2} = \frac{\pi}{4\,q^3}$

Zum Schluß will ich einige mehrdeutige Functionen betrachten; diese muß ich auf der Riemann'schen ausbreiten, um sie als eindeutig behandeln zu können. Durège leitete den Satz ab: Das $\int f(z)\,d\,z$ genommen um einen Unstetigkeitspunkt, um welchen sich die z Fläche m Mal und in welchem f (z) von endlicher Ordnung unendlich groß wird, hat dann und nur dann on Null verschiedenen Wert, wenn in dem Ausdrucke, welcher die Art des Unendlichwerdens von gibt, das Glied, das von der ersten Ordnung unendlich groß wird, vorhanden ist; und dieser t dann gleich $2\,m\,\pi\,i$ mal dem Coefficienten dieses Gliedes.

s sei $f(z) = \frac{z^1}{\sqrt{p^2 - z^2}}$; f (z) wird unstetig für $z = \pm p$, welcher Punkt zugleich ein gungspunkt ist. Nun ist:

$\frac{z^2}{\sqrt{p^2 - z^2}} = -\sqrt{p^2 - z^2} + \frac{p^2}{\sqrt{p^2 - z^2}}$; da im Nenner nur $(p - z)^{\frac{1}{2}} \cdot (p +$ vorkommt, so kann auch in der Entwickelung nur die $^1/_2$te Potenz vorkommen. Da ferner das Glied $\sqrt{p^2 - z^2}$ für $p = \pm z$ Null wird, so sind die Integrale bezogen auf die Krei die Punkte $+ p$ und $- p$ Null. Berücksichtige ich den Punkt $z = \infty$, so ist

$$\lim_{z=\infty} \frac{z}{\sqrt{p^2 - z^2}} = \pm \frac{1}{i}.$$

Integriere ich also über eine Linie, welche beide Unstetigkeitspunkte umgiebt, so erhalte ich:

$$J = \int \frac{dz}{\sqrt{p^2 - z^2}} = \pm 2\pi.$$

Verengere ich jetzt den Integrationsweg in Figur X bis an den Verzweigungsschnitt, der von nach $+ p$ gelegt ist, so umschließt auch dieser Weg den Punkt ∞, da ja $z = \infty$ kein Unstet punkt ist. Gehe ich nun von $- p$ nach $+ p$, so habe ich oben die linke Seite, unten die welche letztere der Quadratwurzel das negative Zeichen giebt. Es sei $w = \sqrt{z - p}$ u $w = w_0$, $z_{-p} = z_0 - p$; ich setze $z_{-p} = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ und für $z =$ $z_0 - p = r_0(\cos\varphi_0 + i \sin\varphi_0)$. Lasse ich jetzt φ_0 um 2π wachsen, so erhalte ich:

$$z - p = r_0 [\cos(\varphi_0 + 2\pi) + i \sin(\varphi_0 + 2\pi)]$$

$$\text{also } w = r_0^{\frac{1}{2}} \left[\cos\left(\frac{1}{2}\varphi_0 + \pi\right) + i \sin\left(\frac{1}{2}\varphi_0 + \pi\right)\right] = -w_0.$$

Da nun die Integrale um die Punkte $- p$ und $+ p$ Null ergeben, so ist

$$\int_{-p}^{+p} \frac{dz}{\sqrt{p^2 + z^2}} - \int_{+p}^{-p} \frac{dz}{\sqrt{p^2 - z^2}} = 2 \int_{-p}^{+p} \frac{dz}{\sqrt{p^2 - z^2}}.$$

Da aber $\frac{1}{\sqrt{p^2 - z^2}}$ eine grade Funktion ist, so folgt $4\int_0^p \frac{dz}{\sqrt{p^2 - z^2}} = \pm 2\pi$ und w

Elemente positiv sind $J = +\frac{\pi}{2}$, folglich:

$$\int_0^p \frac{z^2 dz}{\sqrt{p^2 - z^2}} = -\int_0^p \sqrt{p^2 - z^2}\, dz + \frac{p^2\pi}{2}. \quad \text{Nun ist } \int_0^p \sqrt{p^2 - z^2}\, dz = \int_0^p \frac{z^2}{\sqrt{p^2 -}}$$

$$\text{folglich: } \int_0^p \sqrt{p^2 - z^2}\, dz = \int_0^p \frac{z^2 dz}{\sqrt{p^2 - z^2}} = \frac{p^2\pi}{4}.$$

Hierauf läßt sich unmittelbar $\int_0^p \frac{z^4}{\sqrt{p^2 - z^2}} dz$ zurückführen, denn es ist:

$$\frac{z^4}{\sqrt{p^2 - z^2}} = -(p^2 + z^2)\sqrt{p^2 - z^2} + \frac{p^4}{\sqrt{p^2 - z^2}}; \text{ ferner ist:}$$

$$\int z^2 \sqrt{p^2 - z^2} = \frac{z^3}{3}\sqrt{p^2 - z^2} + \frac{1}{3}\int \frac{z^4}{\sqrt{p^2 - z^2}}, \quad \int_0^p p^2 \sqrt{p^2 - z^2}\, dz = \frac{p^4 \pi}{4};$$

$$\int_0^p \frac{p^4\, dz}{\sqrt{p^2 - z^2}} = \frac{p^4 \pi}{2},$$

also $\int_0^p \frac{z^4\, dz}{\sqrt{p^2 - z^2}} = \frac{p^4 \pi}{2} - \frac{p^4 \pi}{4} - \frac{1}{3}\int_0^p \frac{z^4\, dz}{\sqrt{p^2 - z^2}}$ und $\int_0^p \frac{z^4}{\sqrt{p^2 - z^2}}\, dz = \frac{3\, p^4 \pi}{16}$.

Betrachten wir $f(z) = \frac{1}{(1+z)\sqrt{z}}$, so ist $z = 0$ ein Unstetigkeits- und Verzweigungspunkt. Da jedoch im Nenner nur die $^1/_2$te Potenz vorkommt, so giebt die Entwickelung kein Glied mit $\frac{1}{z}$, mithin ist das Integral in Bezug auf die Bahn um $z = 0$ selbst Null. Auch der Unendlichkeitspunkt ergiebt bei seiner Umkreisung Null, da $\lim_{z = \infty} \frac{z}{(1+z)\sqrt{z}} = 0$ ist.

Nehme ich also in Figur XI eine Linie, welche den Unendlichkeitspunkt und auch den Verzweigungspunkt umschließt, so ist das Integral hierüber Null. Lege ich den Verzweigungsschnitt von 0 bis ∞ und gehe von ∞ aus bis an die Curve, die den Nullpunkt umkreist, und kehre dann nach ∞ zurück, so erhalte ich

$$\int_\infty^0 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} + \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = 0.$$

Das Integral selbst löse ich auf folgende Weise: ich setze $\sqrt{x} = x_1$; $dx = 2 x_1\, dx_1$ so ist

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = 2\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

Wir wollen das Integral $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt[q]{x^2 - 1}}$ auswerten. $x = +1$ ist Verzweigungspunkt. Legen wir den Verzweigungsschnitt von 1 bis ∞, so erhalten wir

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt[q]{x^2 - 1}} + \int_\infty^1 \frac{dx}{x\sqrt[q]{x^2 - 1}} = 0,$$

da nach der Umkreisung von 1 das Integral wieder dieselben Werte annimmt. Den Wert des Integrals erhalten wir auf folgende Weise. Es ist

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt[q]{x^2 - 1}} = \int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt[q]{1 - x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - y^2} - \frac{2}{q} y^{\frac{1}{q}}},$$

wenn $y = 1 - x^2$ gesetzt wird

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dy}{(1-y)^{1-\frac{1}{q}}\, y^{\frac{1}{q}}} = \frac{1}{2}\int_0^1 y^{\left(1-\frac{1}{q}\right)-1} (1-y)^{\frac{1}{q}-1}\, dy = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{q}\right)\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{\sin}$$

Es sei $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x\sqrt[q]{x^2-1}}$ auszuwerten. Hierbei ist $x = 0$ ein Unstetigkeitspunkt; $x = \pm$

sind sowohl Unstetigkeits- als auch Verzweigungspunkte. Nehme ich das Integral $\int f(x)\,dx$ üb eine geschlossene Linie, die in Figur XII die Punkte $x = -1$, $x = 0$ und $x = +1$ umgie so ist dieses $\frac{2\pi i}{\sqrt[q]{-1}}$, denn die Integrale um die Verzweigungspunkte ergeben Null, da i Nenner nur die Potenzen $(x-1)^{\frac{1}{2}}$ und $(x+1)^{\frac{1}{2}}$ vorkommen. Ziehe ich von $x = 1$ no $x = -1$ einen Verzweigungsschnitt und verengere die geschlossene Linie bis an diesen Schnitt u den kleinen Kreis um $x = 0$, so habe auf der linken Seite die Wurzel das positive Zeichen; auf d rechten erhalte ich den Wert $\sqrt[q]{x^2-1}\left(\cos\frac{2\pi}{q} + i\sin\frac{2\pi}{q}\right)$, folglich

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x\sqrt[q]{x^2-1}} - \frac{\pi i}{\sqrt[q]{-1}} + \left[\int_{+1}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt[q]{(x^2-1)}} + \frac{\pi i}{\sqrt[q]{-1}}\right]\left[\cos\frac{2\pi}{q} - i\sin\frac{2\pi}{q}\right] = 0 \text{ od}$$

$$\left[\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x\sqrt[q]{x^2-1}} - \frac{\pi i}{\sqrt[q]{-1}}\right]\left[1 - \left(\cos\frac{2\pi}{q} - i\sin\frac{2\pi}{q}\right)\right] = 0;$$

da aber die zweite Klammer nicht Null sein kann, wenn q eine ganze Zahl und > 1 ist, so folgt:

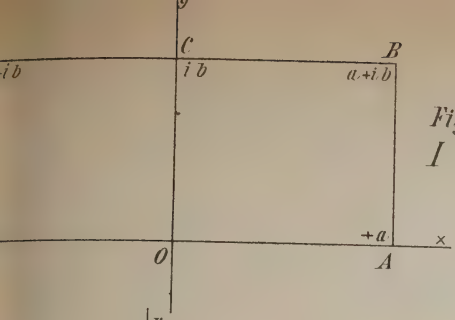
$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x\sqrt[q]{x^2-1}} = \frac{\pi i}{\sqrt[q]{-1}} \quad \text{oder} \quad \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x\sqrt[q]{1-x^2}} = \pi i$$

Ich habe nur solche Beispiele gewählt, in denen die Unstetigkeits- und Verzweigungspunkte au geschlossen sind. Es ist ersichtlich, wie einfach und streng die Resultate sich ergeben.

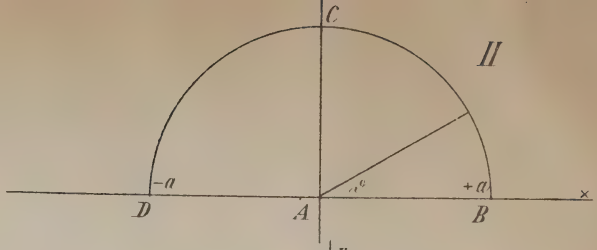
Frech.

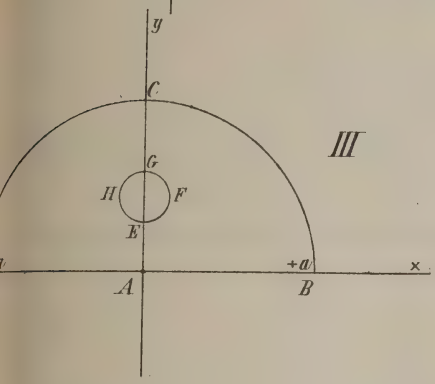
Hierzu eine Figurentafel.

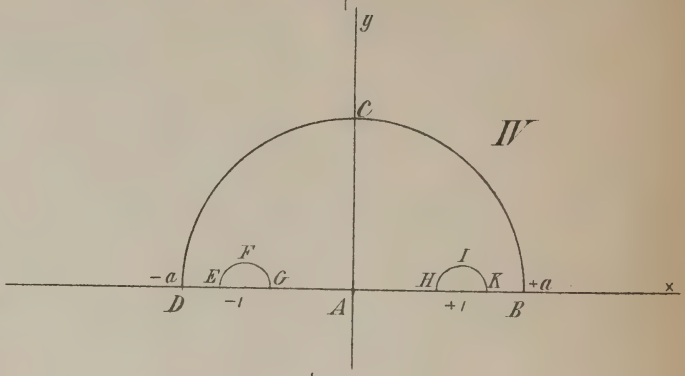
Anmerkung: In der Figur ist für $\vartheta : \delta$ zu setzen

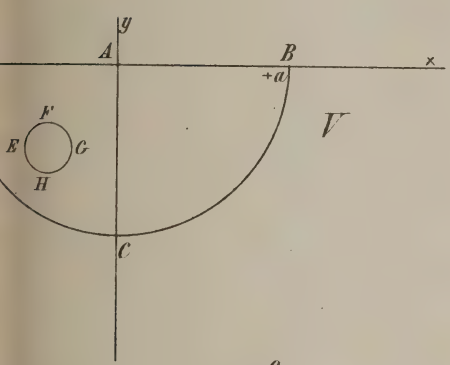

C
B
i b
i b
a+i b
+a
O
A
x

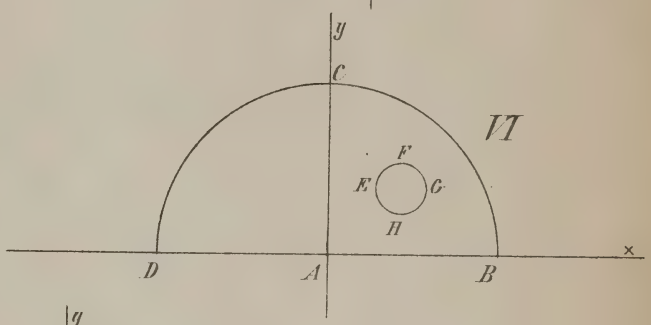
Figur I

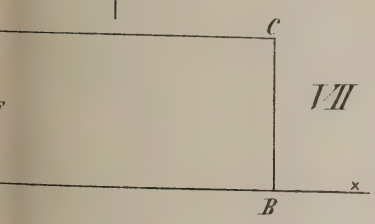

C
II
−a
+a
D
A
B
x

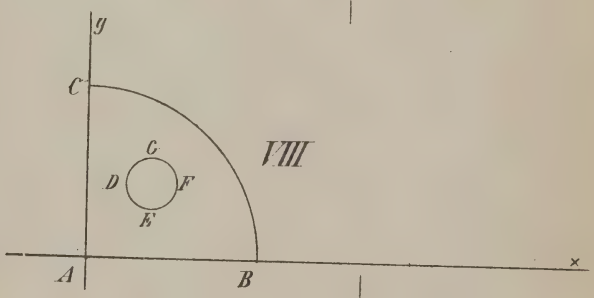

y
C
III
G
H
F
E
+a
A
B
x

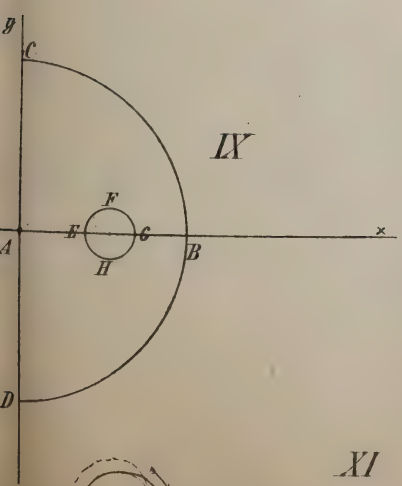

y
C
IV
F
−a
E
G
H
I
K
+a
D
−1
A
+1
B
x

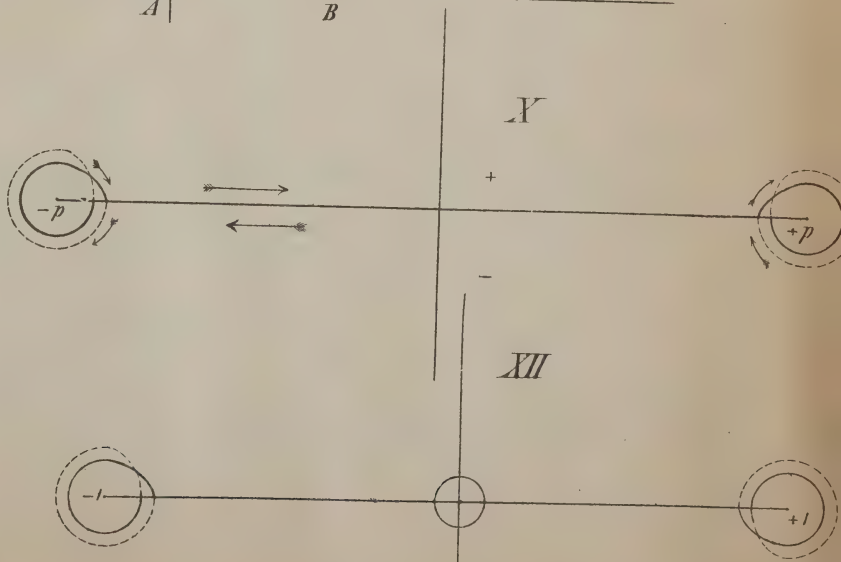

y
A
B
+a
V
F
E
G
H
C
x

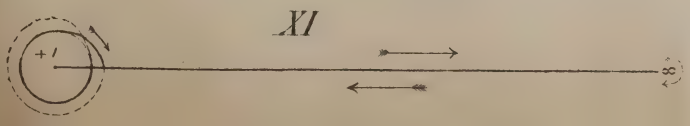

y
C
VI
F
E
G
H
D
A
B
x


C
VII
B
x


y
C
VIII
C
D
F
E
A
B
x


y
C
IX
F
E
G
H
A
B
D
x


X
+
−p
+p
−
XII
−1
+1


XI
+1
∞

Schulnachrichten.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Lehrverfassung.

Übersicht der in den einzelnen Klassen zu lehrenden Gegenstände und der auf sie wöchentlich zu verwendenden Stunden.

Fächer.	Klassen und wöchentliche Stunden.									Summa
	IA	IB	IIA	IIB	IIIA	IIIB	IV	V	VI	
iche Religionslehre . .	2		2		2		2	2	1	11
h	3	3	2	2	2	2	2	2	3	21
. . . . .	8	8	8	8	9	9	9	9	9	77
isch	6	6	7	7	7	7				40
sisch	2	2	2	2	2	2	5	4		21
hte und Geographie . .	3	3	3	3	3	3	4	3	3	28
matik und Rechnen . .	4	4	4	4	3	3	4	4	4	34
beschreibung					2	2	2	2	2	10
. . . . .	2	2	2	2						8
en							2	2	2	6
ben								2	2	4
. . . . .								2		2
Summa	30	30	30	30	30	30	30	32	30	262
	2 comb.		2 comb.		2 comb.			4 comb.		
Außerordentliche Stunden	a) für den Gesang									3
	b) für das Hebräische									4
	c) für das Polnische									4
	d) für das Turnen									10
	Summa der wöchentlichen Unterrichtsstunden									283

Uebersicht

der Verteilung der Ordinariate und Unterrichtsgegenstände an die einzelnen Lehrer für das Sommer-Semester 1890.

Lehrer.	Ordinariat.	IA	IB	IIA	IIB	IIIA	IIIB	IV	V	VI
1. Prof. Lowinski, Direktor.		2 Horaz 4 Griech.	2 Horaz 2 Homer							
2. Prof. Weierstraß, Oberlehrer.	IA	6 Latein 2 Homer	4 Griech.	5 Griech.						
3. Dr. Bludau, Oberlehrer.	IB	2 Franz.	6 Latein 2 Franz.					5 Franz.		3 Gesch. und Geogr.
4. Zielinski, Oberlehrer.		4 Math. 2 Physik	4 Math.		4 Math.	Polnisch in 2 außerord. Std. II. Abt.				
		Polnisch in 2 außerord. Std. I. Abt.								
5. Bordihn, Oberlehrer.	IIA	3 Deutsch		6 Latein		2 Ovid 7 Griech.				
6. Dr. Ehling, Gymnasiallehrer.	IIB			2 Vergil 2 Homer 2 Franz.	2 Deutsch 6 Latein 2 Franz. 3 Gesch. u. Geogr.					
7. Wallat, Gymnasiallehrer.	IIIB	2 Religion 2 Hebräisch		2 Deutsch 2 Religion 2 Hebräisch		2 Religion	2 Deutsch 3 Gesch. u. Geogr.	2 Relig.	2 Religion	1 Relig.
8. Dr. Barwinski, Gymnasiallehrer.	IIIA		3 Deutsch		2 Vergil 2 Homer 5 Griech.	7 Latein	2 Ovid			
9. Rieve, Gymnasiallehrer.	IV	3 Gesch. u. Geogr.	3 Gesch. u. Geogr.	3 Gesch. u. Geogr.		3 Gesch. u. Geogr.		2 Deutsch 7 Latein		
10. Frech, Gymnasiallehrer.			2 Physik	4 Math.		3 Math. 2 Naturk.	3 Math. 2 Naturk.	4 Math.		
11. Vacat.										
12. Schapler, Kommissar. Gym.-Lehrer.	V					2 Deutsch 2 Franz.	7 Latein		2 Deutsch 9 Latein	
13. Henke, Kommissar. Relig.-Lehrer.	VI	2 Religion		2 Religion		2 Religion		2 Relig.	2 Religion	3 Deutsch 9 Latein
14. Himmel, Kommissar. Gym.-Lehrer.				2 Physik	2 Physik		2 Franz.	2 Geogr. 2 Naturk.	4 Franz. 4 Rechn.	
15. Kluck, Kommissar. Gym.-Lehrer.							7 Griech.	2 Phädr. 2 Gesch.	3 Gesch. u. Geogr.	
16. Groß, Techn. Gymn.-Lehrer.		Gesang in 3 außerord. Std.						2 Zeichn.	2 Naturk. 2 Zeichn. 2 Schreib.	4 Rechn. 2 Naturk. 2 Zeichn. 2 Schreib.
									2 Gesang	

Uebersicht

der Verteilung der Ordinariate und Unterrichtsgegenstände der einzelnen Lehrer für das Winter-Semester 1890/91.

Lehrer.	Ordinariat.	IA	IB	IIA	IIB	IIIA	IIIB	IV	V	VI	Sa.
r. Stuhrmann, Direktor.		6 Griech.		2 Deutsch				4 Gesch. u. Geogr.			12
rof. Weierstraß, Oberlehrer.	IA	8 Latein	6 Griech.	5 Griech.							19
Dr. Bludau, Oberlehrer.	IB	2 Franz.	8 Latein 2 Franz.					5 Franz.		3 Gesch. u. Geogr.	20
Zielinski, Oberlehrer.		4 Math. 2 Physik	4 Math.		4 Math. 2 Physik	Polnisch in 2 außerord. Std. II. Abt.					20
		Polnisch in 2 außerord. Std. I. Abt.									
Bordihn, Oberlehrer.	IIA	3 Deutsch		6 Latein		7 Griech.			4 Franz.		20
Dr. Ehling, mnasiallehrer.	IIB			2 Franz. 2 Vergil 2 Homer	6 Latein 2 Deutsch 3 Gesch. u. Geogr. 2 Franz.		2 Franz.				21
Wallat, mnasiallehrer.	IIIB	2 Religion 2 Hebräisch		2 Religion 2 Hebräisch		2 Religion	2 Ovid 3 Gesch. 2 Deutsch	2 Relig.	2 Religion	1 Relig.	22 u. 5 St. Turn.
. Barwinski, mnasiallehrer.	IIIA		3 Deutsch		2 Vergil 7 Griech.	9 Latein					21
Rieve, mnasiallehrer.	IV	3 Gesch. u. Geogr.	3 Gesch. u. Geogr.	3 Gesch. u. Geogr.		3 Gesch. u. Geogr.		9 Latein 2 Deutsch			23
Frech, mnasiallehrer.			2 Physik	4 Math. 2 Physik		3 Math. 2 Naturk.	3 Math. 2 Naturk.	4 Math.			22
Vacat.											
Schapler, ſar. Gym.-Lehrer.	V					2 Deutsch 2 Franz.	7 Latein		9 Latein 2 Deutsch		22
Henke, ſar. Relig.-Lehrer.	VI	2 Religion		2 Religion		2 Religion		2 Relig.	2 Religion	1 Relig. 9 Latein 3 Deutsch	23
Kluck, ſar. Gym.-Lehrer.							7 Griech.		4 Rechn. 3 Gesch. u. Geogr.		14
Groß, Gymn.-Lehrer.		Gesang in 3 außerord. Std.						2 Naturk. 2 Zeichn.	2 Naturk. 2 Zeichn 2 Schreib.	4 Rechn. 2 Naturk. 2 Zeichn. 2 Schreib.	25 u. 5 St. Turn.
									2 Gesang		

Ober-Prima.

Ordinarius: Professor Weierstraß.

Religionslehre. a) Für die katholischen Schüler. Nach Dubelmann, Leitfaden ꝛc. Sittenlehre. Wiederholungen aus der Offenbarungs- und Glaubenslehre. Aus der Kirchengeschichte 3. Zeitalter nebst Wiederholung des 1. und 2. Zeitalters. Uebersetzt aus dem Urtexte und er wurde die Apostelgeschichte des hl. Lukas. 2 St. Henke. b) Für die evangelischen Schüler. Le des Römerbriefes, teilweise im griech. Text. Kirchengeschichte bis auf Bonifatius. Wiederholung Reformationsgeschichte und der Bibelkunde des N. T. Kirchenlieder und Psalmen. 2 St. Wal

Deutsch. Uebersicht der älteren Literaturgeschichte mit Proben aus Deycks. Grundlehren Logik, im Anschlusse daran Dispositionslehre und Dispositionsübungen. Monatliche Aufsätze. Kl arbeiten. Lektüre: Goethes Iphigenie, Schillers Gedichte „Das Ideal und das Leben" und Künstler" und im Anschlusse an die Erklärung angemessene Stellen aus den kleinen ästheti Schriften. Leitung der Privatlektüre (Shakespeares Julius Cäsar, H. von Kleists Prinz Homburg und Hermannsschlacht und Goethes Wahrheit und Dichtung.). 3 St. Bordihn.

Themata für die deutschen Aufsätze: 1. Die Person des Shakespeare'schen „Coriolan". 2. Athen, Jerusalem: Die Herde unserer Bildung. 3. Inhalt und Gedankengang des Goethe'schen Gedichtes „Das Gött 4. Welche Bande verknüpfen die deutschen Stämme zu einem Volke? (Klassenaufsatz). 5. Bedeutung des vierten trittes im ersten Aufzuge von Goethes „Iphigenie". 6. a) Nur allein der Mensch kann dem Augenblick Daue leihen. b) Die gute Sache stärkt den schwachen Arm. 7. Nur des Meißels schwerem Schlag erweichet sich des Mar sprödes Korn. (Klassenaufsatz). 8. Wie bewährt sich der Ausspruch „Not entwickelt Kraft" in der vaterländische schichte? 9. Abituriententhema: a) Für den Herbsttermin 1890: Wie bewährt sich der Ausspruch „Not ent Kraft" in der vaterländischen Geschichte? b) Für den Ostertermin 1891: „Was bewundern wir an den Römern

Latein. Cic. pro Murena. — Cic. de natura deorum I. Tacitus Historiae I. — petitionen aus der Grammatik, Syntaxis ornata und Stillehre. 14-tägige Exercitien (z. T. Köpke), häufige Extemporalien; monatliche Aufsätze; Uebungen im Lateinsprechen. Extempo Lectüre. 6 St. Weierstraß. Horaz l. III, IV (z. T.); Epoden mit Auswahl; Satiren 1 u. 9; Episteln l. I, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 20. Wiederholungen aus l. I u. II. Memorieren. Im Sommer Dir. Lowinski, im Winter Weierstraß.

Lateinische Aufsätze: 1 u. 2. Unitas Iliadis ipso primo carminis versu atque primi libri argu contineatur. 3, 4. Quamquam in Iliade Achilles manifesto primas partes tenet atque ad eum et singulae et universitas carminis ex consilio poetae pertinent, tamen Hectoris praeclara imago animos legentium a tiumve magis tenet atque commovet. Pars prior: num credi possit, Troianum fuisse Homerum? pars alte persona Hectoris. 5. De Ajacis cum Hectore pugna singulari. 6. Dialogus senis sapientis cum juve 7. Frederici II, regis Borussorum, primordia. 8. Illud Senecae: „potest ex casa magnus vir exire; virtus loco nascitur" cum aliis exemplis tum Socratis exemplo probetur. 9. (Michaelis — Abit.-Aufsatz.). Primae Iliadis ratio atque narratio.

Griechisch. Plato, Crito und Symposion (teilweise); Thucydides B. VI (ausschließli Reden), alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit. 4 St. Im Sommer Direktor Lowinski, im W Direktor Dr. Stuhrmann. — Homer Il. B. 6, 11, 12, 16 (mit Auswahl); 19—24. Soph König Ödipus. 2 St. Im Sommer der Ordinarius, im Winter Direktor Dr. Stuhrma

Französisch. Racine, Phèdre, Villemain: histoire de Cromwell; 14-tägige Exercitie Extemporalien, monatliche Klassenarbeiten. Wiederholung der Grammatik. Sprechübungen im An an die Lektüre. 2 St. Dr. Bludau.

Polnisch. (Fakultativ). Lektüre nach dem Lesebuch von Kampmann und Grammatik nach elben. Deklamieren auswendig gelernter Gedichte. Einiges aus der Literaturgeschichte nach ring. 2 St. Zielinski.

Hebräisch. (Fakultativ.) Wiederholung der Formenlehre, die unregelmäßigen Verba und das tigste aus der Satzlehre. Lektüre und Erklärung ausgewählter Kapitel aus Mos. I u. II, Sam. II und einigen Psalmen. 2 St. Wallat.

Geschichte und Geographie. Geschichte der neueren und neuesten Zeit mit besonderer Berücksigung der Kulturgeschichte. Wiederholungen aus dem ganzen Gebiete der Geschichte u. Geographie. t. Rieve.

Mathematik. Wiederholung und Erweiterung der Planimetrie, Trigonometrie und Stereometrie. ietrische Analysis. Permutationen, Kombinationen, Variationen und binomischer Lehrsatz. Alle ochen eine schriftliche Arbeit. 4 St. Zielinski.

Abiturientenaufgaben: Michaelistermin 1890. 1. Ein Dreieck zu zeichnen, wovon gegeben sind der s des Inkreises $= \varrho$, die Differenz der Scheitelseiten $= d$ und ein Winkel an der Grundlinie $= \beta$.

2. Ein Dreieck trigonometrisch zu berechnen, wenn davon gegeben sind:
die Grundlinie $a = 6954{,}2$ m,
der ihr anliegende Winkel $\beta = 56^0\ 48'\ 17''$
und die Summe der beiden andern Seiten $b + c = s = 9468{,}4$ m.

3. Folgende Gleichungen aufzulösen:
$$x^2 - xy + y^2 = 61$$
$$3x + 4y = 47.$$

4. Bei einer quadratischen abgestumpften Pyramide beträgt die untere Kante $a = 20$ m, die obere $b = 14$ m de Seitenkante $c = 16$ m; wie groß ist das Volumen derselben?

Ostertermin 1891.

1. Zur Konstruktion eines Dreiecks sind gegeben:
die Summe der Quadrate der beiden Scheitelseiten $b^2 + c^2 = s^2$,
der Unterschied ihrer Projektionen auf die Grundlinie $p - q = d$
und der Unterschied der Winkel an der Grundlinie $\beta - \gamma = d$.

2. Folgende Gleichungen aufzulösen:
$$5x^2 - 12x = 3xy + 20$$
$$3\sqrt{xy} = xy - 18.$$

3. Ein Dreieck zu berechnen aus der Grundlinie $a = 65$, dem ihr gegenüber liegenden Winkel $\alpha = 31^0 53' 27''$, r Summe der zu den beiden Scheitelseiten zugehörigen Höhen $s = 120{,}981$.

4. Wie viel beträgt das absolute Gewicht eines Würfels aus Marmor, dessen specifisches Gewicht $s = 2{,}7$ ist, eine gerade Pyramide mit quadratischer Basis so aufgestellt ist, daß vier Eckpunkte desselben in der Grundfläche e übrigen vier in den Seitenkanten der Pyramide liegen, wenn die Grundpunkte derselben $a = 4{,}2$ dcm und he $h = 5{,}6$ dcm sind.

Physik. Mathematische Geographie. Optik. 2 St. Derselbe.

Unter-Prima.

Ordinarius: Oberlehrer Dr. Bludau.

Religionslehre. Comb. mit Ober-Prima.

Deutsch. Uebersicht der neueren Literatur mit Proben aus Deycks. Lektüre: Ausgewählte von Klopstock, Goethe's Torquato Tasso, Schillers Braut von Messina und Shakespeares an. Leitung der Privatlektüre. Grundlehren der empirischen Psychologie. Dispositions-Uebungen. tliche Aufsätze. Klassenarbeiten. 3 St. Dr. Barwinski.

Themata für die deutschen Aufsätze: 1. „Ein Jahrmarkt ist das Leben, Gewühl und bunter Sc Verschleud're nicht das Geld und kauf' was Rechtes ein." 2. a) Ist auch Schillers Braut von Messina ebenso Sophokles' Oedipus Tyrannos „gleichsam nur eine tragische Analysis?" b) Isabellas Schuld und Strafe in Sch Braut von Messina. 3. Der Prophet gilt in seiner Heimat am wenigsten. 4. Wie hat sich Körners Ausspruch: „ Vaterland darf alles von uns fordern" in den Freiheitskriegen bewahrheitet? (Klassenaufsatz). 5. Ist der Goeth Tasso an seinem Unglück nicht selbst schuld? 6. „Freiheit ist die große Losung, deren Klang durchjauchzt die W (Anast. Grün). 7. Geld ist ein guter Diener, aber ein böser Herr. (Klassenaufsatz). 8. „Wer der Dichtkunst St nicht vernimmt, Ist ein Barbar, er sei auch, wer er sei." 9. Klassenaufsatz.

Latein. Cicero pro Milone, de officiis lib. II; de oratore lib. II. Privatlektüre: S bellum Jugurt. Wiederholung der Grammatik. Uebungsstücke aus Süpfle. 14-tägige Exerci monatliche Klassenarbeiten; monatliche Aufsätze. 6 St. Der Ordinarius. Horat. carm. li u. II und satir. lib. I. 2 St. Im Sommer Direktor Prof. Lowinski, im Winter der Ordinar

Lateinische Aufsätze. 1. De pugna Cannensi. 2. De morte Socratis et Senecae. 3. De Polycrate S 4. Leonidae in Thermopylis mors gloriosa. 5. De Cyro maiore, qualis descriptus est a Xenophonte. 6. De a Pyrrho contra Romanos gesto. 7. De pugna in silva Teutoburgensi commissa. 8. Argumentum tertii Iliadis breviter narretur. 9. Quae fuerint causae et exitus belli Jugurthini.

Griechisch: Plato Eutyphron; Phaedon (vorzüglich die historischen Partien); Demosth Olynth. or. I und II. — Extemporieren aus Xenophon Hell. und Thucydides. — Gramma Repetitionen. — 14-tägige Exercitien, häufige Extemporalien, teils deutsch-griechisch, teils und z ausschließlich griechisch-deutsch. 4 St. Weierstraß. Homer, Ilias I—IX. Memorieren und temporieren. 2 St. Im Sommer Direktor Lowinski, im Winter Weierstraß.

Französisch. Molière, les femmes savantes, Duruy; histoire de France. 14-t Exercitien und Extemporalien; monatliche Klassenarbeiten. Wiederholung der Grammatik. Sp übungen im Anschluß an die Lektüre. 2 St. Der Ordinarius.

Polnisch
Hebräisch } comb. mit Ober-Prima.

Geschichte und Geographie. Geschichte des Mittelalters mit besonderer Berücksichti der Kulturgeschichte. Wiederholungen aus der alten und der vaterländischen Geschichte. Wiederholu aus dem ganzen Gebiete der Geographie, besonders Deutschlands und der Nachbarländer. 3 St. R

Mathematik. Wiederholung und Erweiterung der Planimetrie. Trigonometrie. Reihen Alle 4 Wochen eine häusliche schriftliche Arbeit. 4 St. Zielinski.

Physik. Mechanik und Akustik. 2 St. Frech.

Ober-Secunda.

Ordinarius: Oberlehrer Bordihn.

Religionslehre. a) Für die katholischen Schüler. Nach Dubelmann, Leitfaden ꝛc. der Glaubenslehre: Die Lehre von Gottes Dasein und Wesenheit, von Gottes Einheit und Persönlichkeit, von der Schöpfung, von der Erbsünde, von der Person, dem Leben und den 3 Ae des Erlösers. Aus der Kirchengeschichte das 2. Zeitalter nebst kurzem Rückblick auf das 1. Zeit 2 St. Henke. b) Für die evangelischen Schüler: Bibelkunde des N. T. Lektüre des Ev. St. L teilweise im griech. Text. Wiederholung der Apostelgeschichte. Reformationsgeschichte. Kirchen und Psalmen. 2 St. Wallat.

Deutsch. Lektüre: Herder, Cid. Goethe, Götz von Berlichingen. Schiller, Wallenstein, ungfrau von Orleans. Ausgewählte Gedichte von Schiller. 2 St. Im Sommer Wallat, im Winter der Direktor.

Themata der deutschen Aufsätze: 1. Die Seefahrt, ein Bild des menschlichen Lebens. 2. a) Inhalt und dankengang des Prologs aus Schillers „Wallensteins Lager", b) Bedeutung der Hauptfiguren in Wallensteins Lager. a) Der Anblick der Natur, eine Erhebung und Demütigung für den Menschen, b) Die Geschichte eines Thalers (ein erfundenes Märchen). 4. Klassenaufsatz: Elisabeth, das Muster einer deutschen Hausfrau im Gegensatz zu Adelheid Walldorf (Götz von Berlichingen). 5. Was treibt den Menschen in die Ferne? 6. Die beiden Piccolomini. Klassenaufsatz: Was macht Wallenstein zum Verräter. 8. Das Wasser im Haushalte der Natur. 9. Klassenaufsatz.

Latein. Livius lib. XXIII. Sallust. de bello Jugurth. Cicero pro rege Deiotaro, mnium Scipionis und Laelius. Häufiges Extemporieren bezw. kursorische Lektüre aus Livius und llust. Grammatik. Repetitionen. Syntaxis verbi. Mündliches Uebersetzen nach Süpfle. Im Anschlusse die Grammatik und die Lektüre häufige schriftliche Extemporalien. 14tägige häusliche Exercitien abwechselnd Klassenarbeiten. Einige kleinere lateinische Aufsätze. 6 St. Der Ordinarius. Vergil Aen. IV; , 1—524; extemporiert Stellen aus X und XII. Eclog. I, V, VI, IX, X. 2 St. Dr. Ehling.

Themata für die lateinischen Aufsätze. I. Campanorum clades ad Hamas a Cumanis dolo captorum e Livio enarretur. 2. Samnites per legatos apud Hannibalem conqueruntur, quod ille sibi in summa rerum eritate defuerit. 3. Hanno Nolanos benignis verbis ad voluntariam deditionem perlicere frustra conatur. Klassenaufsatz.

Griechisch. Xenophon Hellenica, V, VI (Anfang). Herodot I. Grammatik: Das Wichtigste den griechischen Satzformen. 14-tägige Exercitien, wöchentliche Extemporalien. 5 St. Weierstraß. mer Odyssee XIII—XX, 298. 2 St. Dr. Ehling.

Französisch. Lektüre: Thiers, Napoléon à St. Hélène; Michelet, Précis de l'histoire derne p. 74—104. Grammatik: Syntax des Verbums, Hauptregeln aus Knebel § 94—116, öt an 14-tägigen Exercitien und Extemporalien. 2 St. Dr. Ehling.

Polnisch. Comb. mit Prima.

Hebräisch. Die Elementar- und Formenlehre. Schriftliche Uebungen. Lektüre und Erklärung ger Kapitel aus der Genesis. 2 St. Wallat.

Geschichte. Römische Geschichte bis 476 n. Chr. Wiederholungen aus der orientalischen und chischen Geschichte. 2 St. Rieve.

Geographie. Geographie von Amerika und Afrika mit besonderer Hervorhebung der deutschen omien. Uebungen im Kartenzeichnen und Entwerfen von Skizzen. 1 St. Derselbe.

Mathematik. Beendigung der Planimetrie. Trigonometrie. Gleichungen des zweiten Grades mehreren Unbekannten. Reducierbare und reciproke Gleichungen. Progressionen, Zinseszins- und tenrechnung. Alle 4 Wochen eine schriftliche Arbeit. 4 St. Frech.

Physik. Wiederholung der Lehre vom Magnetismus und der Electricität, hierauf Galvanismus Wärmelehre. Im Sommer Himmel, im Winter Frech.

Unter-Secunda.

Ordinarius: Gymnasiallehrer Dr. Ehling.

Religionslehre. Comb. mit Ober-Secunda.

Deutsch. Das Hauptsächlichste aus der Poetik. Erklärung einiger Balladen und Romanzen Schiller, Goethe, Uhland, Schiller's Glocke; Goethe's Hermann und Dorothea, Schillers Wilhelm und Lessings Minna von Barnhelm. Aufsatzlehre. 2 St. Der Ordinarius.

Themata der deutschen Aufsätze. 1. a) Inwiefern zeugt Klearchs Verhalten seinen meuterischen Sold gegenüber von großer Klugheit? (Xenoph. An. I, 3.) b) Weshalb erscheint Amasis in Schiller's „Ring des P krates" nach antiker Auffassung als fromm? c) Vergleich zwischen Schillers „Kranichen des Ibykus" und „G nach dem Eisenhammer". 2. Triumph der Freundschaft (ein Gemälde). 3. Wie wurde am Muthul von den römis Truppen trotz des strategischen Fehlers des Metellus die Schlacht gewonnen? (Nach Sallust. Jug. 47—54.) 4. (Kla arbeit). Der Glockenguß nach den zehn Meistersprüchen in Schiller's „Glocke". 5. Welche Gründe sprachen dage welche dafür, den Oberbefehl im dritten Mithridatischen Kriege gerade dem Pompejus zu übertragen? (Im Ansc an die Lektüre von Ciceros Pompejana.) 6. Wie reist man heutzutage, und welchen Nutzen bringt das Reisen? (Kla arbeit.) 7. a) Welchen Einfluß hat der Pfarrer auf den Gang der Handlung in Goethes „Hermann und Dorothe b) Mit welchem Rechte nennt der Dichter den Pfarrer „die Zierde der Stadt"? 8. Was erfahren wir aus der Exposi von Lessings „Minna von Barnhelm" über die Verhältnisse der beiden Hauptpersonen? 9. Klassenaufsatz.

Latein. Lektüre: Cicero de imp. Cn. Pompeji. Sallust de coni. Catil. Livius XXI cap. 40; privatim Sallust. Jug. cap. 40—76. Grammatik: Das Hauptsächlichste aus der Syn des Verbums. Mündliches Uebersetzen aus Süpfle II. Alle 14 Tage ein Exercit. oder Extempo im Anschluß an Gelesenes. 6 St. Der Ordinarius. Vergil Aen. lib I. II. und V (mit A wahl). Memorier- und metrische Uebungen. 2 St. Dr. Barwinski.

Griechisch. Hom. Odyss. I. II. VI. und VII; Xenoph. Anab. lib. V. und Hell. lib und II. Grammatik: Die Lehre von den Casus und das Wichtigste über die Modi. Repetitio aus der Formenlehre. 14-tägige häusliche und monatliche Klassenarbeiten. 7 St. Dr. Barwin

Französisch. Lektüre: Voltaire Charles XII 1, 2 (zur Hälfte). Grammatik: das Hauptsä lichste aus der Syntax der Nomen. Repetition früherer Pensa. Alle 14 Tage ein Exercitium ein Extemporale. 2 St. Der Ordinarius.

Polnisch. Comb. mit Prima.

Hebräisch. Comb. mit Ober-Secunda.

Geschichte und Geographie. Uebersicht über die Geschichte der orientalischen Völker. schichte der Griechen. 2 St. Der Ordinarius. Das Hauptsächlichste aus der phys.-mat Geographie Asien und Afrika, Australien, Deutsche Kolonien. 1 St. Derselbe.

Mathematik. Wiederholung und Erweiterung der Kreislehre. Gleichheit und Aehnlichkeit Figuren, Verwandlung und Teilung der Figuren. Quadratische Gleichungen mit einer und mehr Unbekannten. Logarithmen und deren Anwendung. Alle 4 Wochen eine schriftliche Arbeit. 4 Zielinski.

Physik. Allgemeine Eigenschaften der Körper. Ausgewählte Kapitel aus der Mechanik. wichtigsten Lehren der Chemie, hierauf Magnetismus und Electricität. 2 St. Im Sommer Him im Winter Zielinski.

Ober - Tertia.

Ordinarius: Gymnasiallehrer Dr. Barwinski.

Religionslehre. a) Für die katholischen Schüler: Nach dem größeren Diöcesan-Katechis die Lehre von der Gnade, den h. Sakramenten, den Sakramentalien und dem Gebete. — Die von den Ceremonien der Kirche. 2 St. Henke. b) Für die evangelischen Schüler: Ausfüh Erklärung des 3., 4., 5. Hauptstückes. Lektüre der Apostelgeschichte und des Evangeliums St. M Geographie von Palästina. Kirchenlieder, Psalmen und die Bergpredigt. 2 St. Wallat.

Deutsch. Lektüre aus Linnig II. Teil, verbunden mit Belehrungen über Periodenbau, S und das Versmaß der gelesenen Gedichte. — Nibelungenlied in neuhochdeutscher Uebersetzung.

ren von Gedichten und Wiedergabe erklärter Prosastücke ihrem Hauptinhalte nach. 3-wöchentliche sätze. 2 St. Schapler.

Latein. Caes. bell. gall. lib. IV—VI (incl.) und Cicero epist. sel. Extemporieren nicht ener Stellen. Ovid. Metam. ausgewählte Stücke. Grammatik: Syntax des Nomens und des bums. Mündliches Uebersetzen aus Meiring II. Theil. 14-tägige häusliche Arbeiten. Außerdem e Klassenarbeiten. 9 St. Der Ordinarius. (Ovid im Sommer Bordihn.)

Griechisch. Wiederholung und Erweiterung des Pensums der Unter-Tertia. Die Verba auf nd die unregelmäßigen Verba. Die Hauptmomente der Wortbildung. Syntaktisches im Anschluß die Lektüre. Gelesen wurde aus Jacobs I. Cursus und Xenophon Anab. lib. I. und II. Ein- ung in die Lektüre der Odyssee (α 1—200). Wöchentliche häusliche Exercitien abwechselnd mit senarbeiten. 7 St. Bordihn.

Französisch. Die gesamte Formenlehre und einiges aus der Syntax. — Mündliches und tliches Uebersetzen der entsprechenden Uebungsstücke aus Ploetz, methodisches Lese- und Uebungs- — Rollin: l'histoire d'Alexandre le Grand. 14-tägige schriftliche Arbeiten. 2 St. Schapler.

Polnisch. Nach Wolinski's Lesebuch Formenlehre und Uebersetzen der bezüglichen Stücke. amieren auswendig gelernter Gedichte. Vokabellernen und schriftliche Uebungen in der Klasse und hause. 2 St. Zielinski.

Geschichte. Deutsche Geschichte seit 1273 und brandenburgisch-preußische Geschichte. Kurze erholung der alten Geschichte und der deutschen bis 1273. 2 St. Rieve.

Geographie. Deutschland mit besonderer Berücksichtigung der natürlichen Verhältnisse nebst erholung der übrigen Länder Europa's. Uebungen im Kartenzeichnen und im Skizzieren. 1 St. selbe.

Mathematik. Wiederholung des Pensums der Unter-Tertia. Potenz und Wurzellehre. dratwurzel aus ganzen und gebrochenen Zahlen. Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten. endungen der Gleichungen. Lehre vom Kreise und von der Gleichheit der Figuren. Konstruktions- aben. Alle 3 Wochen eine schriftliche Arbeit. 3 St. Frech.

Naturbeschreibung. Mineralogie und Anthropologie. 2 St. Derselbe.

Unter-Tertia.

Ordinarius: Gymnasiallehrer Wallat.

Religionslehre. Comb. mit Ober-Tertia.

Deutsch. Lektüre aus Linnig, Teil II. Satzlehre, starke und schwache Deklination und Kon- ion. Deklamationen, im Anschluß daran Belehrungen über den Versbau. 3-wöchentliche Aufsätze. Der Ordinarius.

Latein. Caes. bell. gall. lib. I (ausgew. Kapitel), lib. II und III. Einiges wurde memoriert. matik: die Lehre von den Casus und einiges aus der Syntax des Verbums. Mündliches und liches Uebersetzen aus Meiring, Uebungsbuch im Anschluß an die Grammatik. Wöchentliche schrift- Arbeiten. 7 St. Schapler. Ovid. Metam. ausgewählte Stücke. Einzelnes wurde memoriert. Wallat.

Griechisch. Die regelmäßige Formenlehre bis zu den verbis liquidis ausschließlich. Ver- ung der wöchentlichen Arbeiten (in der Regel Klassenarbeiten). Uebersetzt wurde aus Jacobs I. s, 1—10. 7 St. Kluck.

Französisch. Die unregelmäßigen Verba. Repetition früherer Pensa. Alle 14 Tage Exercitium oder ein Extemporale. Lektüre Rollin, Hommes illustres: Socrate. 2 St. Sommer Himmel, im Winter Dr. Ehling.

Polnisch. Comb. mit Ober-Tertia.

Geschichte. Deutsche Geschichte bis 1273. 2 St. Der Ordinarius.

Geographie. Geographie von Europa mit Ausschluß von Deutschland. Uebungen im Ka zeichnen. 1 Std. Derselbe.

Mathematik. Wiederholung des Pensums der Quarta. Die Buchstaben-Rechnung Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten. Planimetrie bis zur Kreislehre. Uebunge Auflösen arithmetischer und geometrischer Aufgaben. Alle 3 Wochen eine schriftliche Arbeit. 3 Frech.

Naturbeschreibung. Im Sommer Botanik mit Zugrundelegung des natürlichen Syst Im Winter Zoologie. 2 St. Derselbe.

Quarta.

Ordinarius: Gymnasiallehrer Rieve.

Religionslehre. a) Für die katholischen Schüler: Nach dem größeren Diöcesan-Katechis die Lehre von Gottes Wesen und Eigenschaften, der Schöpfung, dem Sündenfalle, der Erlösung Kirche und den letzten Dingen des Menschen. Uebersetzt, erklärt und memoriert wurden die wicht lat. kirchlichen Hymnen. Biblische Geschichten des A. u. N. T. 2 St. Henke. b) Für die gelischen Schüler: Fortsetzung der bibl. Geschichte des A. T. Ausführliche Erklärung des 1. H stückes. Das Kirchenjahr und die evangel. Gottesdienstordnung. Kirchenlieder und Psalmen. Wallat.

Deutsch. Lektüre aus Linnig I. Teil mit besonderer Berücksichtigung der Lehre vom Sa und der Interpunktion. Vortrag auswendig gelernter Gedichte und der erklärten Prosastücke dem H inhalte nach. 14-tägige schriftliche Arbeiten. 2 St. Der Ordinarius.

Latein. Corn. Nep. XIII, III, VI, VIII, XI. Einiges aus der Biographie des Ep nondas wurde memoriert. Extemporieren ungelesener Stellen. Nach Ellendt-Seyffert Wiederh der Formenlehre; aus der Syntax die Lehre von der Uebereinstimmung der Satztheile, vom Gel der Casus, das Notwendigste über den Acc. c. inf., Abl. abs., Conjunctiv nach ut, ne Mündliches Uebersetzen aus Meiring im Anschluß an die Grammatik. Wöchentliche Klassenar bisweilen häusliche Arbeiten. 7 St. Der Ordinarius. Ausgewählte Fabeln aus Phaedrus denen mehrere memoriert wurden. Das Notwendigste aus der Prosodie und über den jamb Senar. 2 St. Im Sommer Kluck, im Winter der Ordinarius.

Französisch. Wiederholung des Pensums von Quinta; Fortsetzung der grammatischen L und Uebungsstücke bis zum Ende. 5 St. Dr. Bludau.

Polnisch. Comb. mit Tertia.

Geschichte. Geschichte der Griechen und Römer mit besonderer Hervorhebung der alten G geschichte. 2 St. Im Sommer Kluck, im Winter der Direktor.

Geographie. Geographie der außereuropäischen Erdteile. Uebungen im Kartenze 2 St. Im Sommer Himmel, im Winter der Direktor.

Mathematik und Rechnen. Wiederholung des Pensums der Quinta. Einfache und zu-mengesetzte Regeldetri. Wiederholung der Dezimalbrüche. Anfangsgründe der Planimetrie bis zu Congruenzsätzen. Alle 2 Wochen eine schriftliche Arbeit. 4 St. Frech.

Naturbeschreibung. Im Sommer Botanik, im Winter Zoologie. 2 St. Im Sommer nmel, im Winter Groß.

Quinta.

Ordinarius: Kommissar. Gymnasiallehrer Schapler.

Religionslehre. a) Für die katholischen Schüler: Nach dem kleineren Diöcesan-Katechismus 5 Gebote der Kirche, die Lehre von der Sünde, der Tugend, den h. Sakramenten und dem Gebete. biblische Geschichte des N. T. 2 St. Henke. b) Für die evangelischen Schüler: Biblische Ge-hte des A. T. Wiederholungen aus der bibl. Geschichte des N. T. Das 1. und 2. Hauptstück. henlieder. Gebete. 2 St. Wallat.

Deutsch. Lektüre aus Linnig I. Teil, verbunden mit Belehrungen über den erweiterten und mmengesetzten Satz, über Satzzeichen und Rechtschreibung-Uebungen im mündlichen Vortrage des Ge-nen und im Deklamieren auswendig gelernter Gedichte. Wöchentliche schriftliche Arbeiten. 2 St. Ordinarius.

Latein. Einübung der gesamten Formenlehre; das Hauptsächlichste über Acc. c. Inf., Part. i. und Abl. abs. Uebersetzt wurden aus Schulz-Führer, Uebungsstoff die entsprechenden Uebungs-biele und zusammenhängenden Stücke. Wöchentliche Klassenarbeiten. 9 St. Der Ordinarius.

Französisch. Aus der Vorschule von Probst I. Abschnitt. Aussprache, Conjugation von ir und être, das Substantiv, Objektiv, Zahlwort und die regelmäßige Conjugation. 8-tägige schrift-e Arbeiten. 4 St. Im Sommer Himmel, im Winter Bordihn.

Polnisch. Comb. mit Tertia.

Geschichte. Biographische Erzählungen aus der deutschen Geschichte des Mittelalters und aus brandenburgisch-preußischen Geschichte. 1 St. Kluck.

Geographie. Wiederholung des Pensums der Sexta; die Länder Europas, besonders Deutsch-d und Preußen. 2 St. Kluck.

Rechnen. Wiederholung des Pensums der Sexta. Die gewöhnlichen Brüche und die Dezimal-he. Einfache Regeldetri. Kopfrechnen. Uebungen im Zeichnen von geometrischen Figuren. Alle Tage eine Klassenarbeit. 4 St. Im Sommer Himmel, im Winter Kluck.

Naturbeschreibung. Im Sommer Botanik, im Winter Zoologie. 2 St. Groß.

Sexta.

Ordinarius: Kommissar. Religionslehrer Henke.

Religionslehre. a) Für die katholischen Schüler: 2 St. comb. mit Quinta. In der 3. St: ete. Die 6 Grundwahrheiten des Christenthums. Das Wichtigste über den kathol. Gottesdienst. Responsorien bei der h. Messe. Geographie von Palästina. Der Ordinarius. b) Für die igelischen Schüler: 3 St., davon 2 comb. mit Quinta. Wallat.

Deutsch. Uebungen im richtigen Lesen. (Linnig I.) Belehrung über die Wortarten und de Beugung, ferner über den Satz und dessen Erweiterung. Nacherzählen kurzer gelesener und erklä Stücke. Deklamieren auswendig gelernter Gedichte. Uebungen in der Rechtschreibung und S zeichenlehre. Wöchentliche schriftliche Arbeiten. 3 St. Der Ordinarius.

Latein. Die regelmäßige Formenlehre. Uebersetzen der Uebungsstücke bis § 133 (mit Auswa Die Vokabeln und einige Sätze wurden memoriert. Wöchentlich eine schriftliche Arbeit (meist Klas arbeit). 9 St. Der Ordinarius.

Polnisch. Comb. mit Tertia.

Geschichte. Sagen und biographische Erzählungen aus dem Altertume; die Hauptzüge Siegfriedssage. 1 St. Bludau.

Geographie. Uebersicht über die Erdteile. Geographie von Deutschland. 2 St. Derse

Rechnen. Das Zahlensystem. Die 4 Spezies in unbenannten und benannten Zahlen, Mü Maß-, Gewicht- und Jahresrechnung. Kopfrechnen. Alle 2 Wochen eine schriftliche Arbeit. 4 St. Gr

Naturbeschreibung. Im Sommer Botanik, im Winter Zoologie unter besonderer Ber sichtigung der einheimischen Pflanzen. 2 St. Derselbe.

Technischer Unterricht.

a) Turnen. Marsch-, Frei- und Ordnungsübungen; Geräteübungen nach Müttrich und Fr länders Merkbüchlein. Die Schüler turnten in 4 Abteilungen (jede Abteilung 2 mal wöchentlich j Stunde) unter Leitung von Wallat und Groß. Die Vorturner wurden in 2 Abt. (je 1 wöchentlich) geübt. Vom Turnen dispensiert waren im Sommer 22, im Winter 26 Schüler. Sommer wurden mit allen Abteilungen wiederholt Turnfahrten unternommen und Turnspiele ausgefü

b) Singen. 1. Sexta comb. mit Quinta. 2 St. Notenkenntnis; Gehör- und Tonbildu rhythmische und dynamische Uebungen, ein- und zweistimmige Lieder und Choräle. 2. Für den G nasialchor. 3 St. Gesangstücke für Männer und gemischten Chor nebst theoretischen Anweisun Für den Kirchengesang wurden verschiedene Choräle eingeübt. Groß.

c) Zeichnen. 1. Sexta. 2 St. Freihandzeichnen unter Benutzung der bei Wendler Berlin erschienenen Zeichentafel (nach der Methode des Vereins zur Förderung des Zeichenunterrich 2. Quinta. 2 St. Fortsetzung des Freihandzeichnens nach Zeichentafeln. 3. Quarta. 2 St. Zeich nach Holzmodellen mit einfacher Schattierung. Derselbe.

d) Schreiben. 1. Sexta. 2 St. Die einfachsten Formen der deutschen und lateinis Handschrift. 2. Quinta. 2 St. Die deutsche und lateinische Handschrift. Derselbe.

Zweiter Abschnitt.

Mitteilungen aus den Verfügungen des Königlichen Provinzial-Schulkollegium zu Danzig.

1. Vom 25. März 1890. Der Oberlehrer Hossenfelder ist an das Gymnasium zu Straßb versetzt, der ordentliche Lehrer Bordihn zum Oberlehrer befördert; der ordentliche Lehrer Frech Gymnasium zu Straßburg ist an das Gymnasium zu Dt. Krone versetzt.

2. Vom 26. März 1890. Der Direktor wird beauftragt, die mündliche Prüfung des erkrankten iturienten Michelsohn als stellvertretender Königlicher Kommissarius abzuhalten.

3. Vom 5. April 1890. Mit dem Beginn des neuen Schuljahres sind überall die Prädikate sehr gut, 2. gut, 3. genügend, 4. wenig genügend, 5. nicht genügend" anzuwenden.

4. Vom 12. April 1890. Die stufenweise Einführung der griechischen Grammatik von Wendt d genehmigt.

5. Vom 20. Mai 1890. Seine Majestät der Kaiser und König haben zu bestimmen geruht, einige Exemplare der im Jahre 1851 auf die Enthüllung des Denkmals Friedrichs des Großen Berlin geprägten Medaillen in Bronze als Prämien für solche Gymnasial-Abiturienten verwendet den, welche sich durch ihre Kenntnis der vaterländischen Geschichte besonders hervorgethan haben. s der Anstalt überwiesene Exemplar der Medaille wurde am 31. Mai dem Oberprimaner Ernst mons ausgehändigt.)

6. Vom 14. Juni 1890. Die Direktion wird auf den Ministerialerlaß vom 3. April d. Js. weisung zur Ausführung der Laufübungen im Turnunterricht) zur Nachachtung hingewiesen.

7. Vom 30. Juli 1890. Der Direktor wird beurlaubt; die Amtsgeschäfte werden dem Professor ierstraß übertragen.

8. Vom 25. August 1890. Die Lehrerkollegien werden nachdrücklichst davor gewarnt, daß sie der Versetzung nach Prima oder der Prüfung für diese Klasse einen andern Maßstab anlegen bei en Schülern, welche die Anstalt verlassen, und bei solchen, welche an derselben verbleiben oder in eintreten. Eine gleichmäßige Strenge ist in dem einen wie in dem andern Falle zu üben.

9. Vom 1. September 1890. Schüler, welche nicht auf Grund eines Versetzungszeugnisses einer kannten gymnasialen Lehranstalt die Aufnahme in die Unterprima eines Gymnasiums beanspruchen en, haben sich einer förmlichen Aufnahmeprüfung zu unterziehen.

10. Vom 23. September 1890. An den Gymnasialdirektor Prof. Lowinski: „Seine Majät der Kaiser und König haben mittelst Allerhöchster Ordre vom 28. August d. Js. Ew. wohlgeboren aus Anlaß des Uebertritts in den Ruhestand den Roten Adlerorden 3. Kl. mit Schleife zu verleihen geruht. Indem wir Ihnen die Insignien desselben übersenden, geben wir ankbarer Würdigung der Verdienste, die Sie sich durch Ihre Hingebung an Amt und Anstalt,) stete Bethätigung von Humanität und Vaterlandsliebe erworben haben, dem herzlichen Wunsche ruck, daß Gottes Huld und Gnade Ihnen auch die Tage ehrenvoller Muße segnen möge."

11. Vom 8. Oktober 1890. Das Direktorat ist vom 1. d. Mts. ab dem Direktor Dr. Stuhrn übertragen.

12. Vom 16. Oktober 1890. Auf Allerhöchsten Befehl soll aus Anlaß des 90. Geburtstages Generalfeldmarschalls Grafen von Moltke am 25. Oktober eine Schulfeier stattfinden.

13. Vom 22. November 1890. Die Direktion wird auf den Ministerialerlaß vom 6. Juni d. Js., fend den Nutzen einer maßvollen Verwertung des Zeichnens für die meisten Unterrichtsgegenstände er Schulen aufmerksam gemacht.

14. Auf Allerhöchsten Befehl sollen am 1. Dezember d. Js. aus Anlaß der 250-jährigen rkehr des Regierungsantritts weiland des Großen Kurfürsten die öffentlichen Gebäude beflaggt n.

15. Vom 31. Dezember 1890. Der lateinische Aufsatz und die Uebersetzung in das Griechische r Versetzung in die Prima sollen schon für den nächsten Reifeprüfungs- bezw. Versetzungstermin rein in Wegfall kommen.

16. Vom 14. Januar 1891. Die Ferien des Jahres 1891 werden in folgender Weise festgese

Ostern	21. März	bis	6. April,
Pfingsten	15. Mai	=	21. Mai,
im Sommer	4. Juli	=	3. August,
im Herbst	26. September	=	12. Oktober,
zu Weihnachten	23. Dezember	=	7. Januar.

16. Vom 2. März 1891. Die Verwaltung der Gymnasialkasse ist dem Gymnasiallehrer Ri übertragen.

Dritter Abschnitt.

Chronik.

Montag, den 14. April wurde das Schuljahr in üblicher Weise eröffnet.

Am 22. April fand die mündliche Prüfung des Abiturienten Michelsohn unter dem Vo des Direktors statt.

Der Unterricht hat im Laufe des Jahres mehrfache größere Störungen erfahren. Der Gymnasium zu Straßburg hierher versetzte Gymnasiallehrer Frech*) war vom 9. April ab zu militärischen Dienstleistung auf acht Wochen einberufen, der kommissar. Gymnasiallehrer Himmel der Zeit vom 4. August bis zum 8. September. Der Direktor war vom 30. Juli bis zum Schl des Sommersemesters beurlaubt. Der Gymnasiallehrer Wallat war vom 9. Januar bis 1. Februar krank. Der Oberlehrer Zielinski war vom 1. bis 5. Juli sowie vom 4. bis 9. Au beurlaubt und seit dem 7. Januar krank. Alle Vertretungen sind vom Kollegium erledigt worden.

Im Sommer machten die Schüler in Begleitung der Ordinarien und der Turnlehrer meh Male Spaziergänge und Turnfahrten.

Während der Sommerferien fand eine Ferienbeschäftigung von 12 Schülern der vier unt Klassen unter Leitung des Gymnasiallehrers Schapler statt.

Die Festrede am Sedantage hielt Dr. Barwinski. Fuchs (Ib) hielt einen deut Vortrag, es deklamierten Braunspan IIb, Herzog IIIa, Drechsler IIIb, Fuchs VI

Am 4. September fand die Abiturientenprüfung unter dem Vorsitz des Geheimen Regieru und Provinzial-Schulrats Herrn Dr. Kruse statt, in welcher 3 Oberprimaner das Zeugnis Reife erhielten.

Mit dem Ablauf des Sommersemesters trat der bisherige Leiter der Anstalt, Prof. Lowin in den Ruhestand. $23^3/_4$ Jahre hat er an ihrer Spitze gestanden und ist mit Umsicht und That auf das Wohl der ihm unterstellten Lehrer und der ihm anvertrauten Schüler bedacht gewesen. seiner Liebe für das von ihm geleitete Gymnasium zeugen die beiden herzlichen Schreiben, durch u

*) Franz Frech, geboren 21. Dezember 1860 zu Deutz, besuchte die Gymnasien zu Bromberg und Gumbi sowie das Realgymnasium auf der Burg zu Königsberg, studierte dann Mathematik und Naturwissensch auf der Universität zu Königsberg und war als Lehrer thätig an den Gymnasien zu Thorn, Marienwerder Strasburg.

sich von Lehrern und Schülern verabschiedet hat. Möge der reiche Segen, den er auf die ihm teure stalt herabruft, in Erfüllung gehen, möge ihm der Gedanke, Dankbarkeit und Anhänglichkeit in den zen seiner Untergebenen hinterlassen zu haben, seine Muße verschönen!

Am 6. Oktober starb nach langem, schwerem Leiden Herr Propst Wurst, Ritter des eisernen uzes, der ein Jahrzehnt den katholischen Religionsunterricht an der Anstalt ertheilt hatte. Er he in Frieden!

Am 15. Oktober wurde der Unterzeichnete*) durch den Geheimen Regierungs- und Provinzial- ulrat Herrn Dr. Kruse in sein neues Amt eingeführt.

Bei der Moltkefeier am 25. Oktober hielt die Festrede Gymnasiallehrer Rieve; es deklamierten mons (Ia), Wegner (IIb), Dobberstein (V).

Am 1. November übernahm der kommissar. Gymnasiallehrer Himmel eine ordentliche Lehrerstelle der hiesigen Baugewerkschule.

Am Geburtstage Seiner Majestät des Kaisers und Königs hielt die Festrede Gymnasial- er Frech; es deklamierten Arnold (Ib), Bork (I), Borck (II), Fuchs, Giese (IIa), Wieczorek (IIIa), nselin (IV), Biskupski, Dobberstein (II), Lehmann, Manke (II), Wiesener, Jahn (VI).

Gleich nach den Weihnachtsferien erkrankte der Oberlehrer Zielinski und starb nach schmerz- em Leiden am 20. Februar. 23 Jahre ist er als Lehrer am hiesigen Gymnasium thätig gewesen. ne Pflichttreue, die Biederkeit seines Charakters und seine wohlwollende Milde machen ihn Lehrern Schülern über das Grab hinaus teuer.

Die vaterländischen Gedenktage wurden teils durch Ansprachen der Ordinarien, teils durch Dekla- ionen und Vorträge von Schülern festlich begangen.

Am 16. März fand unter dem Vorsitz des Geheimen Regierungs- und Provinzialschulrats Herrn Kruse die Abiturientenprüfung statt, in welcher 10 Oberprimaner das Zeugnis der Reife erhielten.

Die h. Sekramente der Buße und des Altars empfingen die katholischen Schüler drei mal. Den en Geistlichen, welche hierbei bereitwillige Aushilfe geleistet haben, ist die Anstalt zu Danke ver- htet. Am 29. Juni wurden 12 Schüler aus den unteren Klassen zu der ersten h. Kommunion hrt, nachdem sie von dem Religionslehrer in besonderen Stunden hierzu vorbereitet waren.

---

*) Johann Stuhrmann, geboren 25. März 1853 zu Borwangen, Kreis Rössel, besuchte das Gymnasium zu und die Universität Königsberg, war Mitglied des pädagogischen Seminars zu Königsberg und als Lehrer thätig Wilhelms-Gymnasium und am Kneiphöffschen Gymnasium zu Königsberg, sowie an den Gymnasien zu Konitz, nburg, Neustadt Westpr., Konitz.

Vierter Abschnitt.

Statistische Mittheilungen.

1. Übersicht über die Frequenz und deren Veränderung im Laufe des Schuljahres.

	O.I.	U.I.	O.II.	U.II.	O.III	U.III	IV.	V.	VI.
1. Bestand am 1. Februar 1890	23	20	24	29	34	28	34	36	39
2. Abgang bis z. Schluß d. Schuljahres 1889/90	19	—	—	12	—	1	4	1	—
3a. Zugang durch Versetzung zu Ostern	12	17	12	30	22	27	31	32	—
3b. Zugang durch Aufnahme zu Ostern	—	—	—	1	2	3	2	5	15
4. Frequenz am Anfange d. Schuljahres 90/91	16	23	19	36	25	34	37	40	21
5. Zugang im Sommersemester	—	—	—	—	—	1	—	—	—
6. Abgang im Sommersemester	3	3	—	1	1	1	—	1	—
7a. Zugang durch Versetzung zu Michaelis .	1	—	—	—	—	—	—	—	—
7b. Zugang durch Aufnahme zu Michaelis .	1	—	—	—	—	—	2	1	2
8. Frequenz am Anfange d. Wintersemesters .	15	20	19	35	24	34	39	40	23
9. Zugang im Wintersemester	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10. Abgang im Wintersemester	—	—	1	2	—	—	2	—	—
11. Frequenz am 1. Februar 1891	15	20	18	33	24	34	37	40	23
12. Durchschnittsalter am 1. Februar 1891 .	19,7	18,6	17,8	17	15,8	14,7	13,7	12,5	11,5

2. Religions- und Heimatsverhältnisse der Schüler.

	Kath.	Evang.	Mos.	Einh.	Au
1. Am Anfang des Sommersemesters	106	119	27	105	1
2. Am Anfang des Wintersemesters	105	116	28	102	1
3. Am 1. Februar	103	114	27	103	1

Das Zeugnis für den einjährigen Militärdienst haben erhalten Ostern 1890: 24, Weihn 1890: 1; davon sind zu einem praktischen Beruf abgegangen Ostern 1890: 12, außerdem sin praktischem Beruf bis 1. Januar 1891 abgegangen 6.

3. Uebersicht über die Abiturienten.

r- und Zuname	Alter in Jahren	Geburts- Ort	Geburts- Kreis	Konfession	Stand des Vaters	Wohnort desselben	Dauer des Aufenthaltes auf der Anstalt	Dauer des Aufenthaltes in Prima in Jahren	Gewählte Berufsart
a. 22. April 1890. (Nachprüfung Ostertermin 1890.)									
Michelsohn Hugo	17 3/4	Schönlanke	Czarnikau	mos.	Rentier	Dt. Krone	4	2	Bankgeschäft.
b. Michaelis 1890.									
Gerner Karl	21	Pr. Friedland	Schlochau	ev.	Kgl. Kreisschulinsp.	Pr. Friedland	2	2	Militär-Karriere.
Radtke Johannes	21 1/4	Dt. Krone	Dt. Krone	kath.	Schuldiener	Dt. Krone	7	2 1/2	Theologie.
Schmidt Paul	21 1/4	Dt. Krone	Dt. Krone	kath.	Schuhmacher	Dt. Krone	11	2 1/2	Theologie.
c. Ostertermin 1891.									
Foerster Heinrich	22 3/4	Flathe	Dt. Krone	kath.	Gutsbesitzer	Flathe	3	2	Rechte.
Jancke Julius	19	Tempelburg	Neu-Stettin	ev.	Färberei-Besitzer	Tempelburg	6	2	Militär-Karriere.
Klinke Bruno	19 1/2	Schwerin a. W.	Schwerin a. W.	kath.	Kaufmann †	—	3 1/2	2	Rechte.
Klotzsch Fritz	18	Treptow a. d. Tollense	Demmin	ev.	Amtsgerichtsrath †	—	9	2	Rechte.
Simons Ernst	17 1/4	Marienwerder	Marienwerder	ev.	Lehrer †	—	8 1/2	2	Rechte.
Stankiewicz Leo	20 3/4	Kalau	Meseritz	kath.	Gutsbesitzer	Kalau	2 1/4	2	Baufach.
Steinhauf Leo	18 1/2	Niekosken	Czarnikau	kath.	Lehrer	Trebisch Kr. Schwerin a. W.	3 1/2	2	Theologie.
Steinke Johannes	19	Dt. Krone	Dt. Krone	kath.	Ackerbürger	Dt. Krone	8 1/2	2	Theologie.
Bronka Konrad	18 3/4	Rössel	Rössel	kath.	Instituts-Vorsteher	Freiburg i. B.	9	2	Medicin.
Zielinski Johannes	17 3/4	Dt. Krone	Dt. Krone	kath.	Gymnasial-Oberlehrer †	—	9	2	Medicin.

Die Abiturienten Klotzsch, Simons, Stankiewicz und Zielinski sind von der mündlichen ng dispensiert worden.

Fünfter Abschnitt.

I. Etatsmäßige Anschaffungen.

A. Lehrerbibliothek.

Verwalter: Oberlehrer Dr. Bludau.

Minckwitz, Homers Gesänge. 1. T., die Ilias verdeutscht. Leipzig. 1864. W. v. Hertel, Abriß der G matik des homer. und herodot. Dialekts. Leipzig. 1888. Falsi, Homers Iliade. I. Bd. 1886. II. Bd. 1888. Be Engelmann, Bilderatlas zum Homer mit 36 Tafeln. Leipzig. 1889. Vieli, Geschichte der Herrschaft Räzüns zur Uebernahme durch Oesterreich. Chur. 1889. Satori, Preußens Vorzeit. Teil 1, 2, 3, (mit Ansicht der Ma burg). Leipzig. 1854. Neue Jahrbücher für Philologie und Pädagogik von Fleckeisen und Masius. 1 Leipzig. Monatsschrift für das Turnwesen. 1890. Berlin. Altpreußische Monatsschrift von Reicke und Wich 1890. Königsberg. Rheinisches Museum von Ribbeck und Bücheler. 1890. Frankfurt a. M. Petermanns g Mitteilungen. 1890. Gotha. Philologus, Zeitschrift für das klassische Altertum von v. Leutsch (herausgegeben Otto Crusius). 1890. Göttingen. Theologische Quartalschrift von Dr. v. Kuhn. 1890. Tübingen. von Sy historische Zeitschrift. 1890. München. Zeitschrift für das Gymnasialwesen von Kern und Müller. 1890. Be Zeitschrift für mathemat. und naturwissenschaftl. Unterricht von Hoffmann. 1890. Leipzig. Zeitschrift für de Philologie von Zacher. 1890. Halle. Liter. Centralblatt für Deutschland von Zarncke. 1890. Leipzig. Central für die gesamte Unterrichtsverwaltung. 1890. Berlin. Gymnasium. 1890. Paderborn.

B. Schülerbibliothek.

Verwalter: Oberlehrer Bordihn.

13 Bände Schulbücher. Richter, Bilder aus der deutschen Kulturgeschichte. 2 Bde. 1882. Leipzig. Frey Soll und Haben. Sach, die deutsche Heimat. 1885. Halle a. S. Wollheim, die Fahrt der Vega um Asien Europa. 1883. Berlin. Volz, H. Stanley's Reise durch den dunklen Weltteil. 3. Aufl. 1885. Leipzig. v. Holle Deutsches Flottenbuch. 1881. Berlin u. Leipzig. Kruse, das Mädchen von Byzanz. 1885. Leipzig. Thomas, denkwürdigsten Erfindungen bis zu Ende des 18. Jahrhunderts. 1882. Leipzig u. Berlin. Thomas, die de Erfindungen im 19. Jahrh. 1883. Leipzig u. Berlin. Ferd. Schmidt, der Franzosenkrieg. Erste Hälfte. Ber Denboeck, des Prinzen Heinrich von Preußen Weltumseglung. 3. Aufl. Berlin. von Mühler, Wahlsprüch Hohenzollern. 1884. Breslau. Ellendt, Katalog für Schülerbibliotheken.

C. Anderweite Lehrmittel.

Für die physikalische Sammlung (Verwalter: Gymnasiallehrer Frech) wurde angeschafft: Sammlung Apparaten zum experimentellen Studium der Akustik. Vom kommissar. Gymnasiallehrer Himmel wurde ein botan Schulgarten angelegt.

Für den Turnunterricht: (Verwalter: Gymnasiallehrer Wallat): 1 Barren System Eckler.

II. Geschenke.

Von den hohen Behörden: Verhandlungen der Direktoren-Versammlungen u. s. w. (Ost- u. Westpre 24. Bd. Berlin. 1886. 34. Bd. 1889. Publikationen aus den Königl. Preuß. Staatsarchiven. Bd. 41, 42, 43, 44 Leipzig. 1890. Pierluigi da Palestrina's Werke. Fortsetzung. Leipzig. 1890. Prolegomena zur Mythologi Wissenschaft mit Lexikon der Mythensprache von Dr. P. W. Forchhammer. Kiel. 1891.

Von den Verlagsbuchhandlungen: 2 Schulbücher.

Die Münzsammlung wurde vermehrt durch 18 verschiedene Münzen in 19 Exemplaren, geschenkt von Herren Oberlehrer Bordihn (1 Hadrian), Dr. Ehling, von dem Oberprimaner Schmidt, den Unterterti Schönfeld, Lowinski, Drechsler, Nowacki, den Quartanern Manke I, Gramse, Schulz, Dobberste Scheffler, Beckmann. Die Sammlung besteht aus 52 Münzen in 68 Exemplaren.

Herr Professor Weierstraß machte 2 Brustbilder Ihrer Majestäten des Kaisers und der Kaiserin für das senlokal der Oberprima zum Geschenk.

Für diese Geschenke, sowie für die von mehreren Familien der Stadt unbemittelten Schülern ährten Freitische und für andere denselben erwiesene Wohlthaten spricht der Unterzeichnete im nen der Anstalt den gebührenden Dank aus. —

Sechster Abschnitt.

Mitteilungen an die Schüler und deren Eltern.

1. Die Schlußfeier findet **Sonnabend, den 21. März** in folgender Ordnung statt: Vormittags 7½ Uhr Schlußgottesdienst in der Gymnasialkirche; um 9 Uhr in der Aula a. Gesang. b. Abschiedsrede des Abiturienten Simons. c. Erwiderung derselben durch den Unterprimaner Jancke. d. Gesang. e. Entlassung der Abiturienten und Verkündigung der Versetzungen durch den Direktor.
2. Das neue Schuljahr beginnt **Montag, den 6. April**. Früh 7¼ Uhr findet für die kath. Schüler eine Andacht in der Gymnasialkirche, um 7¾ Uhr für die ev. eine Andacht in der Aula statt.
3. Die Anmeldungen neuer Schüler werde ich **Freitag den 3. April und Sonnabend den 4. April** auf meinem Amtszimmer entgegennehmen. Es sind dabei vorzulegen a. der Geburts- oder Taufschein, b. eine Bescheinigung über Impfung bezw. (bei Schülern im im Alter von mehr als 12 Jahren) über Wiederimpfung, c. ein Abgangszeugnis von der zuletzt besuchten Schule.

   Bedingungen für die Aufnahme in die Sexta sind: das vollendete neunte Lebensjahr; geläufiges Lesen und Schreiben deutscher und lateinischer Schrift; Kenntnis der wichtigsten Redeteile; Fertigkeit, Diktiertes ohne grobe Fehler wider die Rechtschreibung nachzuschreiben; Sicherheit in den vier Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen.
4. Die Wahl der Wohnungen unterliegt der vorherigen Genehmigung des Direktors. Gesuche um Befreiung vom Schulgelde sind schriftlich einzureichen und zu begründen; eine schriftliche Beantwortung der Gesuche findet nicht statt.
5. Vor dem Ankauf alter Schulbücher wird gewarnt. —

Deutsch Krone im März 1891.

Dr. Stuhrmann,
Gymnasialdirektor.

Festschrift

zur 50jährigen Jubelfeier des Gymnasiums zu Lauenburg i. P.

als höherer Lehranstalt

am 30. September 1910.

Zweiter Teil.

Die Fundamente für eine elementare Einleitung in die Differential- und Integralrechnung

von Professor C. Frenzel.

Mit 19 Figuren im Text
und auf einer Tafel.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig 1910.

Vorwort.

Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω!

In der vorliegenden Abhandlung, die einen Beitrag zur praktischen führung der Kleinschen Reformvorschläge liefern soll, habe ich die lagen der Differential- und Integralrechnung für den Unterricht Gymnasialprima nach folgenden neuen Gesichtspunkten bearbeitet:
. Zum Begriff des Differentialquotienten gelangt man im Unter- uf zwei ganz verschiedenen, scheinbar weit voneinander abliegenden : In der Mechanik bei der Definition der Begriffe „Geschwindig- nd „Beschleunigung", in der Koordinatengeometrie bei der Behand- es „Tangentenproblems". Beide Wege führen zu demselben Ziel, sind die Abschnitte I und II nicht nacheinander, sondern neben- er durchzunehmen.
. In der Differentialrechnung kommt, entsprechend der berechtigten ung von Höfler in seiner „Didaktik des mathematischen Unter- nur der Begriff des Differentialquotienten zur Anwendung; m kaum definierbaren Begriff des Differentials habe ich keinen ch gemacht, und das Symbol dx und dy hat nirgends eine selbst- e Bedeutung.
Auch in der Integralrechnung habe ich diese Forderung streng führt; dadurch glaube ich die noch vielfach vorhandene Ansicht, e Schwierigkeiten einer schulgemäßen Darstellung der Grundzüge egralrechnung noch nicht genügend gehoben werden können", wider- haben.

nenburg i. P. den 11. August 1910.

C. Frenzel.

Benutzte Literatur.

Höfler, Didaktik des mathematischen Unterrichts; Leipzig und

Tannery, Notions de mathématiques; Paris, 1903.

Scheffers, Lehrbuch der Mathematik für Studierende der Nat
und der Technik; Leipzig, 1905.

Kowalewski, Einführung in die Infinitesimalrechnung; Leip

Kowalewski, Die klassischen Probleme der Analysis des Unend
1910.

er Differentialquotient in der Mechanik.

§ 1. Die gleichförmige Bewegung.

e Bewegung eines Körpers heißt gleichförmig, wenn der n gleichen Zeiten gleiche Wegstrecken zurücklegt. Bezeichnet Geschwindigkeit eines sich gleichförmig bewegenden Körpers mit c gend den Wörtern celeritas und constans), so ist der im Ver- t Sekunden zurückgelegte Weg

$$s = c \cdot t,$$

c die Benennung „Meter" besitzen. Hieraus ergibt sich:

$= \frac{s}{t}$ m/sec (d. h. Meter pro Sekunde).

wollen dieser Gleichung noch eine andere Form geben. Wir n, ein Körper bewege sich gleichförmig auf einer gradlinigen mlinigen Bahn, und rechnen die Zeit von chem Augenblicke an, in dem sich der Körper A befinden möge (Fig. 1). Wir drücken dies indem wir sagen: Zur Zeit $t = 0$ befinde örper am Orte A. Nehmen wir ferner an, r befinde sich nach Verlauf von t Sekunden, er zur Zeit t am Orte B und zur Zeit t' t sei) am Orte C, und bezeichnen wir den Körper in t Sekunden zurückgelegten Weg n in t' Sekunden zurückgelegten Weg mit

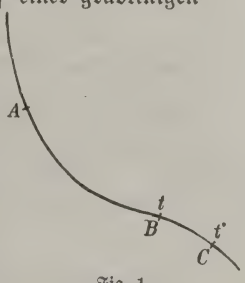


Fig. 1.

$$s = c \cdot t \text{ und } s' = c \cdot t',$$

$$s' - s = c \cdot (t' - t),$$

ch ergibt:

$$c = \frac{s' - s}{t' - t} \text{ m/sec},$$

Worten:

Maßzahl der Geschwindigkeit einer gleichförmigen ng ist gleich dem Quotienten aus den Maßzahlen ner von dem sich bewegenden Körper zurückgelegten ke und der Zeit, in der diese zurückgelegt wird.

§ 2. Die Geschwindigkeit bei einer ungleichförmige Bewegung.

Eine ungleichförmige Bewegung findet statt, wenn ein in gleichen Zeiten ungleiche Wegstrecken zurücklegt. Bei einer solch wegung ändert sich die Geschwindigkeit des Körpers von Augen Augenblick; es kann daher nur von der Geschwindigkeit in ein stimmten Augenblick die Rede sein, und die Gleichung (2) ist zu nition dieser augenblicklichen Geschwindigkeit nicht mehr brauchbar kann man der Definitionsgleichung (3) eine solche Form geben, auch für die Geschwindigkeit bei einer ungleichförmigen Bewegung bleibt.

Wir nehmen wieder an, ein sich ungleichförmig bewegender befinde sich, wie in Fig. 1 zur Zeit $t = 0$ in A, zur Zeit t in zur Zeit t' (wo $t' > t$) in C; ferner sei der Weg von A bis B der von A bis C gleich s'. Dann braucht der Körper zum Zur des Weges $BC = s' - s$ die Zeit von $(t' - t)$ Sekunden, Geschwindigkeit des Körpers wäre bei einer gleichförmigen Be innerhalb dieser $(t' - t)$ Sekunden stets gleich $\frac{s' - s}{t' - t}$ m/sec. Bei gleichförmigen Bewegung ändert sich aber die Geschwindigkeit des auf dem Wege von B bis C von Augenblick zu Augenblick, es her auch nur von der augenblicklichen Geschwindigkeit des in irgendeinem zwischen B und C gelegenen Punkte die Rede kürzer jedoch das Zeitintervall $t' - t$ ist, um so kürzer ist auch $s' - s$, und um so mehr können wir annehmen, daß die Geschw innerhalb dieses sehr kurzen Zeitintervalls und auf diesem seh Wege dieselbe bleibt. Wenn daher der Punkt C immer n den Punkt B heranrückt, so nähert sich der Quotient $\frac{s' - s}{t' - t}$ imm einem bestimmten Grenzwerte, der die Geschwindigkeit des Kör Punkte B oder zur Zeit t angibt. Für den Grenzwert eines Quotienten hat man die Bezeichnung

$$\lim \text{ (limes)}$$

eingeführt. Somit läßt sich, wenn man ferner die veränderliche G digkeit eines Körpers bei ungleichmäßiger Bewegung mit v (entn den Wörtern velocitas und variabilis) bezeichnet, für die Gesch keit eines Körpers bei ungleichförmiger Bewegung die Definiti stellen:

Unter der Geschwindigkeit eines Körpers bei un förmiger Bewegung zur Zeit t versteht man den Gre

$$v = \lim \frac{s' - s}{t' - t} \text{ für } t' = t. \tag{4}$$

Man gibt dieser Definition oft noch eine andere Form, in eine verschwindend kleine Größe, d. h. eine Größe, die sich imm der Grenze 0 nähert, ohne sie bereits erreicht zu haben, mit de tionszeichen $\triangle$ versieht. Für die verschwindend klein anzu

ecke $s' - s$ wählt man daher die Bezeichnung $\triangle s$ und für den
indend kurzen Zeitraum $t' - t$, den der Körper zum Durchlaufen
Wegstrecke braucht, die Bezeichnung $\triangle t$; dann ist

$$v = \lim \frac{\triangle s}{\triangle t} \text{ für } \triangle t = 0 \text{ oder kürzer: } v = \lim_{\triangle t = 0} \frac{\triangle s}{\triangle t}.$$

uf den ersten Blick hat es den Anschein, als ob sich nach dieser
ion für die Geschwindigkeit eines Körpers zur Zeit t bei einer
förmigen Bewegung ein Ausdruck von der Form $\frac{0}{0}$ ergeben
ein Ausdruck, der bekanntlich einen ganz unbestimmten Wert
der der jeden beliebigen Wert annehmen kann. Dies ist jedoch
s nicht der Fall. Zwar würde das Verhältnis des Grenzwertes
s zu dem von $\triangle t$, die beide gleich 0 sind, einen solchen ganz un-
ten Wert besitzen; doch ist v nicht als das Verhältnis der
Grenzwerte von $\triangle s$ und $\triangle t$, sondern als der Grenzwert
rhältnisses $\triangle s : \triangle t$ definiert, und dieser Grenzwert läßt sich,
sogleich an zwei Beispielen zeigen wollen, bei jedem einzelnen
ngsvorgange genau bestimmen.

3. Beispiele für eine ungleichförmige Bewegung

Beispiel: Das einfachste Beispiel einer ungleichförmigen Be-
ist der freie Fall, bei dem zwischen s und t stets die Beziehung

$$s = \frac{1}{2} g t^2,$$

ne unbenannte Zahl bezeichnet, die nahezu den Wert 9,8 besitzt.
nach Gleichung (1) bei einer gleichförmigen Bewegung s eine
Funktion von t ist, ist für die Bewegung beim freien Fall s
adratische Funktion von t*). Wir wollen die Gleichung (1)
tweggleichung für die gleichförmige Bewegung und die Glei-
) die Zeitweggleichung für den freien Fall nennen.
t t wird eine beliebige ganze oder gebrochene Anzahl von Se-
bezeichnet. Zur Zeit t', wobei $t' > t$ angenommen werden

$$s' = \frac{1}{2} g t'^2,$$

$$\frac{s' - s}{t' - t} = \frac{g}{2} \cdot \frac{t'^2 - t^2}{t' - t}.$$

irde man, um zu dem Grenzwerte $\lim \frac{s' - s}{t' - t}$ für $t' = t$ zu ge-
auf der rechten Seite dieser Gleichung $t' = t$ setzen, so würde
diesen Grenzwert den ganz unbestimmten Ausdruck $\frac{g}{2} \cdot \frac{0}{0}$ er-

*) Die folgende Entwicklung läßt sich auch leicht für die allgemeine qua-
Funktion $s = at^2 + bt + c$ durchführen, wo a, b und c irgendwelche
d. h. von t unabhängige Werte bezeichnen.

halten. Man würde aber hierbei den Fehler begehen, daß man das V
hältnis der Grenzwerte von Zähler und Nenner zu bestimmen su
anstatt den Grenzwert des Verhältnisses, oder mit anderen Worten:

An dem Quotienten $\frac{t'^2 - t^2}{t' - t}$ läßt sich die Gleichsetzung
t' und t noch nicht vollziehen, er **verträgt** sie noch nicht.

Gibt man jedoch der rechten Seite der obigen Gleichung die F

$$\frac{g}{2} \cdot \frac{(t' + t)(t' - t)}{t' - t} = \frac{g}{2} \cdot (t' + t),$$

so erhält man:

$$\frac{s' - s}{t' - t} = \frac{g}{2} \cdot (t' + t).$$

Diese Gleichung gilt noch für ganz beliebige Werte von t' un
doch an diesem Werte des Quotienten $\frac{s' - s}{t' - t}$ kann man die Gleichse
von t' und t vornehmen, ohne zu einem Ausdruck von der Form
gelangen; es ergibt sich auf diese Weise:

$$v = \lim_{t' = t} \frac{s' - s}{t' - t} = g\,t, \tag{7}$$

und durch diese Gleichung $\boldsymbol{v = g \cdot t}$ ist die augenblickliche Geschwi
keit des frei fallenden Körpers zur Zeit t bestimmt.

2. Beispiel: Wir nehmen ferner an, ein Körper bewege sic
einer geradlinigen oder krummlinigen Bahn nach dem Zeitweggese

$$s = 2t^3 \tag{8}$$

und er befinde sich zur Zeit $t = 0$ wieder im Punkte A (Fig. 1).
für $t = 0$ auch $s = 0$ ist, so sind die von dem Körper durchlau
Wegstrecken s vom Punkte A aus zu messen. Ist der Körper nach
lauf von t Sekunden oder kurz zur Zeit t im Punkte B und zur
$(t' > t)$ im Punkte C angelangt, so ist

$$s = 2t^3 \text{ und } s' = 2t'^3,$$

also

$$\frac{s' - s}{t' - t} = 2 \cdot \frac{t'^3 - t^3}{t' - t} = 2 \cdot \frac{(t' - t) \cdot (t'^2 + t't + t^2)}{t' - t} = 2 \cdot (t'^2 + t't$$

mithin erhält

$$\lim \frac{s' - s}{t' - t} \text{ für } t' = t \text{ den Wert } 6t^2,$$

d. h. es ist

$$\lim_{t' = t} \frac{s' - s}{t' - t} = 6t^2. \tag{9}$$

§ 4. Die gleichmäßig und die ungleichmäßig beschleun Bewegung.

Die beiden im vorigen Paragraphen behandelten Beispiele
scheiden sich in einem wesentlichen Punkte voneinander. Im

spiele, in dem wir der Einfachheit halber $g = 10$ annehmen wollen, nach Verlauf von

$$t = 1, 2, 3, 4, \ldots \text{ Sekunden}$$

sich bewegende Körper die Geschwindigkeit von

$$v = 10, 20, 30, 40, \ldots \text{ m/sec}$$

cht; die Geschwindigkeitszunahme ist also während gleicher Zeit- en stets dieselbe und beträgt in jeder Sekunde 10 m/sec.

Im zweiten Beispiele beträgt die Geschwindigkeit am Ende der

1., 2., 3., 4., ... Sekunde

6, 24, 54, 96, ... m/sec;

Geschwindigkeitszunahme während gleicher Zeitteilchen wächst also Sekunde zu Sekunde. Man nennt solche Bewegungen, bei denen die ghwindigkeit von Augenblick zu Augenblick immer größer wird, be- eunigte Bewegungen; wird hingegen die Geschwindigkeit von Augen- zu Augenblick immer kleiner, so nennt man die Bewegung eine ögerte. Ist, wie im 1. Beispiele, die Geschwindigkeitszunahme end jeder Sekunde dieselbe, so heißt die Bewegung eine gleich- ig beschleunigte, ändert sich, wie im 2. Beispiele, die Geschwin- itszunahme von Sekunde zu Sekunde, so nennt man die Bewegung ungleichmäßig beschleunigte, bzw. verzögerte.

§. 5. Die Beschleunigung bei einer ungleichförmigen Bewegung.

1. Die gleichmäßig beschleunigte Bewegung: Bei einer solchen e Geschwindigkeitszunahme während jeder Sekunde stets gleich groß. nennt diese Geschwindigkeitszunahme die Beschleunigung des sich genden Körpers; ist die Bewegung eine gleichmäßig verzögerte, so ie Beschleunigung einen negativen Wert. Somit gelangt man zu nder

1. Definition: Unter der Beschleunigung eines Körpers einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung versteht man Zunahme der Geschwindigkeit während einer Sekunde.

Wir wollen dieser Definition noch eine andere Form geben. Der ewegende Körper befinde sich (vgl. Fig. 1) zur Zeit $t = 0$ wieder unkte A, zur Zeit t im Punkte B und zur Zeit t' im Punkte C; : habe er in B die Geschwindigkeit v m/sec und in C die Geschwin- t v' m/sec erlangt. Dann beträgt die Geschwindigkeitszunahme em Wege BC, d. h. innerhalb des Zeitraumes von $(t' - t)$ Sekunden $- v)$ m/sec, mithin ist, da die Geschwindigkeit in jeder einzelnen Se- um den gleichen Betrag wächst, der Geschwindigkeitszuwachs, d. h. eschleunigung a (acceleratio)

$$a = \frac{v' - v}{t' - t} \text{ m/sec.}$$

Somit ergibt sich die

2. Definition: Unter der Beschleunigung eines Körpers bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung versteht man das Verhältnis der Größe der Geschwindigkeitszunahme zur Dauer der Zeit, während deren diese Geschwindigkeitszunahme erfolgt ist.

Aus beiden Definitionen geht hervor, daß für den freien Fall die Beschleunigung den konstanten Wert von $a = 9{,}8$ m/sec besitzt.

2. Die ungleichmäßig beschleunigte Bewegung: Für eine ungleichmäßig beschleunigte Bewegung, z. B. für die im 2. Beispiele des § 3 behandelte Bewegung nach dem Zeitweggesetze $s = 2t^3$ sind beide Definitionen für die Beschleunigung unbrauchbar; doch läßt sich die zweite Definition derartig erweitern, daß sie auch auf eine solche Bewegung anwendbar ist. Bei einer ungleichmäßig beschleunigten Bewegung auf dem Wege von B bis C ändert sich nicht nur die Geschwindigkeit, sondern auch die Beschleunigung a von Augenblick zu Augenblick. Um den Wert der Beschleunigung in einem bestimmten Augenblicke oder zur Zeit t zu bestimmen, nehmen wir wie oben an, der Körper besitze in B zur Zeit t die Geschwindigkeit v und in C zur Zeit t' die Geschwindigkeit v'. Dann ist wieder der Geschwindigkeitszuwachs während dieser $(t' - t)$ Sekunden oder auf dem Wege BC gleich $(v' - v)$ m/sec. Nähert sich nun der Punkt C immer mehr dem Punkte B, wird also das Zeitintervall von $(t' - t)$ Sekunden immer kleiner, so nähert sich auch der Quotient $\frac{v' - v}{t' - t}$, der bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung einen konstanten Wert besaß, einem von der Zeit t abhängigen Grenzwerte, der die Beschleunigung des Körpers zur Zeit t angibt. Somit können wir folgende Definition aufstellen:

Unter der Beschleunigung eines Körpers bei ungleichmäßig beschleunigter Bewegung zur Zeit t versteht man den Grenzwert

$$a = \lim \frac{v' - v}{t' - t} \text{ für } t' = t \tag{10}$$

oder kürzer:

$$a = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

So ist z. B. für das 2. Beispiel im § 3

$$v = 6t^2 \text{ und } v' = 6t'^2,$$

also

$$\frac{v' - v}{t' - t} = 6 \cdot \frac{t'^2 - t^2}{t' - t} = 6 \cdot \frac{(t' - t)(t' + t)}{t' - t} = 6 \cdot (t' + t),$$

und zwar ist diese Gleichung noch für ganz beliebige Werte von t und t' gültig. Bei dem Grenzübergange, der nur an dem zuletzt erhaltenen Ausdruck vorgenommen werden kann, erhält man:

$$a = \lim_{t' = t} \frac{v' - v}{t' - t} = 12t \text{ m/sec}.$$

§ 6. Der Differentialquotient.

Bei einer ungleichförmigen Bewegung ist nicht nur s, sondern
ch v eine Funktion von t, und im allgemeinen ist auch die Beschleu-
gung a von t abhängig. Für das im vorhergehenden Paragraphen
handelte 2. Zeitweggesetz haben diese Funktionen die Form

$$s = 2t^3, \quad v = 6t^2 \text{ und } a = 12t.$$

ir andere Zeitweggesetze würden diese Funktionen andere Formen be-
en, und wir wollen allgemein für diese Funktionen einstweilen die
ziehungen einführen:

1) $$s = f(t),\ v = \varphi(t) \text{ und } a = \psi(t), \text{ wo}$$

2) $$v = \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} \text{ und } a = \lim \frac{\Delta v}{\Delta t} \text{ für } \Delta t = 0$$

Unter s ist wie bisher (vgl. Fig. 1) die Wegstrecke AB zu verstehen,
der Körper während eines Zeitraums von t Sekunden zurücklegt,
s ist die Wegstrecke BC, Δt die zum Durchlaufen dieser Wegstrecke
rderliche Zeit und Δv die Geschwindigkeitszunahme, die der Körper
m Durchlaufen dieser kleinen Wegstrecke erfährt, d. h. es ist

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$$
$$\Delta v = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)$$

somit

$$\left.\begin{aligned} v &= \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \\ a &= \lim \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} \end{aligned}\right\} \text{ für } \Delta t = 0.$$

Man nennt diese Grenzwerte der Quotienten $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ und $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ die
fferentialquotienten der Funktionen $s = f(t)$ und $v = \varphi(t)$ und
ichnet sie mit

$$v = \frac{ds}{dt} \text{ und } a = \frac{dv}{dt}.$$

Hierbei ist jedoch mit allem Nachdruck darauf hinzuweisen, daß die
hen dt, ds und dv keine selbständige Bedeutung haben, und daß sie
e eigentlichen Größen sind, die einen bestimmten, wenn auch noch
leinen Wert besitzen. Vielmehr sind die Symbole $\frac{ds}{dt}$ und $\frac{dv}{dt}$ nur
abgekürzte Schreibweisen für die Grenzwerte $\lim \frac{\Delta s}{\Delta t}$ und $\lim \frac{\Delta v}{\Delta t}$
$\Delta t = 0$ aufzufassen.

Hiernach können wir für den Differentialquotienten einer beliebigen
ktion $y = f(x)$ folgende Definition aufstellen:

Unter dem Differentialquotienten der Funktion $y = f(x)$
teht man den Grenzwert

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

§ 7. Die Ableitungen einer Funktion.

Von den im vorigen Paragraphen mit $f(t)$, $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ bezeichneten Funktionen von t ist die Funktion $\varphi(t)$ der Differentialquotient der Funktion $f(t)$ und die Funktion $\psi(t)$ der Differentialquotient der Funktion $\varphi(t)$; die Funktion $\psi(t)$ entsteht also aus der Funktion $\varphi(t)$ auf gleiche Weise wie die Funktion $\varphi(t)$ aus der ursprünglichen Funktion $f(t)$. Um die Entstehungsweise der beiden neuen Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ aus der ursprünglichen Funktion $f(t)$ auch durch die Schreibweise kenntlich zu machen, wählt man für die Funktion $\varphi(t)$ auch die Bezeichnung $f'(t)$ [gelesen: f gestrichen t] und für die Funktion $\psi(t)$ die Bezeichnung $\varphi'(t)$ oder $f''(t)$ [gelesen: f zweigestrichen t]. Man nennt diese beiden Funktionen $\varphi(t)$ oder $f'(t)$ und $\psi(t)$ oder $f''(t)$ die **1. bzw. 2. Ableitung der Funktion $f(t)$**. Ist demnach, wenn wir von den Begriffen aus der Mechanik abstrahieren wollen, $y = f(x)$ eine beliebige Funktion von x, so ist die erste Ableitung dieser Funktion, nämlich $f'(x)$ identisch mit dem durch Gleichung (15) definierten Differentialquotienten der Funktion $f(x)$ und die zweite Ableitung $f''(x)$ identisch mit dem Differentialquotienten der Funktion $f'(x)$. Ist z. B.

$$y = f(x) = 2x^3, \tag{1}$$

so ist nach § 6

$$f'(x) = 6x^2 \text{ und } f''(x) = 12x.$$

Nehmen wir ferner an, es sei

$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \tag{2}$$

so wird

$$\begin{aligned} f(x + \triangle x) &= a \cdot (x + \triangle x)^3 + b \cdot (x + \triangle x)^2 + c \cdot (x + \triangle x) + \\ &= (ax^3 + bx^2 + cx + d) + (3ax^2 + 2bx + c) \cdot \triangle x \\ &\quad + (3ax + b) \cdot \overline{\triangle x}^2 + a \cdot \overline{\triangle x}^3, \end{aligned}$$

mithin:

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = (3ax^2 + 2bx + c) + (3ax + b) \cdot \triangle x + a \cdot \overline{\triangle x}^2.$$

Hieraus ergibt sich:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

und ebenso:

$$f''(x) = 6ax + 2b = 2 \cdot (3ax + b).$$

Weitere Beispiele zur Bestimmung der Ableitungen neuer Funktionen ergeben sich in großer Anzahl aus den §§ 11 u. 16.

II. Der Differentialquotient in der Koordinatengeometrie.

§ 8. Die graphische Darstellung von Funktionen.

Ist y eine Funktion von x, für die wir die allgemeine Form $y = f(x)$ annehmen wollen, so entsprechen jedem beliebig angenommenen reellen Werte von x ein oder mehrere ganz bestimmte Werte von y. Zieht man nur solche Werte von x in Betracht, für die auch y einen reellen Wert besitzt, so kann man sich x und y als Koordinaten eines veränderlichen Punktes vorstellen, und alle Punkte, deren Koordinaten der Gleichung $y = f(x)$ Genüge leisten, liegen auf einer gewissen geraden oder krummen Linie. Man sagt, $y = f(x)$ sei die Gleichung dieser Linie.

1. Beispiel: Es sei

$$y = \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{5}{6}x - 2 \text{ oder } 6y = 3x^2 + 5x - 12.$$

Nimmt man für x der Reihe nach die Werte

$$x = 0;\quad 1;\quad 2;\quad 3;\quad 4;\quad \ldots.$$

an, so ergeben sich für y die entsprechenden Werte

$$y = -2;\quad -0{,}67;\quad 1{,}67;\quad 5;\quad 9{,}33;\quad \ldots.$$

Setzt man ferner

$$x = -\tfrac{1}{2};\quad -1;\quad -2;\quad -3;\quad -4;\quad -5;\quad \ldots.,$$

so wird

$$y = -2{,}29;\quad -2{,}33;\quad -1{,}67;\quad 0;\quad 2{,}67;\quad 6{,}33;\ldots..$$

Bestimmt man nun die Lage dieser Punkte (vgl. Fig. 2 der Figurentafel), so erkennt man, daß sie alle auf einer gewissen Kurve liegen, die man erhält, wenn man die einzelnen Punkte durch einen fortlaufenden Linienzug miteinander verbindet. Diese Kurve schneidet offenbar die Abszissenachse in zwei Punkten, von denen bisher nur der eine Punkt mit der Abszisse $x = -3$ bekannt ist; ferner zeigt der bisher erkennbare Verlauf der Kurve, daß diese zwischen den Abszissen $x = -\frac{1}{2}$ und $x = -2$ einen sog. Kulminationspunkt besitzt, d. h. einen Punkt, in dem die Kurve vom Fallen zum Steigen oder umgekehrt übergeht. Um die Lage des zweiten Schnittpunktes der Kurve mit der x-Achse zu bestimmen, setzen wir in der Kurvengleichung $y = 0$; dann erhalten wir die quadratische Gleichung

$$3x^2 + 5x - 12 = 0,$$

deren Wurzeln $x = -3$ und $x = \frac{4}{3}$ sind. Der zweite Schnittpunkt der Kurve mit der Abszissenachse hat also die Abszisse $x = 1{,}33$. Um endlich die Lage des Kulminationspunktes der Kurve zu bestimmen, formen

wir mit Hilfe der quadratischen Ergänzung die Kurvengleichung folgen dermaßen um:

$$6y = 3x^2 + 5x - 12 = 3 \cdot (x^2 + \tfrac{5}{3}x - 4) = 3 \cdot [(x + \tfrac{5}{6})^2 - (\tfrac{13}{6})^2$$

oder

$$y = \tfrac{1}{2} \cdot [(x + \tfrac{5}{6})^2 - (\tfrac{13}{6})^2].$$

Es erhält also y den kleinsten Wert oder y wird ein Minimu für $x = -\tfrac{5}{6} = -0{,}83$, der zugehörige Wert von y ist $y = -\tfrac{169}{72} =$ $-2{,}35$. Mithin hat der Kulminationspunkt der Kurve die Koordinate

$$x = -0{,}83 \text{ und } y = -2{,}35.$$

Nunmehr ist man in der Lage, die Kurve genau zeichnen zu könne man erhält eine Parabel.

2. Beispiel: Es sei

$$10y^2 = 60 + 13x - 5x^2 \quad \text{(vgl. Fig. 3 der Figurentafel).}$$

Man bestimmt zunächst wie in dem vorigen Beispiele die Koord naten einer genügenden Anzahl von Kurvenpunkten. Der eine Schnit punkt der Kurve mit der x-Achse hat die Abszisse $x = 5$, die Abszis des anderen Schnittpunktes erhält man durch Auflösung der quadratisch Gleichung

$$60 + 13x - 5x^2 = 0,$$

und es ergibt sich außer $x = 5$ noch $x = -\tfrac{12}{5} = -2{,}4$. Für al Werte von x, die größer als 5 und kleiner als $-2{,}4$ sind, wird imaginär. Solchen Werten von x entsprechen also keine konstruierbar Kurvenpunkte. Zur Bestimmung der Schnittpunkte der Kurve mit d Ordinatenachse setzt man $x = 0$; dann wird $y = \sqrt{6} = \pm 2{,}45$. En lich ergibt sich die Lage der Kulminationspunkte der Kurve aus d folgenden Umformung der Kurvengleichung:

$$10y^2 = -5 \cdot (x^2 - \tfrac{13}{5}x - 12) = -5 \cdot [(x - \tfrac{13}{10})^2 - (\tfrac{37}{10})^2],$$

also

$$y^2 = \tfrac{1}{2} \cdot [(\tfrac{37}{10})^2 - (x - \tfrac{13}{10})^2].$$

Daher wird y^2 ein Maximum für $x = 1{,}3$, und für diesen Wert v x ist $y = \tfrac{37}{20} \cdot \sqrt{2} = \pm 2{,}62$. Die Kurve ist eine Ellipse.

3. Beispiel: Es sei

$$2y = x^3 - 1{,}9x^2 - 1{,}9x + 1 \text{ (vgl. Fig. 4 der Figurentafel).}$$

Die Bestimmung der Koordinaten einzelner Kurvenpunkte erfol in der bisherigen Weise, indem man der Reihe nach

$$x = \ldots -2;\ -1{,}5;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4; \ldots$$

setzt und die zugehörigen Werte von y berechnet; man erhält

$$y = \ldots -5{,}4;\ -1{,}9;\ 0;\ 0{,}5;\ -0{,}9;\ -1{,}2;\ 2{,}6;\ 13{,}5 \ldots$$

Die Abszissen der Punkte, in denen die Kurve der x-Achse schneid ergeben sich durch Auflösung der reziproken Gleichung

$$x^3 - 1{,}9x^2 - 1{,}9x + 1 = 0$$

er

$$10x^3 - 19x^2 - 19x + 10 = 0,$$

r man auch die Form geben kann:

$$(x + 1) \cdot (10x^2 - 29x + 10) = 0.$$

ie Wurzeln dieser Gleichung sind

$$x_1 = -1;\ x_2 = 2{,}5 \text{ und } x_3 = 0{,}4.$$

Obwohl man aus den bisher bestimmten Kurvenpunkten den Ver- f der Kurve im allgemeinen erkennen kann, ist zur genauen Zeichnung Kurve noch die Bestimmung der Lage ihrer Kulminationspunkte er- derlich. Für das vorliegende Beispiel läßt sich diese Bestimmung t mehr wie in den Beispielen (1) und (2) durch eine einfache Um- mung der Kurvengleichung ausführen. Doch gelangen wir zur Be- mung der Koordinaten dieser Kulminationspunkte auf geometrischem ge, indem wir beachten, daß in diesen Punkten die an die Kurve ge- e Tangente der Abszissenachse parallel sein muß. Wir sind somit vor Aufgabe gestellt, die Gleichung der an die Kurve $y = f(x)$ in einem ebigen Kurvenpunkte gelegten Tangente zu bestimmen. Bevor wir ch an die Lösung dieser allgemeinen Aufgabe herangehen, wollen wir einigen besonders wichtigen Beispielen die einzuschlagende Methode utern.

9. Die Gleichungen der Kreis-, Parabel-, Ellipsen- und Hyperbeltangente.

a) Die Gleichung der Kreistangente.

Es sei

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

llgemeine Kreisgleichung, ξ und η seien die festen Koordinaten eines ebig angenommenen Punktes P auf der Kreislinie; es soll die chung der an den Kreis in diesem Punkte gelegten Tangente auf- llt werden.

Wir nehmen zunächst auf der slinie außer dem Punkte P noch n beliebigen zweiten Punkt P' vgl. Fig. 5) und bezeichnen seine dinaten mit ξ', η'. Dann lautet Gleichung der durch die beiden te P und P' gelegten Sekante

$$y - \eta = \frac{\eta - \eta'}{\xi - \xi'} \cdot (x - \xi);$$

Quotient $\frac{\eta - \eta'}{\xi - \xi'}$ ist die sog. Rich- skonstante der Sekante, d. h.

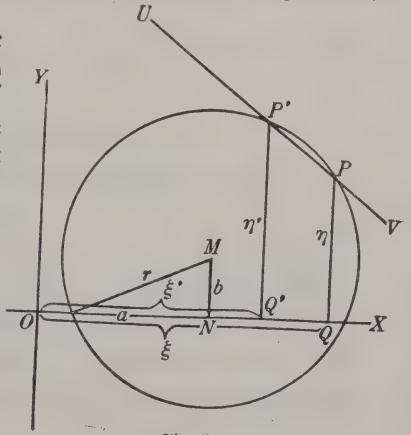


Fig. 5.

die Tangente des Winkels, den die Sekante mit der positiven Richt
der x-Achse bildet. Die Sekante UV geht in die Tangente im Punk
über, wenn sie sich um den fest mit dem Kreise verbundenen Pun
herumdreht, so daß sich der andere Schnittpunkt P' auf der Kreis
immer mehr dem Punkte P nähert und schließlich mit ihm zusam
fällt. Wir werden also aus der Sekantengleichung (2) die Gleichung
Kreistangente im Punkte P erhalten, wenn wir in ihr $\xi' = \xi$ und
zufolge auch $\eta' = \eta$ setzen. Doch *verträgt* geradeso wie in den be
Beispielen des § 3 der Quotient $\frac{\eta - \eta'}{\xi - \xi'}$ noch nicht die Prozedur d
Gleichsetzung, da derselbe dann den völlig unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$ erh
würde. Es läßt sich aber mit Zuhilfenahme der Kreisgleichung der
dieses Quotienten so umformen, daß man an ihm diese Prozedur
nehmen kann. Da nämlich die beiden Punkte P und P' auf der K
linie liegen, so genügen ihre Koordinaten der Kreisgleichung (1),
es ist

$$(\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 = r^2$$

und

$$(\xi' - a)^2 + (\eta' - b)^2 = r^2;$$

durch Subtraktion dieser beiden Gleichungen ergibt sich:

$$(\xi + \xi' - 2a) \cdot (\xi - \xi') + (\eta + \eta' - 2b) \cdot (\eta - \eta') = 0,$$

es ist also

$$\frac{\eta - \eta'}{\xi - \xi'} = -\frac{\xi + \xi' - 2a}{\eta + \eta' - 2b},$$

so daß die Gleichung (2) nunmehr die Form annimmt:

$$y - \eta = -\frac{\xi + \xi' - 2a}{\eta + \eta' - 2b} \cdot (x - \xi). \tag{3}$$

Auch diese Form der Gleichung der Sekante gilt ebenso w
Gleichung (2) für ganz beliebige Wertepaare von ξ, η und ξ', η'
kann man in dieser Gleichung den Grenzübergang $\xi' = \xi$ und η
vollziehen und man erhält so als Gleichung der Kreistangente im Pun

$$y - \eta = -\frac{\xi - a}{\eta - b} \cdot (x - \xi),$$

oder in anderer Form:

$$(\xi - a) \cdot (x - a) + (\eta - b) \cdot (y - b) = r^2. \tag{4}$$

b) Die Gleichung der Parabeltangente.

Die Scheitelgleichung der Parabel sei

$$y^2 = 2px, \tag{5}$$

ferner seien (vgl. Fig. 6) P und P' zwei beliebige Punkte der Para
den Koordinatenpaaren ξ, η und ξ', η'. Dann hat die Gleichung de
die Punkte P und P' gehende Sekante wie vorhin die Form (2).
hier ist der Quotient $\frac{\eta - \eta'}{\xi - \xi'}$ oder $\frac{\eta' - \eta}{\xi' - \xi}$ wieder einer Umform
unterziehen, bevor $\xi' = \xi$ und $\eta' = \eta$ gesetzt wird. Man erhält

$= 2p\xi$ und $\eta'^2 = 2p\xi'$:

$$\frac{\eta' - \eta}{\xi' - \xi} = \frac{2p}{\eta' + \eta};$$

umgeformte Gleichung der
nte lautet somit

$$- \eta = \frac{2p}{\eta' + \eta} \cdot (x - \xi).$$

aus ergibt sich, wenn man
η setzt, als Gleichung der
gente im Punkte P:

$$y - \eta = \frac{p}{\eta} \cdot (x - \xi),$$

nan auch die Form geben

$$\eta y = p \cdot (x + \xi).$$

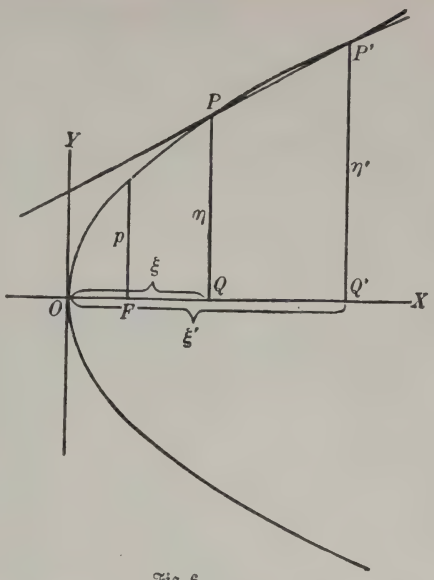


Fig. 6.

) Die Gleichung der
Ellipsentangente.

Es handelt sich im wesentlichen wieder nur darum, den Quotienten
$\frac{\eta'}{\xi'}$ mit Hilfe der Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ne Form zu bringen, die es gestattet, $\xi' = \xi$ und also auch $\eta' = \eta$
en. Nun ist nach (7)

$$b^2\xi^2 + a^2\eta^2 = a^2b^2$$

uch

$$b^2\xi'^2 + a^2\eta'^2 = a^2b^2,$$

$$b^2 \cdot (\xi^2 - \xi'^2) + a^2 \cdot (\eta^2 - \eta'^2) = 0.$$

s ergibt sich:

$$\frac{\eta - \eta'}{\xi - \xi'} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\xi + \xi'}{\eta + \eta'},$$

die umgeformte Sekantengleichung lautet:

$$y - \eta = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\xi + \xi'}{\eta + \eta'} \cdot (x - \xi).$$

ser Gleichung kann man wieder $\xi' = \xi$ und $\eta' = \eta$ setzen und
so die Tangentengleichung:

$$y - \eta = -\frac{b^2\xi}{a^2\eta} \cdot (x - \xi)$$

t einfacherer Gestalt:

$$\frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} = 1.$$

d) Die Gleichung der Hyperbeltangente.

Ist

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{9}$$

die Gleichung der Hyperbel, so erhält man ebenso wie in c) als G chung der Tangente im Hyperbelpunkte ξ, η:

$$\frac{\xi x}{a^2} - \frac{\eta y}{b^2} = 1 . \tag{10}$$

§ 10. Das Tangentenproblem für die Kurve $y = f(x)$.

Es seien ξ und η die Koordinaten eines beliebig angenomme Kurvenpunktes P. Um die Gleichung der in diesem Punkte an die Ku gelegten Tangente PT (vgl. Fig. zu bestimmen, gehen wir von der G chung der Sekante aus, die diesen P mit einem zweiten beliebig angen menen Kurvenpunkte P' verbindet, de Koordinaten mit ξ', η' bezeichnet wer mögen. Die Gleichung dieser Sek UV lautet:

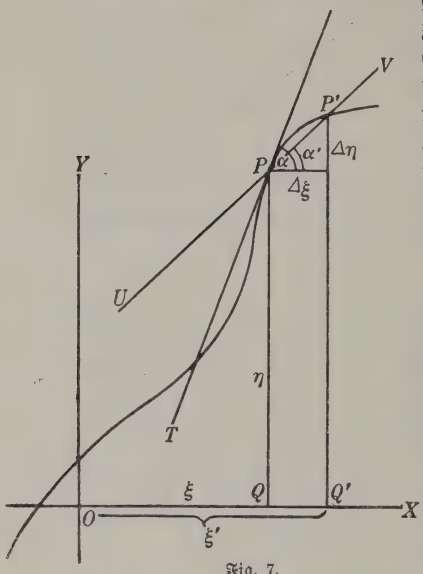


Fig. 7.

$$y - \eta = \frac{\eta' - \eta}{\xi' - \xi} \cdot (x - \xi). \tag{11}$$

Die Sekante UV wird zur T gente PT, wenn wir sie um den mit der Kurve verbundenen Punk herumdrehen, so daß sich der Punkt auf der Kurve immer mehr dem Pu P nähert und schließlich mit ihm sammenfällt. Nehmen wir nun zun an, der Punkt P' befinde sich in mittelbarer Nähe des Punktes P bezeichnen wir wie früher (§ 2) die W von $\xi' - \xi$ und $\eta' - \eta$ mit $\triangle\xi$ $\triangle\eta$, so nimmt die vorige Gleichung der Sekante UV die Form

$$y - \eta = \frac{\triangle\eta}{\triangle\xi} \cdot (x - \xi);$$

hierbei ist der Wert von $\triangle\xi$ zwar klein, doch sonst ganz nach Will anzunehmen, und der zugehörige Wert von $\triangle\eta$ bestimmt sich aus Kurvengleichung $y = f(x)$. Nähert sich nun der Punkt P' auf der K immer mehr dem Pnnkte P, geht also die Sekante UV in die Tang PT über, so nähert sich auch der Quotient $\frac{\triangle\eta}{\triangle\xi}$ immer mehr einem stimmten Grenzwerte, den wir wieder mit $\lim\limits_{\triangle\xi = 0} \frac{\triangle\eta}{\triangle\xi}$ bezeichnen wo Dann lautet die Gleichung der Tangente PT:

$$y - \eta = \lim_{\Delta\xi = 0} \frac{\Delta\eta}{\Delta\xi} \cdot (x - \xi).$$

Die Richtungskonstante der Tangente PT, d. h. die trigonometrische Tangente des Winkels α, den die Kurventangente im Punkte P der positiven Richtung der x-Achse bildet, hat also den Wert

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta\xi = 0} \frac{\Delta\eta}{\Delta\xi} = f'(\xi),$$

die Gleichung der Tangente PT nimmt daher die endgültige Form an:

$$y - \eta = f'(\xi) \cdot (x - \xi).$$

Wie aus den Paragraphen 6 und 7 hervorgeht, erhält man den von $f'(\xi)$ auf folgende Weise: Man bestimmt zunächst den Differenzquotienten oder die erste Abteilung der gegebenen Funktion $y = f(x)$ erhält so eine neue Funktion von x, nämlich $\frac{dy}{dx}$, in der man $x = \xi$ setzen hat.

Beispiel: Es soll die Gleichung der Tangente an die Kurve

$$2y = x^3 - 1{,}9x^2 - 1{,}9x + 1 \text{ (vgl. § 8, 3. Beispiel)}$$

Kurvenpunkte mit der Abszisse $\xi = 2$ aufgestellt werden.
Es ist

$$y = f(x) = \tfrac{1}{2} \cdot (x^3 - 1{,}9x^2 - 1{,}9x + 1),$$

nach § 7

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \tfrac{1}{2} \cdot (3x^2 - 3{,}8x - 1{,}9),$$

$$f'(\xi) = \tfrac{1}{20} \cdot (30\xi^2 - 38\xi - 19).$$

Gleichung der Kurventangente im Punkte ξ, η lautet daher:

$$y - \eta = \tfrac{1}{20} \cdot (30\xi^2 - 38\xi - 19) \cdot (x - \xi)$$

$$20y = (30\xi^2 - 38\xi - 19) \cdot x - (20\xi^3 - 19\xi^2 - 10).$$

Die Richtungskonstante dieser Tangente hat den Wert

$$\operatorname{tg}\alpha = \tfrac{1}{20} \cdot (30\xi^2 - 38\xi - 19).$$

t Kulminationspunkten der Kurve ist $\operatorname{tg}\alpha = 0$, also ergeben sich Abszissen dieser Punkte durch Auflösung der quadratischen Gleichung

$$30\xi^2 - 38\xi - 19 = 0,$$

Wurzeln

$$\xi = \frac{19 + 7\sqrt{19}}{30}, \text{ d. h. } \xi_1 = 1{,}65 \text{ und } \xi_2 = -0{,}38$$

ie zugehörigen Werte von η sind $\eta_1 = -1{,}41$ und $\eta_2 = 0{,}70$. ist nach der Kurvengleichung für $x = 2$, $y = -1{,}2$; also nimmt eichung der Tangente im Kurvenpunkte $\xi = 2$, $\eta = -1{,}2$ die m:

$$20y = 25x - 74 \text{ oder}$$

$$\frac{x}{2{,}96} + \frac{y}{-3{,}7} = 1,$$

d. h. es ist OM oder $m = 2{,}96$ und ON oder $n = -3{,}7$, wo M N die Schnittpunkte der Tangente mit der Abszissen- bzw. Ordina achse bezeichnen. Mit Hilfe der Werte für die Koordinaten der Ku nationspunkte, der im § 8 angegebenen Werte einiger anderen Kur punkte und der Werte von m und n kann man nunmehr eine ge Zeichnung der Kurve und der Tangente anfertigen. (Vgl. Fig. 4).

III. Die Differentialquotienten der einfache Funktionen.

§ 11. Der Differentialquotient algebraischer Funktionen

Es sollen der Reihe nach die Differentialquotienten folge Funktionen ermittelt werden:

(1) $$y = x^n,$$

wo n zunächst als absolute ganze Zahl vorausgesetzt werden m Läßt man x in $x + \triangle x$ übergehen und bezeichnet man den entspre den Zuwachs von y mit $\triangle y$, so wird

$$y + \triangle y + (x + \triangle x)^n,$$

es ist also nach dem binomischen Lehrsatze

$$y + \triangle y = x^n + n \cdot x^{n-1} \cdot \triangle x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^{n-2} \cdot \triangle x^2 + \cdots +$$

mithin

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = n \cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot n^{n-2} \cdot \triangle x + \cdots + \triangle x^{n-1}$$

Es wird also für $\triangle x = 0$

$$\lim \frac{\triangle y}{\triangle x} \text{ oder } \frac{dy}{dx} = n \cdot x^{n-1}.$$

Daß diese Formel auch für negative ganzzahlige und für gebro Werte des Exponenten n gültig bleibt, geht aus den folgenden spielen 2, 4 und 7 hervor.

(2) $$y = \frac{1}{x}.$$

Da $y + \triangle y = \frac{1}{x + \triangle x}$ ist, so wird

$$\triangle y = \frac{1}{x + \triangle x} - \frac{1}{x} = -\frac{\triangle x}{x(x + \triangle x)},$$

also

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = -\frac{1}{x \cdot (x + \triangle x)}.$$

Mithin ergibt sich:

$$\lim \frac{\triangle y}{\triangle x}, \text{ d. h. } \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}.$$

In gleicher Weise erhält man aus

$$y = \frac{1}{x^2}:$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = -\frac{2x + \triangle x}{x^2 \cdot (x + \triangle x)^2}, \text{ also } \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^3},$$

allgemein aus

$$y = \frac{1}{x^n}:$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = -\frac{n \cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^{n-2} \cdot \triangle x + \cdots \cdot \overline{\triangle x}^{n-1}}{x^n (x + x \triangle x)^n},$$

$$\lim \frac{\triangle y}{\triangle x} \text{ oder } \frac{dy}{dx} = -\frac{n}{x^{n+1}}.$$

$$y = ax^2 - bx + c,$$

a, b und c von x unabhängige oder konstante Zahlen bezeichnen. erhält zunächst:

$$y + \triangle y = a \cdot (a + \triangle x)^2 - b \cdot (x + \triangle x) + c$$
$$= (ax^2 - bx + c) + (2ax - b) \cdot \triangle x = a \cdot \overline{\triangle x}^2$$

somit

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = (2ax - b) + a \cdot \triangle x.$$

in wird

$$\lim \frac{\triangle y}{\triangle x} \text{ oder } \frac{dy}{dx} = 2ax - b.$$

ist aber $2ax$ der Differentialquotient von ax^2 und b der Differenuotient von bx. Somit ergeben sich folgende Regeln:

1. Satz: Der Differentialquotient eines Aggregats ist ch dem Aggregat der Differentialquotienten der einzelnen der.

2. Satz: Der Differentialquotient des Produkts aus einem anten Faktor und einer Funktion von x ist gleich dem odukt aus diesem konstanten Faktor und dem Differentialienten der Funktion.

3. Satz: Der Differentialquotient einer Konstanten hat Wert 0.

$$y = \sqrt{x}.$$

Quadriert man beide Seiten, so erhält man:

$$y^2 = x,$$

ieraus folgt, wenn x um $\triangle x$ und y um $\triangle y$ wächst:

$$(y + \triangle y)^2 = x + \triangle x$$

$$y^2 + 2y \cdot \triangle y + \overline{\triangle y}^2 = x + \triangle x;$$

mithin wird

$$2y \cdot \Delta y + \overline{\Delta y}^2 = \Delta x \text{ oder } (2y + \Delta y) \cdot \Delta y = \Delta x$$

und somit

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2y + \Delta y}.$$

Wird nun Δx immer kleiner und schließlich gleich 0, so gilt das auch von Δy; man erhält demnach:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ d. h. } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Ist allgemein

$$y = \sqrt[n]{x}, \tag{7}$$

so ergibt sich in gleicher Weise:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{n \cdot y^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot y^{n-2} \cdot \Delta y + \cdots + \overline{\Delta y}^{n-1}};$$

folglich wird, wenn man wieder $\Delta x = 0$ und daher auch $\Delta y = 0$

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ d. h. } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{n \cdot y^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sqrt[n]{x}}{x}.$$

§ 12. **Der Differentialquotient von Produkten und Quotien**

Es sei

$$y = u \cdot v, \tag{8}$$

wo $u = \varphi(x)$ und $v = \psi(x)$ bekannte Funktionen der unabhäng Veränderlichen x sind.

Läßt man x in $x + \Delta x$ übergehen und nimmt man an, daß dann u in $u + \Delta u$, v in $v + \Delta v$ und schließlich y in $y + \Delta y$ ü geht, so wird

$$\Delta u = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x), \quad \Delta v = \psi(x + \Delta x) - \psi(x),$$

ferner

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) \cdot (v + \Delta v)$$
$$= uv + u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v,$$

mithin

$$\Delta y = u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v;$$

es ist daher

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \Delta x.$$

Setzt man nun $\Delta x = 0$, so ergibt sich hieraus:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ d. h. } \frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}.$$

Es sei ferner

$$y = \frac{u}{v}, \tag{9}$$

wieder $u = \varphi(x)$ und $v = \psi(x)$ bekannte Funktionen von x stellen. Man erhält in derselben Weise wie vorhin:

$$\triangle y = \frac{u + \triangle u}{v + \triangle v} - \frac{u}{v} = \frac{v \triangle u - u \triangle v}{v \cdot (v + \triangle v)}$$

hin:

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{v \cdot \frac{\triangle u}{\triangle x} - u \cdot \frac{\triangle v}{\triangle x}}{v \cdot \left(v + \frac{\triangle v}{\triangle x} \cdot \triangle x\right)}.$$

Geht man nun wieder zur Grenze über, indem man $\triangle x = 0$ t, so entstehen aus den Quotienten $\frac{\triangle u}{\triangle x}$ und $\frac{\triangle v}{\triangle x}$ die Differentialquo- ten $\frac{du}{dx}$ und $\frac{dv}{dx}$, die ganz bestimmte Funktionen von x darstellen, man erhält somit als Wert den gesuchten Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

§ 13. Das Gradmaß und das Bogenmaß eines Winkels.

In der elementaren Mathematik legt man bei der Bestimmung der ße eines Winkels das Gradmaß zugrunde, d. h. man gibt die Größe s Winkel nach Graden und Bruchteilen des Grades an. Man kann aber, wie dies im folgenden stets geschehen soll, bei der Bestimmung Größe eines Winkels noch eines anderen Maßes, des sog. Bogen- ßes bedienen.

Es sei LMN ein beliebiger Winkel l. Fig. 8) und φ die Anzahl der Grade, dieser Winkel mißt, also $\sphericalangle LMN = \varphi^0$. der Winkel in Graden, Minuten und unden angegeben, so hat man die Mi- n und Sekunden in Dezimalteile des ides zu verwandeln; so z. B. ist der Win- $49^0\ 9'\ 17'' = 49^0{,}1547$, also $\varphi = 1547$. Beschreibt man mit einem be- igen Radius r um den Scheitelpunkt M n Kreisbogen, der die Schenkel des Winkels in den Punkten A und chneidet, desgl. mit dem Radius von 1 cm einen Kreisbogen, der die kelschenkel in den Punkten A' und B' schneidet, und bezeichnet man Länge der Kreisbögen von A bis B und von A' bis B' mit $\overset{\frown}{AB}$. $\overset{\frown}{A'B'}$, so verhält sich

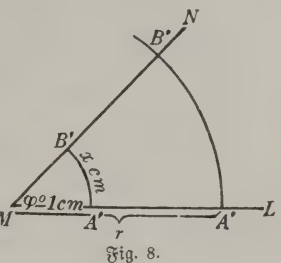


Fig. 8.

$$\overset{\frown}{AB} : MA = \overset{\frown}{A'B'} : MA'.$$

mt man an, daß

$$\overset{\frown}{A'B'} = x\,\text{cm}$$

so hat das Längenverhältnis $\overset{\frown}{A'B'} : MA'$ den Wert x, wo x eine

unbenannte Zahl darstellt, die von der Wahl der Längeneinheit abhängig ist; denn auch das Längenverhältnis $\widehat{AB} : MA$ hat denselben Wert. Durch die unbenannte Zahl x ist die Größe des Winkels LM ebenso eindeutig bestimmt, wie durch die Anzahl der Grade, welche den Winkel mißt. Man nennt diese Zahl x das Bogenmaß des Winkels. Hiernach kann man folgende Definition aufstellen:

Beschreibt man um den Scheitelpunkt eines gegebenen Winkels mit einem **beliebigen** Radius r einen Kreisbogen und bezeichnet man die Länge des zwischen den Schenkeln dieses Winkels liegenden Kreisbogens mit b, so versteht man unter dem Bogenmaße des Winkels diejenige unbenannte Zahl, die den Wert des Verhältnisses $b : r$ angibt.

Es ist nun leicht, vom Gradmaß eines Winkels zum Bogenmaß überzugehen und umgekehrt. Ist der betreffende Winkel nach Graden gleich φ^0, nach Bogenmaß gleich x so ist bekanntlich der zu diesem Zentriwinkel gehörige Bogen eines Kreises mit dem Radius r

$$b = \frac{r\pi\varphi}{180},$$

also

$$x = \frac{b}{r} = \frac{\pi\varphi}{180} = 49{,}1547 : \frac{180}{\pi}.$$

Man erhält somit das Bogenmaß eines in Graden angegebenen Winkels, indem man die Anzahl der Grade durch die Zahl

$$\frac{180}{\pi} = 57{,}29578$$

dividiert. Für das obige Beispiel ergibt sich $x = 0{,}8579$.

Einfacher vollzieht man diese Umformung des Gradmaßes in Bogenmaß, indem man sich der folgenden Tabelle bedient:

$1^0 = 0{,}017453$	$4^0 = 0{,}069813$	$7^0 = 0{,}122173$
$2^0 = 0{,}034907$	$5^0 = 0{,}087266$	$8^0 = 0{,}139626$
$3^0 = 0{,}052360$	$6^0 = 0{,}104720$	$9^0 = 0{,}157080$

Selbstverständlich hat man vorher die Minuten und Sekunden des Winkels in Dezimalteile des Grades zu verwandeln.

§ 14. Die graphische Darstellung der trigonometrischen Funktionen.

Bestimmt man die Größe eines Winkels nach Bogenmaß, so lassen sich die trigonometrischen Funktionen desselben auch graphisch darstellen. Wir behandeln als Beispiel die Funktion $y = \sin x$.

Nach der am Schluß des vorigen Paragraphen angegebenen Tabelle ist für die Winkel

$$0^0;\ 10^0;\ 20^0;\ 30^0;\ 50^0;\ 70^0;\ 90^0;\ 110^0;\ \ldots$$

das Bogenmaß

$x = 0;\ 0{,}17;\ 0{,}35;\ 0{,}52;\ 0{,}87;\ 1{,}22;\ 1{,}57;\ 1{,}92;\ \ldots$

der Wert von $\sin x$ oder

$y = 0;\ 0{,}17;\ 0{,}34;\ 0{,}5;\ 0{,}77;\ 0{,}94;\ 1;\ 0{,}94;\ \ldots$

mmt man die diesen Koordinaten x, y entsprechenden Punkte und ndet sie durch einen fortlaufenden Linienzug, so erhält man die in 9 der Figurentafel dargestellte Sinuskurve. Diese besitzt Kul- tionspunkte für diejenigen Werte von x, die den Winkeln

$$90^0;\quad 270^0;\quad 450^0;\ \ldots$$

rechen, d. h. für

$$x = 1{,}57;\quad 4{,}71;\quad 7{,}85;\ \ldots;$$

lle diese Werte von x ist $y = \pm 1$.

Die Bestimmung des Grenzwertes von $\frac{\sin \triangle x}{\triangle x}$ für $\triangle x = 0$.

Es sei (Fig. 10) LMN oder x ein beliebiger in Bogenmaß drückter spitzer Winkel. Fällt man von beliebigen Punkte B des einen Schenkels das Lot BC auf den anderen Schenkel so ist

$$\sin x = \frac{BC}{MB}.$$

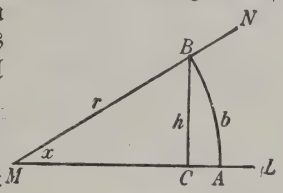


Fig. 10.

eibt man mit dem Radius MB um den M einen Kreisbogen, der den Winkel- l ML im Punkte A schneidet, und bezeichnet man die Länge des s mit r, die des Kreisbogens AB mit b und endlich die des BC mit h, so ist

$$\sin x = \frac{h}{r} = \frac{h}{b} \cdot x,$$

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{h}{b},$$

er Wert des Quotienten $\frac{\sin x}{x}$ stimmt für jede beliebige e des nach Bogenmaß gemessenen Winkels x mit dem e des Längenquotienten $\frac{h}{b}$ überein. Also ist dies auch der wenn die unbenannte Zahl x einen sehr kleinen Wert annimmt. nnet man einen solchen sehr kleinen, im übrigen aber willkürlichen von x mit $\triangle x$ und die entsprechenden Längen von b und h mit nd $\triangle h$, so wird

$$\frac{\sin \triangle x}{\triangle x} = \frac{\triangle h}{\triangle b}.$$

Nun ergibt sich aber aus der unmittelbaren Anschauung, daß sich notient $\frac{\triangle h}{\triangle b}$ für einen sehr kleinen Wert von $\triangle x$ immer mehr dem verte 1 nähert, also ist auch

(10) $$\lim_{\Delta x=0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Zu demselben Ergebnis führt auch die graphische Darstellun
Funktion $\sin x$.

§ 16. Der Differentialquotient der trigonometrischen Funkti

Es sei

(11) $$y = \sin x.$$

Ist x ein beliebiger, in Bogenmaß angegebener Winkel un
zeichnet Δx einen beliebig kleinen Zuwachs von x, Δy den en
chenden Zuwachs von y, so ist

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x), \text{ also}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}.$$

Nach der Formel

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2 \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

nimmt dieser Quotient die Form an:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \cdot \frac{\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Nähert sich nun Δx und somit auch $\frac{\Delta x}{2}$ immer mehr der
so nähert sich nach dem vorigen Paragraphen der Quotient $\sin\frac{\Delta x}{2}$
immer mehr dem Grenzwerte 1, während der andere Faktor $\cos\left(x+$
in $\cos x$ übergeht, es wird also

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ d. h. } \frac{dy}{dx} = \cos x.$$

(12) $$y = \cos x.$$

In derselben Weise wie vorhin erhält man:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}.$$

Da nun

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

ist, so wird

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -2 \cdot \frac{\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = -\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin\frac{\Delta}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

und somit

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ d. h. } \frac{dy}{dx} = -\sin x.$$

$$y = \operatorname{tg} x.$$

Da $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ist, so besitzt diese Funktion die Form

$$\operatorname{tg} x = \frac{u}{v} \text{ wo } u = \sin x \text{ und } v = \cos x \text{ ist.}$$

ist aber nach (11) und (12)

$$\frac{du}{dx} = \cos x \text{ und } \frac{dv}{dx} = -\sin x,$$

wird nach § 12, Nr. (9)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$y = \operatorname{ctg} x.$$

Es ist $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Setzt man $u = \cos x$ und $v = \sin x$, so er- man auf gleiche Weise wie in Nr. (13)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

§ 17. Umkehrungsformeln.

In dem vorhergehenden Paragraphen war eine Funktion $y = f(x)$ en und es wurde gezeigt, wie ihr Differentialquotient bestimmt Auch dieser ist im allgemeinen wieder eine Funktion von x, die nit $\frac{dy}{dx} = \varphi(x)$ bezeichnen wollen. In den Anwendungen kommt auch oft der umgekehrte Fall vor, daß der Differentialquotient einer annten Funktion $f(x)$, also die Funktion $\varphi(x)$ gegeben ist, und es lt sich darum, aus dieser Funktion $\varphi(x)$ eine andere Funktion $f(x)$ stimmen, deren Differentialquotient gleich $\varphi(x)$ ist.

Es seien $f(x)$ und $F(x)$ zwei Funktionen, die denselben Differen- otienten $\varphi(x)$ besitzen; dann ist

$$\frac{df(x)}{dx} = \varphi(x) \text{ und } \frac{dF(x)}{dx} = \varphi(x), \text{ also}$$

$$\frac{d[f(x) - F(x)]}{dx} = 0.$$

Da somit der Differentialquotient der Funktion $f(x) - F(x)$ für Werte von x gleich 0 ist, so ist nach dem 3. Satze im § 11 diese ion eine Konstante. Bezeichnen wir die letztere mit K, so ergibt sich

$$f(x) = F(x) + \mathfrak{K},$$

d. h. in Worten:

4. Satz: Ist $F(x)$ irgendeine Funktion, deren Differ tialquotient gleich $\varphi(x)$ ist, so hat jede andere Funktion f die für jeden Wert von x denselben Differentialquotien besitzt, die Form

$$f(x) = F(x) + \mathfrak{K}.$$

Aus den in den Paragraphen 11 und 16 ermittelten Werten Differentialquotienten der einfachsten Funktionen ergeben sich dem folgende wichtige Umkehrungsformeln:

Hat der Differentialquotient einer Funktion $y = f(x)$ den Wer

(1) $\frac{dy}{dx} = c$, so hat die Funktion $f(x)$ die Form $f(x) = c \cdot x + \mathfrak{K}$

(2) $\frac{dy}{dx} = cx$, „ „ „ „ „ „ „ $f(x) = \frac{c}{2} \cdot x^2 + \mathfrak{K}$

(3) $\frac{dy}{dx} = x^n$, „ „ „ „ „ „ „ $f(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathfrak{K}$

(4) $\frac{dy}{dx} = \sqrt[n]{x}$, „ „ „ „ „ „ „ $f(x) = \frac{n}{n+1} \cdot x\sqrt[n]{x} +$

(5) $\frac{dy}{dx} = \cos x$, „ „ „ „ „ „ „ $f(x) = \sin x + \mathfrak{K}$

(6) $\frac{dy}{dx} = \sin x$, „ „ „ „ „ „ „ $f(x) = -\cos x +$

IV. Anwendungen auf die Mechanik.

§ 18. Der freie Fall.

Die Bewegung beim freien Fall eines Körpers ist eine gleichmä beschleunigte, und zwar hat erfahrungsgemäß die Beschleunigung konstanten Wert $g = 9{,}8$. Es ist also

$$\frac{dv}{dt} = g \tag{1}$$

und somit nach § 17, Nr. (1)

$$v = g \cdot t + C,$$

wo C eine Konstante bezeichnet. Nehmen wir an, daß die Anfan geschwindigkeit des Körpers gleich 0 sei, so ergibt sich aus der le Gleichung für C der Wert 0, d. h. es ist

$$v = g \cdot t. \tag{2}$$

Da wir dieser Gleichung auch die Form geben können:

$$\frac{ds}{dt} = g \cdot t,$$

so folgt aus ihr nach § 17, Nr. (2), daß

$$s = \tfrac{1}{2} g t^2 + C'$$

o C' eine neue Konstante bezeichnet. Rechnen wir den vom Körper laufenen Weg von dem Zeitpunkte an, wo $t = 0$ ist, so wird für) auch $s = 0$; somit hat auch die Konstante C' den Wert 0 und ird

$$s = \tfrac{1}{2} g t^2.$$

leichungen (2) und (3) stellen die beiden Galileischen Fallgesetze dar.

§ 19. Die harmonische Bewegung.

Beim freien Fall bewegt sich der Körper oder der diesen darstellende ielle Punkt auf einer geraden Linie, und zwar hat in jedem Punkte urückgelegten Weges die Beschleunigung des materiellen Punktes konstanten Wert.

Unter einer harmonischen Bewegung versteht man einen Bengsvorgang, bei dem ein materieller Punkt P sich ebenfalls auf geraden Linie $X'X$ bewegt, aber in der Weise, daß er auf dieser en fortwährend hin und her schwingt, und daß seine Beschleuni in einer beliebigen Lage P dem Abstande dieses Punktes von einem Punkte O, der Gleichgewichtslage des mate- n Punktes, proportional ist. Bezeichnet man bstand des beweglichen Punktes P von festen Punkte O mit s (vgl. Fig. 11),

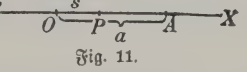


Fig. 11.

die harmonische Bewegung durch die Gleichung charakterisiert:

$$\frac{dv}{dt} = \pm k^2 s,$$

^{2} eine positive Konstante bezeichnet. Da die Beschleunigung für ende Werte von s immer kleiner, für abnehmende Werte von s hin größer wird, so haben wir das negative Vorzeichen zu wählen, so daß

$$\frac{dv}{dt} = -k^2 s$$

owohl s als auch v sind Funktionen von t, also besteht unsere Aufdarin, die Zeitweggleichung für die harmonische Bewegung zu eln, d. h. s als Funktion von t darzustellen.

Nun ist

$$v = \frac{ds}{dt},$$

n Verbindung mit (4)

$$v \cdot \frac{dv}{dt} = -k^2 s \cdot \frac{ds}{dt},$$

nach § 11, Nr. (1)

$$\tfrac{1}{2} \cdot \frac{d(v^2)}{dt} = -\tfrac{1}{2} k^2 \frac{d(s^2)}{dt} \quad \text{oder} \quad \frac{d(v^2)}{dt} = -k^2 \cdot \frac{d(s^2)}{dt}.$$

mit die beiden Funktionen v^2 und $-k^2 s^2$ denselben Differentialnten besitzen, so ist nach dem 4. Lehrsatze im § 17

(5) $$v^2 = -k^2 s^2 + c^2,$$

wo die neue Konstante offenbar einen positiven Wert haben muß; deshalb mit c^2 bezeichnet worden ist.

Da $v = \frac{ds}{dt}$ ist, so läßt sich die Gleichung (5) auch in der Form schreiben:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = c^2 - k^2 s^2$$

oder

(6) $$\frac{ds}{dt} = k \cdot \sqrt{\frac{c^2}{k^2} - s^2},$$

und es handelt sich nur noch darum, diejenige Funktion von t zu bestimmen, die dieser Gleichung Genüge leistet.

Nun ist offenbar s eine periodische Funktion von t, und außerdem geht aus Gleichung (6) hervor, daß der absolute Wert von s stets kleiner als der des konstanten Quotienten $\frac{c}{k}$ ist. Wir können daher

$$\text{entweder } s = \frac{c}{k} \cdot \sin\varphi \quad \text{oder } s = \frac{c}{k} \cdot \cos\varphi$$

setzen, und es bleibt uns dann nur noch übrig, φ als Funktion von t zu bestimmen. Setzen wir etwa

(7) $$s = \frac{c}{k} \cdot \cos\varphi,$$

so nimmt die Gleichung (6) die Form an:

$$-\frac{c}{k} \sin\varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \pm c \cdot \sin\varphi,$$

und somit ist

$$\frac{d\varphi}{dt} = \pm k.$$

Folglich besitzt nach § 17 Nr. (1) die noch zu bestimmende Funktion die Form

$$\varphi = \pm (kt + C),$$

so daß die Gleichung (7) übergeht in

(8) $$s = \frac{c}{k} \cdot \cos(kt + C),$$

wo c und C noch zu bestimmende Konstanten sind.

Die Bestimmung dieser Konstanten geschieht auf folgende Weise:

Der materielle Punkt P schwingt in geradliniger Bahn um die Gleichgewichtslage O hin und her. Wir nehmen an, daß er zu Anfang der Bewegung die größte Entfernung a von O besitzt, daß also zur Zeit $t = 0$ $s = a$ ist. Dann ergibt sich aus Gleichung (8):

$$s = \frac{c}{k} \cdot \cos C \quad \text{oder} \quad \frac{c}{k} = \frac{a}{\cos C},$$

mithin wird

$$a = \frac{a}{\cos C} \cdot \cos(kt + C),$$

ır noch die Konstante C zu bestimmen ist. Zu dem Zwecke ziehen ie Geschwindigkeit des materiellen Punktes in Betracht. Aus Glei- (9) erhält man:

$$v = \frac{ds}{dt} = -\frac{ak}{\cos C} \cdot \sin(kt + C).$$

ist für $t = 0$ auch $v = 0$, also muß

$$\sin C = 0, \text{ d. h. } C = n\pi$$

vo n eine beliebige positive oder negative ganze Zahl mit Ein- von 0 ist. Demnach wird

$$\cos C = \pm 1, \quad \cos(kt + C) = \pm \cos kt$$

ie Gleichung (9) erhält nunmehr die einfachere Form:

$$s = \pm a \cdot \cos kt.$$

Jetzt ist es noch in unser Belieben gestellt, anzunehmen, ob sich der elle Punkt zur Zeit $t = 0$ auf der rechten oder auf der linken der Gleichgewichtslage befindet. Nehmen wir das erstere an, so s positive Vorzeichen und man erhält somit schließlich:

$$\boldsymbol{s = a \cdot \cos kt}$$

s Zeitweggesetz für die harmonische Bewegung.

§ 20. Die Pendelbewegung.

lußer den beiden bisher untersuchten freien Bewegungsvorgängen wir noch eine gezwungene Bewegung betrachten, d. h. eine bei der der materielle Punkt genötigt ist, eine vorgeschriebene zu beschreiben. Bewegt sich ein nur der Schwerkraft unterworfener ller Punkt P auf einem Kreisbogen, so von einem festen Punkte O, dem Mittel- des Kreises, immer dieselbe Entfernung l besitzt (vgl. Fig. 12), so führt er eine endelbewegung aus. C sei die Gleich- slage, A und B seien die äußersten auf beiden Seiten von C, die der ma- Punkt bei der Bewegung annimmt. recke $OP = l$ heißt die Pendellänge, A und P auf die Strecke OC gefällten D und PE mögen mit a bzw. s, die AOC und POC mit α bzw. φ be- werden Die auf den materiellen P wirkende Kraft hat die Größe mg vertikal nach unten gerichtet. Zerlegt ese Kraft in zwei Komponenten PF und on denen die erste in der Verlängerung

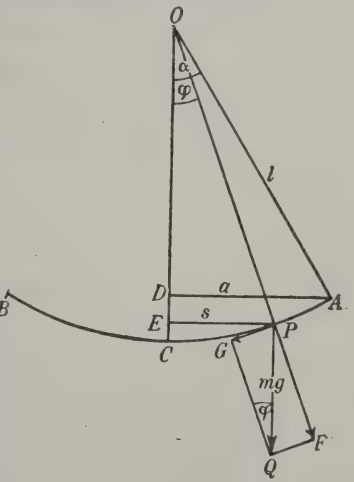


Fig. 12.

von OP, die zweite in der Richtung der Tangente des Kreisbog liegt, so wird die Bewegung des Pendels nur durch diese zweite K ponente bewirkt, die den Wert besitzt:

$$PG = mg \cdot \sin\varphi = \frac{mg}{l} \cdot s;$$

die Beschleunigung des materiellen Punktes P in der Richtung der T gente ist daher gleich $\frac{g}{l} \cdot s$.

Für beliebig große Werte des Ausschlagswinkels α läßt sich Zeitweggesetz bei der Pendelbewegung nur mit Hilfe der höheren Ma matik bestimmen. Bei der praktischen Benutzung des Pendels kom jedoch nur so kleine Ausschlagswinkel in Betracht, daß der Bogen als geradlinige Strecke angesehen werden kann, und es ist daher ger so wie bei der harmonischen Bewegung die Beschleunigung des m riellen Punktes P zur Zeit t:

$$\frac{dv}{dt} = -k^2 s, \quad \text{wo } k = \sqrt{\frac{g}{l}} \text{ ist.}$$

Wie im vorigen Paragraphen ergibt sich hieraus für die Pendelbewe das Zeitweggesetz:

$$s = a \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right), \tag{11}$$

wobei angenommen ist, daß der materielle Punkt P zur Zeit $t = 0$ in A befindet und den größten Abstand a von der Gleichgewichts auf der rechten Seite besitzt.

Da für $\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t = \pi$, d. h. für $t = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$ $s = -a$ wird, der materielle Punkt P nach Verlauf von $\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$ Sekunden na gelangt, und hat seinen größten Abstand α von der Gleichgewichts auf der linken Seite erreicht. Somit beträgt die Zeit, die der mate Punkt P braucht, um den Weg AB zurückzulegen, $\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$ Sekun oder mit anderen Worten:

Die Dauer einer einfachen Pendelschwingung hat den W

$$T = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \text{ Sekunden.} \tag{12}$$

V. Maxima und Minima.

§ 21. Die Bestimmung der extremen Werte einer Funktio

Die Funktion $y = f(x)$ besitzt für den Wert $x = x_0$ ein Maxi oder ein Minimum oder kurz einen extremen Wert $y_0 = f(x_0)$, w sowohl für $x = x_0 + \varepsilon$ als auch für $x = x_0 - \varepsilon$ $f(x)$ entweder gr oder kleiner ist als $f(x_0)$, wo ε eine beliebig kleine absolute Zahl bezeic

Wert $x_0 = f(x_0)$ ist ein **Maximum**, wenn sowohl $f(x_0 + \varepsilon)$ als $f(x_0 - \varepsilon)$ kleiner ist als $f(x_0)$, hingegen ein **Minimum**, wenn dieser beiden Werte größer ist als $f(x_0)$. Stellt man die Funktion $f(x)$ graphisch durch eine Kurve dar, so entspricht einem extremen der Funktion ein Kulminationspunkt der Kurve, in welchem diese der vom Steigen zum Fallen (Maximum) oder vom Fallen zum en (Minimum) übergeht. Nach § 10 sind die Abszissen der Kulionspunkte die Wurzeln der Gleichung

$$f'(x) = 0;$$

ch besteht der

Satz: Eine Funktion $y = f(x)$ kann nur für solche Werte nabhängig Veränderlichen x einen extremen Wert be, für welche die erste Abteilung $f'(x) = 0$ ist.

Es sei z. B.

$$y = f(x) = \tfrac{1}{100} \cdot (3x^4 - 8x^3 - 66x^2 + 144x - 50),$$

$$100y = 3x^4 - 8x^3 - 66x^2 + 144x - 50.$$

urve, die dieser Gleichung entspricht, ist in Fig. 13 der Figurenurch die voll ausgezogene Linie dargestellt. Nach § 11 ist nun

$$f'(x) = \tfrac{3}{25} \cdot (x^3 - 2x^2 - 11x + 12);$$

halten also diejenigen Werte von x, für die $f'(x) = 0$ ist, indem ch die Funktion

$$y' = \tfrac{3}{25} \cdot (x^3 - 2x^2 - 11x + 12)$$

ch durch eine Kurve darstellen und die Punkte bestimmen, in diese Kurve die x-Achse schneidet. In der Figur ist diese Kurve, kurz als die y'-Kurve bezeichnen wollen, als eine gestrichelte ezeichnet; sie schneidet die x-Achse in den Punkten

$$x_1 = -3, \quad x_2 = 1 \quad \text{und} \quad x_3 = 4$$

zugehörigen Werte von y sind

$$y_1 = -6{,}17, \quad y_2 = 0{,}23 \quad \text{und} \quad y_3 = -2{,}74.$$

unkte P_1, P_2 und P_3, deren Koordinaten diese Werte besitzen, daher die Kulminationspunkte der y-Kurve dar, oder mit anderen

:

ie Funktion $y = f(x)$ besitzt für $x = x_1$, x_2 und x_3 die en Werte y_1, y_2 und y_3.

as Kriterium für das Vorhandensein eines Maximums oder Minimums.

ist noch zu entscheiden, ob für die der Gleichung $f'(x) = 0$ gen Werte von x die Funktion $y = f(x)$ ein Maximum oder ein m besitzt. Sind $x = \xi$ und $y = \eta$ die Koordinaten eines bePunktes der y-Kurve, so wird nach Gleichung (13) in § 10

der Winkel α, den die in diesem Punkte an die Kurve gelegte Tange mit der positiven Richtung der x-Achse bildet, durch die Gleichung

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(\xi)$$

bestimmt. Dieser Winkel ist ein spitzer, solange $f'(\xi)$ positiv, stumpfer, solange $f'(\xi)$ negativ ist, oder mit anderen Worten:

Die y-Kurve steigt für wachsende Werte von x, solan die y'-Kurve oberhalb, sie fällt, solange die y'-Kurve unte halb der Abszissenachse verläuft. Die Funktion $y = f(x)$ be für diejenigen Werte $x = \xi$ ein Maximum, für welche die y'-Ku die x-Achse fallend, ein Minimum, wenn sie dieselbe steige schneidet.

Um ferner zu entscheiden, ob für einen solchen Wert $x = \xi$ erste oder zweite Fall eintritt, ziehen wir noch die zweite Ableitung Funktion $y = f(x)$, nämlich

$$y'' = f''(x) = \tfrac{3}{25} \cdot (3x^2 - 4x - 11)$$

in Betracht. Die dieser Funktion entsprechenden Kurve, die y''-Kur ist in der Figur durch eine strichpunktierte Linie dargestellt. Da Funktion $y'' = f''(x)$ aus der Funktion $y' = f'(x)$ in derselben W hervorgeht, wie die Funktion $y' = f'(x)$ aus der ursprünglichen Funkt $y = f(x)$, so steigt die y'-Kurve für wachsende Werte von solange die y''-Kurve unterhalb der Abszissenachse verläu Die y'-Kurve schneidet daher die x-Achse fallend, wenn in die Schnittpunkte $x = \xi$ $f''(\xi)$ negativ ist, steigend, wenn $f''(\xi)$ posi ist. Somit sind wir zu folgendem Ergebnis gelangt:

Lehrsatz: Die Funktion $y = f(x)$ besitzt einen extrem Wert für diejenigen Werte ξ von x, die der Gleichung $f'(\xi) =$ Genüge leisten. Dieser extreme Wert ist ein Maximum, we $f''(\xi)$ negativ, hingegen ein Minimum, wenn $f''(\xi)$ positiv

Der besondere Fall, daß für eine der Wurzeln der Gleich $f'(\xi) = 0$ und gleichzeitig $f''(\xi) = 0$ ist, wird im folgenden Paragrap erörtert werden.

Für das im vorigen Paragraphen behandelte Beispiel hat ξ ei der Werte

$$x_1 = -3, \quad x_2 = 1 \quad \text{und} \quad x_3 = 4;$$

da die zugehörigen Werte von $y'' = f''(\xi)$

$$y_1'' = 3{,}36, \quad y_2'' = -1{,}44 \quad \text{und} \quad y_3'' = 2{,}52$$

sind, so besitzt die Funktion $y = f(x)$ für $x = x_2$ ein Maximum, gegen für $x = x_1$ und $x = x_3$ Minima, was auch durch die Figur stätigt wird. Gleichzeitig ist aus der Figur ersichtlich, daß die Beg „Maximum" und „Minimum" relativ aufzufassen sind und sich auf den Verlauf der Kurve in der unmittelbaren Nähe der Kulminatio punkte beziehen. So ist in dem obigen Beispiele das für $x = x_2$ tretende Maximum erheblich kleiner als die absoluten Werte der $x = x_1$ und $x = x_2$ vorhandenen Minima.

§ 23. Die Wendepunkte einer Kurve.

Wir wollen noch als zweites Beispiel die Funktion

$$y = f(x) = \tfrac{1}{100} \cdot (3x^4 - 4x^3 - 48x^2 + 144x - 25)$$

$$100y = 3x^4 - 4x^3 - 48x^2 + 144x - 25$$

chen und zunächst ihre extremen Werte bestimmen. Diese ergeben ch Auflösung der Gleichung

$$y' \text{ oder } f'(x) = \tfrac{3}{25} \cdot (x^3 - x^2 - 8x + 12) = 0.$$

n Gleichungen $y = f(x)$ und $y' = f'(x)$ entsprechenden Kurven Fig. 14 der Figurentafel durch die voll ausgezogene und ie gestrichelte Linie dargestellt. Aus der Zeichnung der y'-Kurve man, daß diese die x-Achse im Punkte $x = -3$ schneidet und im $x = 2$ berührt; es sind also $x_1 = -3$ und $x_1 = 2$ Wurzeln ichung $f'(x) = 0$, so daß man der Funktion $y' = f'(x)$ auch die eben kann

$$y' = \tfrac{3}{25} \cdot (x - 2)^2 \cdot (x + 3).$$

n zu untersuchen, ob für diese Wurzelwerte x_1 und x_2 ein Maxi- der ein Minimum der Funktion $y = f(x)$ eintritt, haben wir Funktion

$$y'' = f''(x) = \tfrac{3}{25} \cdot (3x^2 - 2x - 8)$$

acht zu ziehen. Die Funktion $y = f(x)$ besitzt für $x = x_1$ oder ein Maximum oder ein Minimum, wenn für den betreffenden n x die zweite Ableitung $f''(x)$ einen negativen bzw. positiven hält. Nun ist für $x = x_1$ $y'' = 3$, also tritt für diesen Wert von inimum der Funktion $y = f(x)$ ein, das den Wert $y_1 = -5{,}38$ hingegen ist für $x = x_2$ $y'' = 0$, so daß die Funktion $y = f(x)$ n Wert von x überhaupt keinen extremen Wert besitzt; vielmehr auch aus der Figur hervorgeht, die y-Kurve in der Umgebung unktes stetig im Steigen (oder im Fallen) begriffen. Man nennt chen Punkt einen **Wendepunkt** der Kurve.

P ein Kulminationspunkt der Kurve $y = f(x)$ und sind P' und dem Punkte P benachbarte Kurvenpunkte zu beiden Seiten des P, so ist die Kurventangente in P der x-Achse parallel, und die en in P' und P'' liegen auf derselben Seite der Kurve. Ist hin- ein Wendepunkt der Kurve, so liegen die Tangenten in den unkten P' und P'' auf verschiedenen Seiten der Kurve oder die ngente im Punkte P geht, während dieser Punkt den Wende- erschreitet, von der einen Seite der Kurve auf die andere Seite an nennt daher die Tangente im Punkte P eine **Wendetan-** er Kurve. Wir sind somit zu folgender Erweiterung des im Paragraphen aufgestellten Lehrsatzes gelangt:

rsatz: Die Funktion $y = f(x)$ besitzt für diejenigen on x, für welche $f'(x) = 0$ ist, einen extremen Wert; Wert ist ein **Maximum**, wenn für ihn $f''(x)$ negativ, ein **n**, wenn für ihn $f''(x)$ positiv ist. Ist aber für einen

solchen Wert von x auch gleichzeitig $f''(x) = 0$, so ist w
ein Maximum noch ein Minimum der Funktion $y = f(x)$
handen, und für die Kurve $y = f(x)$ ist ein solcher Punkt
Wendepunkt.

Die Abszissen der Wendepunkte einer Kurve sind die Wurzel
Gleichung $f''(x) = 0$. Wenn für einen solchen Wert von x auch g
zeitig $f'(x) = 0$ ist, so ist die Wendetangente der x-Achse parallel;
aber für einen Wert von x, der der Gleichung $f''(x) = 0$ ge
$f'(x) \gtrless 0$ ist, so ist die Wendetangente gegen die x-Achse geneigt.
Wendepunkt der ersten Art besitzt die in Fig. 14 dargestellte Kurv
$x = 2$, $y = 0{,}87$, einen Wendepunkt der zweiten Art für $x =$
$y = -2{,}83$; die in Fig. 13 dargestellte Kurve besitzt nur Wendep
der zweiten Art, und zwar für $x = 2{,}694$, $y = -1{,}395$ un
$x = -1{,}361$, $y = -3{,}378$.

VI. Das Integral.

§ 24. Die Berechnung des Flächeninhalts eines Parabelsegm

Die Gleichung einer Parabel sei

$$y = m \cdot x^2, \tag{1}$$

wo $m = \frac{1}{2p}$ ist, wenn p den halben Parameter der Parabel bezei
Der Scheitelpunkt der Parabel (vgl. Fig. 15) sei O und A sei ei
liebiger Punkt der Parabel, dessen Abszisse OB mit a und dessen
nate AB mit b bezeichnet werden möge. Wir stellen uns die Au
den Inhalt der von dem Parabelbogen OA, der Abszisse OB un
Ordinate AB begrenzten Fläche, den wir mit F bezeichnen wolle
berechnen.

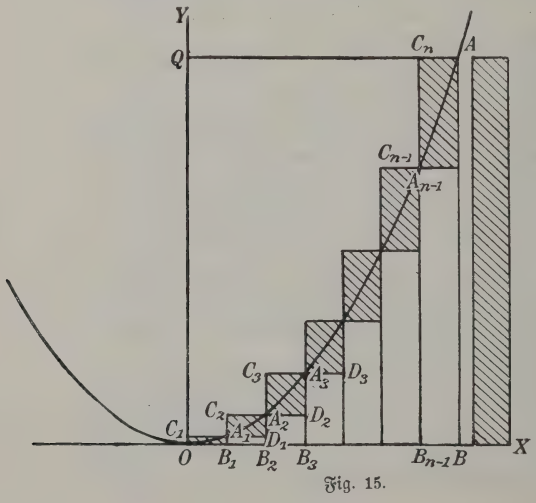


Fig. 15.

Wir teilen die Abszis
in n gleiche Teile, wo
beliebige absolute ganze
bedeutet (in der Figur ist
angenommen worden), u
richten auf der x-Achse
Teilpunkten B_1, B_2, B
B_{n-1} Lote, welche die P
in den Punkten A_1, A_2,
A_{n-1} schneiden mögen.
ziehen wir durch diese
zur x-Achse Parallelen,
die beiderseits benachbarte
bzw. ihre Verlängerung
den Punkten C_1 und D
und D_2, ... C_{n-1} und
schneiden. Auf diese Wei

zwei Gruppen von Rechtecken: die $(n-1)$ Rechtecke der ersten
e, nämlich

$$A_1B_1B_2D_1,\ A_2B_2B_3D_2,\ \ldots\ A_{n-1}B_{n-1}BD_{n-1}$$

er Fläche ABO einbeschrieben, die n Rechtecke der zweiten
e, nämlich

$$A_1B_1OC_1,\ A_2B_2B_1C_2,\ \ldots\ ABB_{n-1}C_n$$

ieser Fläche umbeschrieben. Der Inhalt der Fläche ABO ist
r größer als die Summe der Flächeninhalte der Rechtecke der
Gruppe, aber kleiner als die der zweiten Gruppe. Bezeichnen wir
en $n$ten Teil der Strecke OB, d. h. jede der n Teilstrecken OB_1,
B_2B_3, ... $B_{n-1}B$ mit $\triangle x$, so daß

$$\triangle x = \frac{a}{n}$$

sind die Abszissen der Punkte

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots\ A_{n-1},\ A$$

eich

$$\triangle x,\ 2\cdot\triangle x,\ 3\cdot\triangle x,\ \ldots\ (n-1)\cdot\triangle x,\ n\cdot\triangle x = a;$$

n haben die Ordinaten dieser Punkte bzw. die Werte

$$(\triangle x)^2,\ 4m\cdot(\triangle x)^2,\ 9m\cdot(\triangle x)^2,\ \ldots\ (n-1)^2\cdot m\cdot(\triangle x)^2,$$
$$n^2\cdot m\cdot(\triangle x)^2 = ma^2.$$

ie Flächeninhalte der $(n-1)$ einbeschriebenen Rechtecke sind da-
Reihe nach

$$(\triangle x)^3,\ 4m\cdot(\triangle x)^3,\ 9m\cdot(\triangle x)^3,\ \ldots\ (n-1)^2m\cdot(\triangle x)^3$$

der n umbeschriebenen Rechtecke

$$\cdot(\triangle x)^3,\ 4m\cdot(\triangle x)^3,\ 9m\cdot(\triangle x)^3,\ \ldots\ n^2m\cdot(\triangle x)^3;$$

ist die Summe der Flächeninhalte aller einbeschriebenen Recht-
ch

$$\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2\right)\cdot m\cdot(\triangle x)^3$$

$$\frac{-1\,(2n-1)}{6}\cdot m\cdot(\triangle x)^3 = \frac{m}{6}\cdot n^3\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2-\frac{1}{n}\right)\cdot(\triangle x)^3$$
$$= \frac{m}{6}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2-\frac{1}{n}\right)\cdot a^3$$

Summe der Flächeninhalte aller umbeschriebenen Rechtecke gleich

$$\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)\cdot m\cdot(\triangle x)^3$$

$$\frac{-1)\,(2n+1)}{6}\cdot m\cdot(\triangle x)^3 = \frac{m}{6}\cdot n^3\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)\cdot(\triangle x)^3$$
$$= \frac{m}{6}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)\cdot a^3.$$

ite Summe ist um den Betrag

$$n^2 m \cdot (\triangle x)^3 = m a^2 \cdot \triangle x = b \cdot \triangle x$$

größer als die erste Summe, was auch unmittelbar aus der Figur vorgeht. Läßt man nun die absolute ganze Zahl n über alle Gre wachsen oder nähert sich $\triangle x$ immer mehr dem Grenzwerte 0, so n sich der Unterschied der obigen beiden Summen ebenfalls immer dem Grenzwerte 0, und beide Summen ergeben für den Inhalt Fläche ABO den gemeinsamen Wert

$$F = \frac{m}{3} \cdot a^3 = \frac{ab}{3}.$$

Fällt man von A aus auf die Ordinatenachse das Lot AQ, f gibt sich hieraus für den Flächeninhalt des Parabelsegments AO Wert $\frac{2}{3} ab$.

§ 25. Allgemeine Darstellung des Inhalts der von ein beliebigen Kurve begrenzten Fläche.

Es sei

$$y = f(x) \tag{1}$$

die Gleichung einer beliebig gestalteten Kurve in bezug auf ein winkliges Koordina stem mit dem Anfangsp O; A_0 und A seien zwei Punkte der Kurve Fig. 16), die Koordi von A_0 mögen mit y_0, die von A mit y bezeichnet werden handelt sich darum Inhalt der von der $A_0 A$, den Ordinaten y und der Abszisse begrenzten Fläche AB zu bestimmen, wo B_0 die Fußpunkte de den Punkten A und die Abszissenachse ge Lote bezeichnen. Der fachheit halber wolle

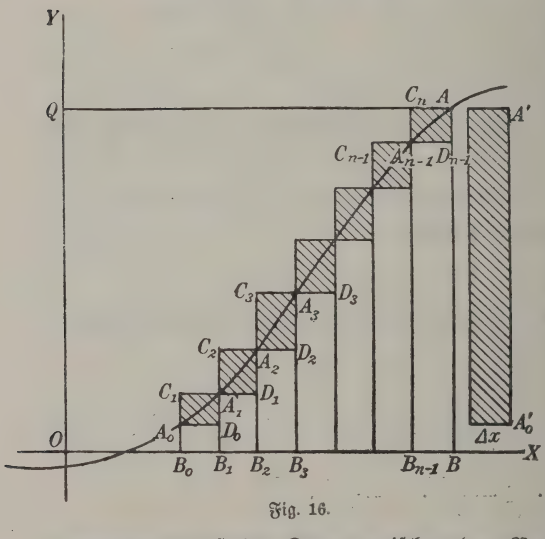


Fig. 16.

annehmen, daß die Kurve zwischen den Punkten A_0 und A ob der Abszissenachse liegt und daß sie für wachsende Werte von x in Steigen begriffen ist.

Wir teilen nun wieder die Strecke $B_0 B$ in n gleiche Teile, jeden wir mit $\triangle x$ bezeichnen; die Teilpunkte seien B_1, B_2, B_3 B_{n-1}. Ferner errichten wir in diesen Punkten auf der Abszisse Lote, nennen die Schnittpunkte dieser Lote mit der Kurve A_1, A A_{n-1} und ziehen durch diese Punkte zur Abszissenachse die Para

he die benachbarten Lote bzw. deren Verlängerungen in den Punkten
nd D_1, C_2 und D_2, ... C_{n-1} und D_{n-1} schneiden mögen; endlich
$_0$ der Schnittpunkt der durch A_0 zur x-Achse gezogenen Parallele
der Ordinate des Punktes A_1. Auf diese Weise wird das Flächen-
A_0B_0BA wieder in zwei Summen von Rechtecken eingeschlossen,
ie Summe der n einbeschriebenen Rechtecke

$$_0B_0B_1D_0,\ A_1B_1B_2D_1,\ A_2B_2B_3D_2,\ \ldots\ A_{n-1}B_{n-1}BD_{n-1}$$

in die der n umbeschriebenen Rechtecke

$$A_1B_1B_0C_1,\ A_2B_2B_1C_2,\ A_3B_3B_2C_3,\ \ldots\ ABB_{n-1}C_n,$$

wir wollen zunächst die Flächeninhalte dieser Rechtecke und ihre
men berechnen.
Bezeichnen wir die Abszissen der Punkte

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots\ A_{n-1}$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_{x-1},$$

ben die Flächeninhalte der einbeschriebenen Rechtecke der Reihe nach
Werte

$$f(x_0)\cdot\triangle x,\ f(x_1)\cdot\triangle x,\ f(x_2)\cdot\triangle x,\ \ldots\ f(x_{n-1})\cdot\triangle x$$

ie der umbeschriebenen Rechtecke die Werte

$$f(x_1)\cdot\triangle x,\ f(x_2)\cdot\triangle x,\ f(x_3)\cdot\triangle x,\ \ldots\ f(x)\cdot\triangle x.$$

chnen wir ferner die Summen der Flächeninhalte aller einbeschrie-
und aller umbeschriebenen Rechtecke mit F' bzw. F'', so ist

$$F' = [f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}]\cdot\triangle x$$

$$F'' = [f(x_1) + f(_2) + f(x_3) + \cdots + f(x)]\cdot\triangle x.$$

Der Unterschied bei der Summe ist gleich

$$[f(x) - f(x_0)]\cdot\triangle x \text{ oder gleich } (AB - A_0B_0)\cdot\triangle x,$$

gleich der Summe der in der Figur schraffierten kleinen Rechtecke
dem daneben gezeichneten Rechtecke, dessen lange Seite $A'A'_0 =$
$- A_0B_0$ und dessen kurze Seite gleich $\triangle x$ ist. Läßt man nun die
te ganze Zahl n immer größer werden, nähert sich also die Strecke
mmer mehr dem Grenzwerte 0, so nähert sich auch der Flächen-
dieses Rechtecks immer mehr der Grenze 0, da die Maßzahl der
e $A'A'_0$ einen bestimmten Wert besitzt. Beide Flächensummen F'
$''$ nähern sich also für $\lim\triangle x = 0$ demselben Grenzwerte F, dem
te der Fläche A_0B_0BA. Die obigen Ausdrücke für F' und F''
t einander gleich, wenn man zu dem ersten noch das Glied $f(x)\cdot\triangle x$
das Rechteck $ABB_{n-1}C_n$ und zu dem zweiten noch das Glied
$\triangle x$ oder das Rechteck $A_0B_0B_1D_0$ hinzufügt. Da sich die Flächen-
dieser beiden Rechtecke mit $\triangle x$ der Grenze 0 nähern, so ergibt
r den Inhalt F des Flächenstückes A_0B_0BA der Wert

$$F = \lim_{\Delta x = 0} [f(x_0) \cdot \Delta x + f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + \ldots + f(x) \cdot \Delta$$

wofür man unter Benutzung eines Summenzeichens die kürzere Bezeichnungsweise

$$F = \lim_{\Delta x = 0} \sum_{x_0}^{x} f(x) \cdot \Delta x \tag{2}$$

eingeführt hat.

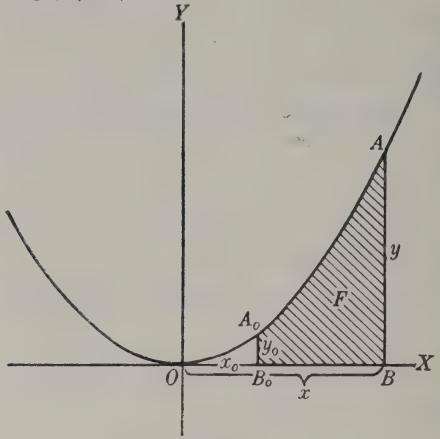


Fig. 17.

Beispiel: Es soll Inhalt der von der Parabel $y = mx^2$, den Ordinaten zwischen beliebigen Kurvenpunkte A und der Abszissenachse grenzten Fläche berechnet werden. (Vgl. Fig. 17.)

Die Koordinaten der den Kurvenpunkte A_0 und seien x_0, y_0 und x, y, und werde $x > x_0$ angenommen. In dem Ausdruck (2) haben statt der allgemeinen Funktion $f(x)$ die besondere Funktion mx^2 und für x der Reihe nach die Werte

$$x_0,\ x_1 = x_0 + \Delta x,\ x_2 = x_0 + 2 \cdot \Delta x,\ \ldots .\ x = x_0 + n \cdot \Delta$$

zu setzen. Es wird dann

$$F = \lim_{\Delta x = 0} \sum_{x_0}^{x} m x^2 \cdot \Delta x$$

$$= \lim_{\Delta x = 0} m \cdot (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x^2) \cdot \Delta x$$

$$= \lim_{\Delta x = 0} m \cdot [x_0^2 + (x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + 2 \cdot \Delta x)^2 + \cdots + (x_0 + n \cdot \Delta x)^2] \cdot$$

wo in der eckigen Klammer $(n + 1)$ Summanden stehen. Nach wiederholter Anwendung der Formel für $(a + b)^2$ ergibt sich:

$$F = m \cdot \lim_{\Delta x = 0} [(n + 1) x_0^2 \cdot \Delta x + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + n) x_0 \cdot$$
$$+ (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \cdot \Delta$$

$$= m \cdot \lim_{\Delta x = 0} \left[(n+1) x_0^2 \cdot \Delta x + 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} x_0 \cdot \overline{\Delta x}^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \cdot \right.$$

$$= m \cdot \lim_{\Delta x = 0} \left[(n+1) x_0^2 \cdot \Delta x + \left(1 + \frac{1}{n}\right) x_0 \cdot (n \Delta x)^2 + \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right.\right.$$

oder da $n \cdot \Delta x = x - x_0$ ist

$$m \cdot \lim_{\Delta x=0} \Big[x_0^2 \cdot \Delta x + x_0^2 \cdot (x - x_0) + \Big(1 + \frac{1}{n}\Big) x_0 \cdot (x - x_0)^2 + \frac{1}{6}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)\Big(2 + \frac{1}{n}\Big) \cdot (x - x_0)^3 \Big].$$

Dieser Ausdruck gestattet es, den Grenzübergang zu vollziehen; man in ihm sowohl Δx als auch $\frac{1}{n}$ gleich 0, so erhält man:

$$F = m \cdot [x_0^2 \cdot (x - x_0) + x_0 \cdot (x - x_0)^2 + \tfrac{1}{3} \cdot (x - x_0)^3]$$

$$= \frac{m}{3} (x - x_0) \cdot [3 x_0^2 + 3 x_0 (x - x_0) + (x - x_0)^2]$$

$$= \frac{m}{3} (x - x_0) \cdot (x^2 + x\, x_0 + x_0^2),$$

$$F = \frac{m}{3} \cdot (x^3 - x_0^3),$$

ert, der auch durch eine einfache geometrische Betrachtung aus dem rigen Paragraphen gewonnenen Ergebnis abgeleitet werden kann.

§ 26. Das Integral.

Ebenso wie früher für den Grenzwert $\lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ die neue Bezeichweise $\frac{dy}{dx}$ und der Name „Differentialquotient" eingeführt wurde, man für den aus einer Summe hervorgegangenen Grenzwert

$\lim_{\Delta=0} \sum_{x_0}^{x} f(x)\, \Delta x$ die kürzere Bezeichnungsweise $\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx$

ührt, wo das Zeichen $\int$ ein langgestrecktes Summenzeichen S darMan nennt diesen Ausdruck das Integral der Funktion $f(x)$ n den Grenzen x_0 und x. Nach § 25 bedeutet das Wort „Intenichts anderes als den Grenzwert der „Gesamtheit" einer Anon Flächenstücken von der Breite Δx für $\lim \Delta x = 0$.

uch hier ist wie im § 6 nachdrücklich darauf hinzuweisen, daß der

uck $\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx$ nur ein Symbol für den obigen Grenzwert darbenso wie das Zeichen $\frac{dy}{dx}$ nur eine abgekürzte Schreibweise für $\frac{y}{x}$ ist. Der Faktor bzw. der Divisor dx hat weder in der ibweise des Integrals noch in der des Differentialenten eine selbständige Bedeutung.

assen wir das Ergebnis dieses und des vorhergehenden Para- kurz zusammen, so gelangen wir für das Integral zu folgender

1. Definition: Unter dem Integral einer gegebenen Fu
tion $y = f(x)$ zwischen den Grenzen x_0 und x, das

in ausführlicher Schreibweise mit $\lim_{\Delta x=0} \sum_{x_0}^{x} f(x)\,dx$

„ abgekürzter „ „ $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$

bezeichnet wird, versteht man den Grenzwert der Summe
$f(x_0)\cdot\Delta x + f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x + f(x_0+2\cdot\Delta x)\cdot\Delta x + \cdots + f(x)\cdot$
wo $x = x_0 + n\cdot\Delta x$ ist, für $\lim \Delta x = 0$ und für einen über
Grenzen wachsenden Wert der absoluten ganzen Zahl n.

Der Wert dieses Integrals wird geometrisch durch
Inhalt der von der Kurve $y = f(x)$, den zu den Abszisse
und x gehörigen Ordinaten y_0 und y und der Abszissena
begrenzten Fläche dargestellt.

§ 27. Zusammenhang zwischen dem Differentialquotienten dem Integral.

Das in den Paragraphen 25 und 26 dargestellte Verfahren,
Inhalt der von einer Kurve, den Ordinaten zweier beliebiger Kur
punkte und der Abszissenachse begren
Fläche oder, was auf dasselbe hin
kommt, das Integral einer gegeb
Funktion zwischen vorgeschrieb
Grenzen zu berechnen, ist nur in
nigen Fällen auf ebenso einfache W
wie in dem im § 25 behandelten
spiele ausführbar. Ein anderer
zur Lösung dieser Aufgabe und
mit eine zweite Definition und
viel einfachere Berechnung des I
grals ergibt sich aus dem Zusam
hange zwischen dem Differential
tienten und dem Integral.

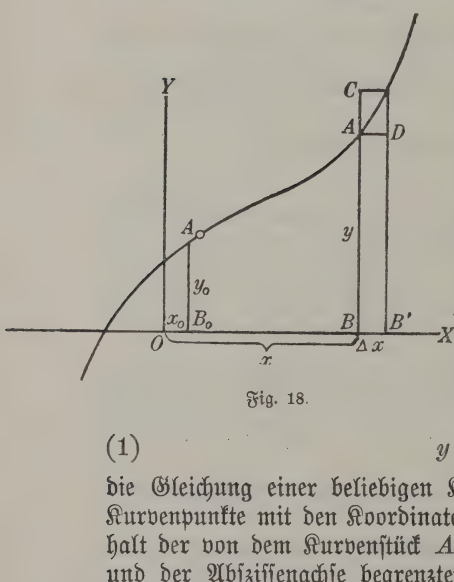


Fig. 18.

Es sei (vgl. Fig. 18)

(1) $$y = f(x)$$

die Gleichung einer beliebigen Kurve, A_0 und A seien zwei belie
Kurvenpunkte mit den Koordinaten x_0, y_0 und x, y und F sei der
halt der von dem Kurvenstück $A_0 A$, den beiden Ordinaten $A_0 B_0$,
und der Abszissenachse begrenzten Fläche $A_0 B_0 B A$. Wir wollen
Maßzahl der Abszisse x_0 als eine beliebig angenommene Zahl, die
Abszisse x als eine veränderliche Zahl ansehen, die alle mögli
reellen Werte annehmen kann; dann ist F eine Funktion von x, die
mit $\varphi(x)$ bezeichnen wollen und die für $x = x_0$ den Wert 0 be

men wir der Einfachheit halber an, daß der in Betracht kommende der Kurve oberhalb der Abszissenachse liegt und daß die Kurve für sende Werte von x in stetem Steigen begriffen ist, so wird auch der t der Funktion $\varphi(x)$ für zunehmende Werte von x immer größer. stellen uns nun die Aufgabe, den Wert des Differentialquotienten Funktion $F = \varphi(x)$ für einen beliebigen Wert von x zu bestimmen. Geben wir der Abszisse $OB = x$ einen beliebigen kleinen Zuwachs $= \triangle x$, so wird auch der Flächeninhalt F einen kleinen Zuwachs lten, der in der Figur durch den schmalen Flächenstreifen $ABB'A'$ estellt wird und den wir mit $\triangle F$ bezeichnen wollen. Da nun das enstück

$$A_0 B_0 BA = \varphi(x)$$

$$A_0 B_0 B'A' = \varphi(x + \triangle x)$$

o ist das Flächenstück $ABB'A'$, d. h.

$$\triangle F = \varphi(x + \triangle x) - \varphi(x).$$

Die Größe dieses Flächenstückes ist zwischen die beiden Rechtecke $B'D$ und $CBB'A'$ eingeschlossen, von denen das erste den Flächen- t $f(x) \cdot \triangle x$ und das zweite den Inhalt $f(x + \triangle x) \cdot \triangle x$ besitzt. esteht daher unter der oben gemachten Annahme, daß y mit wach- n Werten von x ebenfalls immer größer wird, die Ungleichheit

$$f(x) \cdot \triangle x < \triangle F < f(x + \triangle x) \cdot \triangle x$$

somit

$$f(x) < \frac{\triangle F}{\triangle x} < f(x + \triangle x).$$

Für $\lim \triangle x = 0$ nehmen beide Größen, zwischen die der Quotient eingeschlossen ist, den gemeinsamen Wert $f(x)$ an, es ist also

$$\lim_{\triangle x = 0} \frac{\triangle F}{\triangle x} = f(x) \text{ oder } \frac{dF}{dx} = f(x),$$

in Worten:

Der Differentialquotient der Funktion $F = \varphi(x)$, die Inhalt des von der Ordinate y_0 bis zur Ordinate y rei- den Flächenstückes F angibt, ist gleich der Funktion $y = f(x)$ gleich der zur Abszisse x gehörigen Ordinate der Kurve.

Nach der ersten Definition wird der Wert des Integrals $\int_x^{x_0} f(x)\,dx$ metrisch durch diese Fläche F, analytisch also durch die Funktion dargestellt, und die Aufgabe, den Wert dieses Integrals zu be- en, kommt nunmehr darauf hinaus, diejenige Funktion $\varphi(x)$ zu be- nen, deren Differentialquotient gleich $f(x)$ ist, und die für $x = x_0$ Wert 0 besitzt, oder mit anderen Worten:

ist $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = F = \varphi(x)$, so ist $\frac{dF}{dx} = f(x)$ und $\varphi(x_0) = 0$.

t erhalten wir für den Begriff des Integrals die folgende

2. Definition: Unter dem Integral einer gegebenen Fun
tion $y = f(x)$ zwischen den Grenzen x_0 und x, das mit $\int_{x_0}^{x} f(x)$
bezeichnet wird, versteht man diejenige Funktion $\varphi(x)$, der
Differentialquotient gleich $f(x)$ ist und die für $x = x_0$ d
Wert 0 besitzt.

Hieraus geht hervor, daß das Integrieren oder die Aufgab
das Integral einer gegebenen Funktion zu bestimmen, eine Umkehru
des Differentiierens ist, genau in demselben Sinne, wie man
Subtraktion als Umkehrung der Addition, die Division als Umkehru
der Multiplikation und das Radizieren und Logarithmieren als Umke
rungen des Potenzierens bezeichnet.

§ 28. Das bestimmte und das unbestimmte Integral.

Die Aufgabe, das Integral einer gegebenen Funktion $f(x)$ zwisch
zwei gegebenen Grenzen x_0 und x zu berechnen, zerfällt nach der zweite
Definition des Integrals in zwei Teile. Da es nämlich, wie sogleich
gezeigt werden soll, unzählig viele Funktionen $\varphi(x)$ gibt, deren Diff
rentialquotient gleich $f(x)$ ist, so haben wir

1. die Gesamtheit dieser Funktionen zu bestimmen und
2. aus dieser Gesamtheit diejenige Funktion $\varphi(x)$ auszuwähle
die für $x = x_0$ den Wert 0 besitzt.

Es seien $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ irgend zwei Funktionen von x, die de
selben Differentialquotienten besitzen, dann ist nach § 17

$$\psi(x) = \varphi(x) + \mathfrak{K},$$

wo $\mathfrak{K}$ eine beliebige Konstante, d. h. einen ganz willkürlichen, von x u
abhängigen Wert bezeichnet.

Ist also insbesondere $\varphi(x)$ diejenige Funktion, deren Differentia
quotient gleich der gegebenen Funktion $f(x)$ ist und die für $x = x_0$ d
Wert 0 besitzt, so hat die Gesamtheit aller Funktionen $\psi(x)$, der
Differentialquotient ebenfalls gleich $f(x)$ ist, die Form

$$\psi(x) = \varphi(x) + \mathfrak{K}.$$

Man nennt die Funktion $\psi(x)$ das unbestimmte Integral d
Funktion $f(x)$ und die Funktion $\varphi(x)$ das bestimmte Integral dies
Funktion zwischen den Grenzen x_0 und x; das erste Integral wird m
$\int f(x)\,dx$ und das zweite wie bisher mit $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ bezeichnet.

Somit können wir die obige zweite Definition des Integrals fo
gendermaßen ergänzen:

3. Definition: Unter dem unbestimmten Integral $\int f(x) d$
versteht man irgendeine mit einer willkürlichen additive
Konstante, der sog. Integrationskonstante, versehene Funk

$\psi(x)$, deren Differentialquotient gleich $f(x)$ ist; unter bestimmten Integral $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ diejenige Funktion $\varphi(x)$, n Differentialquotient ebenfalls gleich $f(x)$ ist, die aber $x = x_0$ den Wert 0 besitzt. Der Wert des bestimmten Inte- s ergibt sich aus dem des unbestimmten Integrals mit e der Gleichung

$$\varphi(x) = \psi(x) - \psi(x_0).$$

§ 29. Integralformeln.

Die Werte der unbestimmten Integrale der einfachsten Funktionen en sich aus den Umkehrungsformeln im § 17. Hiernach ist, wenn c gegebene Konstante, $\mathfrak{K}$ die beliebige Integrationskonstante bezeichnet:

$$\int c \cdot dx = cx + \mathfrak{K}$$

$$\int cx \cdot dx = \frac{c}{2} x^2 + \mathfrak{K}$$

$$\int cx^n \cdot dx = \frac{c}{n+1} \cdot x^{n+1} + \mathfrak{K}$$

$$\int \sqrt[n]{x} \cdot dx = \frac{n}{n+1} \cdot x \sqrt[n]{x} + \mathfrak{K}$$

$$\int \cos x \cdot dx = \sin x + \mathfrak{K}$$

$$\int \sin x \cdot dx = -\cos x + \mathfrak{K}.$$

Bezeichnet man irgendeine der unter dem Integralzeichen stehenden ionen mit $f(x)$, die entsprechende Funktion auf der rechten Seite, och eine willkürliche additive Konstante enthält, mit $\psi(x)$, so ergibt er Wert eines bestimmten Integrals von der Form (1) bis (6) en den Grenzen x_0 und x aus der Gleichung

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \psi(x) - \psi(x_0).$$

§ 30. Beispiele.

Nehmen wir zum Schluß zunächst das im § 25 behandelte Beispiel r auf, so werden wir noch deutlicher als bisher erkennen, einen wie us großen Vorteil die Zurückführung des ursprünglichen Integral- fs auf den des Differentialquotienten gewährt.

1. Beispiel: Es soll der Inhalt der von der Parabel x^2, den Ordinaten zweier beliebigen Kurvenpunkte A_0, A der Abszissenachse begrenzten Fläche berechnet werden. Fig. 17.)

Der gesuchte Flächeninhalt $F = \varphi(x)$ ist gleich dem Werte des b
stimmten Integrals

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^{x} m x^2 \cdot dx.$$

Das unbestimmte Integral $\psi(x) = \int m x^2 \cdot dx$ hat nach der I
tegralformel (3) im § 29 den Wert $\frac{m}{3} x^3 + \mathfrak{K}$, also hat das bestimm
Integral $\varphi(x)$ den Wert $\psi(x) - \psi(x_0)$, d. h. es ist

$$F = \frac{m}{3} \cdot (x^3 - x_0^3).$$

2. Beispiel: Eine Kurve ist durch die Gleichung

$$10y = 12x + x^2 - x^3$$

gegeben. Man soll die Kurve zeichnen und den Inhalt de
Fläche berechnen, die von der Kurve und der Abszissenach
begrenzt wird und die sich vom Koordinatenanfangspunk
bis zu der zur Abszisse $x = 3$ gehörigen Ordinate erstreckt.

Aus der Zeichnung der Kurve (vgl. Fig. 19 der Figurentafel) ge
hervor, daß das zu berechnende schraffierte Flächenstück oberhalb d
Abszissenachse liegt. Die Koordinaten der zu einer genauen Zeichnun
erforderlichen Kulminationspunkte der Kurve sind nach § 10 zu b
stimmen und besitzen die Werte

$$x = \frac{1 + \sqrt{37}}{3},$$

d. h. $x_1 = 2{,}36$; $y_1 = 2{,}07$; $x_2 = -1{,}69$; $y_2 = -1{,}26$.

Endlich ist der gesuchte Flächeninhalt

$$F = \int_0^3 f(x)\,dx, \text{ wo } f(x) = \tfrac{1}{10} \cdot (12x + x^2 - x^3)$$

ist. Das unbestimmte Integral

$$\psi(x) = \int f(x)\,dx$$

hat nach den Integralformeln (2) und (3) im § 29 den Wert

$$\tfrac{1}{10} \cdot \left(6x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) + \mathfrak{K} = \frac{x^2}{120} \cdot (72 + 4x - 3x^2) + \mathfrak{K};$$

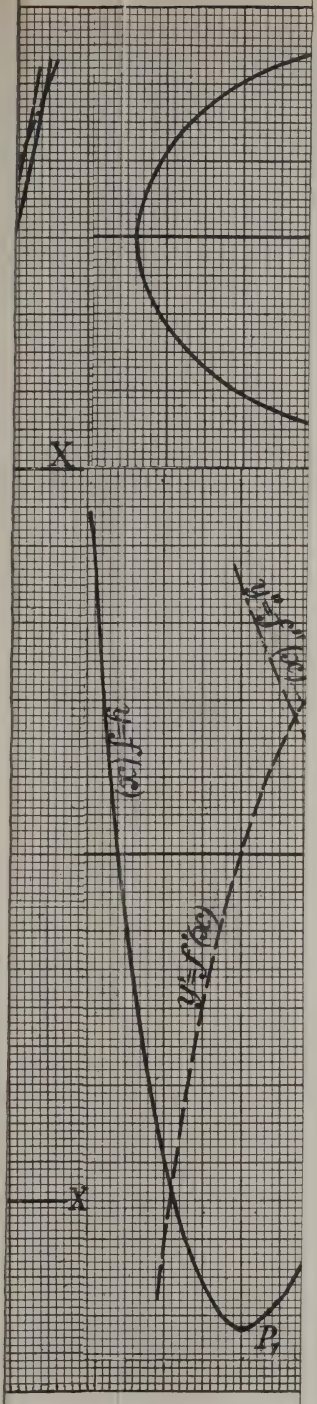
mithin ist das bestimmte Integral

$$\int_0^x f(x)\,dx = \frac{x^2}{120} \cdot (72 + 4x - 3x^2)$$

und insbesondere

$$F = \int_0^3 f(x)\,dx = \tfrac{171}{40} = 4{,}275,$$

ein Wert, der durch die Figur mit großer Genauigkeit bestätigt wird



eine elementare Einleitung in die Di

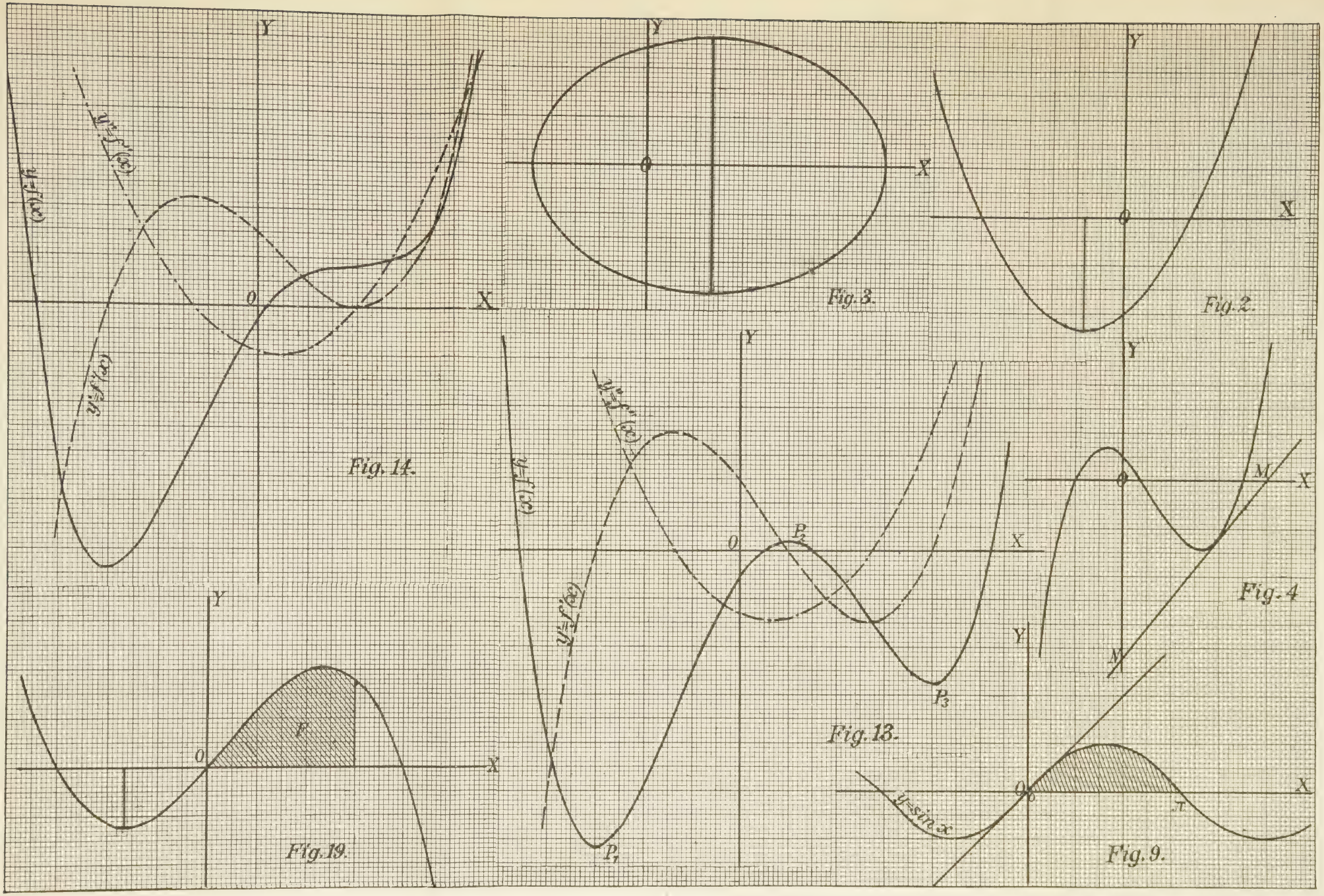


Fig. 14.

Fig. 3.

Fig. 2.

Fig. 4

Fig. 13.

Fig. 19.

Fig. 9.

Jahresbericht

über das

Großherzogliche

Karl Friedrichs-Gymnasium

zu Eisenach

von Ostern 1854 bis Ostern 1855

erstattet

von

dem Direktor

Dr. Karl Hermann Funkhänel,

Großherzoglich Sächs. Hofrath.

Voran steht

eine Abhandlung des Professor Dr. Fresenius:

Zur Einführung in die Differentialrechnung.

Eisenach, 1855.

Gedruckt in der privilegirten Buchdruckerei daselbst.

Aber darum, daß das Verfahren in solchen Fällen irgend einmal abgebrochen werden mußte, ohne daß man zum genauen Ziel gekommen war, hielten wir diese Rechnungen nicht für fruchtlos. Im Gegentheil schätzten wir bei praktischen Aufgaben ein solches unvollkommenes Resultat einem vollkommenen gleich, wenn wir nur überzeugt sein konnten, daß das noch Fehlende ein sehr kleines Bruchtheilchen unseres Maßes betrug, und eine Methode, welche bei jeder neuen Rechnungswiederholung nur dem Ziele näher kam, konnte uns eine, die es wirklich erreicht hätte, ganz gut ersetzen. Denn wir brauchten ja nur das Verfahren so lange fortzusetzen, bis das Fehlende für unsern Zweck unbedeutend genug geworden war.

Aehnliche Fälle wie die genannten häuften sich später so, daß wir ein eigenes algebraisches Zeichen, das des sogenannten Unendlichen, ∞, gerechtfertigt fanden.

Z. B. die Summe aller Glieder einer Differenzenreihe ersten Grads wird bekanntlich gefunden, indem man die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der halben Anzahl der Glieder multiplicirt. So war für die Reihe der natürlichen Zahlen von 1 bis n die Summe $= (1+n)\frac{n}{2}$.

Wird hierin n sehr groß, so wird man das in der Parenthese dazukommende 1 wenig mehr daneben bemerken, oder wenn es fehlte, vermissen. Die Algebra sagt daher, die Summe von ∞ Gliedern dieser Reihe sei $= \infty \cdot \frac{\infty}{2} = \frac{\infty^2}{2}$. Das 1 ist dabei unterschlagen. ∞ heißt aber weder irgend eine große Zahl, denn dann wäre das Resultat unrichtig, noch eine endlose Zahl, denn die läßt sich nicht denken; sondern es liegt dem Zeichen ∞ die Bedeutung: Je größer die Zahl angenommen wird, desto näher kommt die Gleichung der Wahrheit, hier z. B. die Summe der Glieder dem halben Quadrat ihrer Anzahl. Bei der Berechnung der Kreisperipherie fanden wir, daß der Umfang des Kreises mit um so größerer Genauigkeit durch den Umfang eines regulären Sehnen- oder Tangentenvielecks ersetzt werden konnte, je mehr Seiten das Vieleck hatte.

Wir könnten also kurz sagen, der Kreis sei ein Vieleck von ∞ Seiten. Dieß heißt aber weder: von sehr vielen, noch von unzähligen Seiten. ∞ ist also ein Abkürzungszeichen, welches überall da angewandt werden kann, wo es sich um ein je mehr, desto mehr handelt.

Noch ein passendes Beispiel liefert die trigonometrische Tangente.

Tang 90 läßt sich nicht messen, aber wir geben sie als ∞ an, weil, je mehr wir uns dem 90 nähern, desto größer die gegenüberstehende Kathete, gemessen durch die anliegende, gefunden wurde. In diesem Sinne rechtfertigen sich folgende Gleichungen, welche alle widersinnig aussehen, so lange wir uns unter ∞ eine feste Größe denken:

$$1)\ \infty \pm a = \infty. \quad 2)\ \frac{a}{\infty} = 0. \quad 3)\ \frac{a}{0} = \infty. \quad 4)\ \infty^2 \pm \infty = \infty^2.$$

$$5)\ \infty^n \pm \infty^{n-1} \pm \infty^{n-2} \ldots = \infty^n. \quad 6)\ \left(\frac{a}{\infty}\right) \pm \left(\frac{b}{\infty}\right)^2 \pm \left(\frac{c}{\infty}\right)^n = \frac{a}{\infty}.$$

Anmerkung. 1) Je größer eine Zahl, desto weniger wird sie durch Zufügen oder Abzählen einer constant bleibenden geändert.
Aus 2) und 3) erkennt man, daß der 0 ebenso wie dem ∞ ein Verhältnißbegriff beigelegt werden kann.
3) heißt: je kleiner ein Nenner bei constantem Zähler wird, desto größer wird der Bruchwerth.
4) läßt sich $(\infty \pm 1)$ ∞ schreiben und auf 1) reduciren.
5) ist nur das verallgemeinerte 4). Sie lehren: je größer eine Zahl ist, desto eher lassen sich ihre niederen Potenzen gegen ihre höheren vernachlässigen.
Bei 6): je kleiner eine Zahl, desto eher verschwinden die höheren Potenzen gegen die niedrigste.

Aus den vorhin angeführten Beispielen ergab sich schon, daß wir uns eines Resultats, das sich an [illegible] für sich unserer Beurtheilung entzog, durch die Betrachtung der Resultate bemächtigen können, deren Voraussetzungen denen des gesuchten Falles in stetigem Fortschritt näher und näher kommen. Einige Beispiele Curven sollen nun zeigen, wie ein ähnliches Princip zu neuen Ergebnissen und Begriffen die Bahn bricht.

§. 2. Wenn man für einen Punkt o der Parabel pos (Fig. 1.) die Richtung der Tangente wissen [illegible] so könnte man davon ausgehen, daß der Winkel, den sie mit der Axe macht, größer als α sein muß, weil im $\measuredangle \alpha$ durch o gezogene Linie Sehne ist und die Parabel noch in p trifft. Je näher aber, wenn [illegible]

ehne um o gedreht wird, der Punkt p an o fällt, für desto richtiger würde α als der Winkel der Tangente lten können, für völlig richtig, sobald p nach o selbst fällt. Der $\measuredangle \alpha = \angle$ pom kann durch pm und om sgedrückt werden: Tang $\alpha = \frac{pm}{om}$.

Wird nun aber die Sehne Tangente, indem der Punkt p nach o rückt, so verschwindet uns die Möglichkeit, n $\measuredangle \alpha$ durch $\frac{pm}{om}$ zu bestimmen, denn beide sind dann auch verschwunden. Suchen wir darum nach dem erthe, dem sich der Bruch $\frac{pm}{om}$ um so mehr nähert, je näher p dem o kommt.

Die Gleichung der Parabel ist $y^2 = ax$

sb heiße x', sd = x'', bo = y', dp = y'', also om = x'' − x', pm = y'' − y',

ist Tang $\alpha = \frac{pm}{om} = \frac{y''-y'}{x''-x'} = \frac{\frac{y''^2}{a}-\frac{y'^2}{a}}{\frac{y''^2}{a}-\frac{y'^2}{a}}$ (weil $x = \frac{y^2}{a}$) $= a\left(\frac{y''-y'}{y''^2-y'^2}\right) = a\,\frac{y''-y'}{(y''-y')(y''+y')} = \frac{a}{y''+y'}$.

Je näher nun der Punkt p an o rückt, um so ähnlicher wird y'' dem y'; damit nähert sich also der Aus- ck $\frac{a}{y''+y'}$ immer mehr dem $\frac{a}{2y'}$ und diese Grenze dürfen wir der Einleitung gemäß für den wahren Werth Tang α' für den Fall der Tangente halten.

Ebenso leicht finden wir die Subtangente nb. Denn $\frac{om}{pm} = \frac{wb}{y'}$; je mehr sich aber p dem o nähert, um mehr nähert sich wb der Subtangente nb, zugleich aber nähert sich $\frac{om}{pm} = \frac{y''+y'}{a}$ m $\frac{2y'}{a}$. Also $\frac{nb}{y'} = \frac{2y'}{a}$, t nb $= \frac{2y'^2}{a} = 2x'$.

In der That ist die Subtangente bei der Parabel stets der doppelten Abscisse gleich.

Errichten wir auf die Sehne po ein Perpendikel og (Fig. II.) und auf die Tangente eins oc, so ist pm ∼ obg, also $\frac{pm}{om} = \frac{bg}{y'}$. Nun nähert sich p dem o, w dem n, g dem c und $\frac{pm}{om}$ dem Werth $\frac{a}{2y'}$, also $= \frac{a}{2y'}$, oder bc $= \frac{a}{2}$. Dieß ist der Werth der Subnormale. Der Werth der Tangente und Normale ist Hülfe der Ordinate daraus zu bilden.

§. 3. Dasselbe Verfahren soll am Kreis angewendet werden. Seine Mittelpunktsgleichung ist: $y^2 = r^2 - x^2$. e Sehne mache den $\measuredangle \alpha$ mit der Axe der X, so wird die trigonometrische Tangente dieses Winkels aber- s durch den Bruch gemessen werden, dessen Zähler der Unterschied der Ordinaten für die 2 Schneidungs- te, dessen Nenner der Unterschied der entsprechenden Abscissen ist. Also Tang $\alpha = \frac{y''-y'}{x''-x'}$ wie vorher. Um drate zu bekommen, multipliciren wir Nenner und Zähler mit $(y''+y')(x''+x')$, giebt

$$\text{Tang } \alpha = \frac{(y''-y')(y''+y')(x''+x')}{(x''-x')(x''+x')(y''+y')} = \frac{(y''^2-y'^2)(x''+x')}{(x''^2-x'^2)(y''+y')} = \frac{[(r^2-x''^2)-(r^2-x'^2)](x''+x')}{(x''^2-x'^2)(y''+y')}$$
$$= -\frac{(x''^2-x'^2)(x''+x')}{(x''^2-x'^2)(y''+y')} = -\frac{x''+x'}{y''+y'}.$$

Je näher der zweite Schnittpunkt dem ersten rückt, um so näher kommt x'' dem x' und y'' dem y', also der h $-\frac{x''+x'}{y''+y'}$ dem $-\frac{2x'}{2y'} = -\frac{x'}{y'} =$ Tang α', wie es auch durch ähnliche Dreiecke sehr leicht zu erweisen ist.

Das −-Zeichen aber bedeutet, daß der Winkel dießmal nach der entgegengesetzten Seite geöffnet ist, als es voraussetzten, indem wir die Ordinatendifferenz y'' − y' nannten. In der That ist die dem Coordinaten- ng entferntere Ordinate y'', welche der größeren Abscisse x'' entspricht, hier die kleinere. Der Ausdruck $-\frac{x}{y}$ uns also auch, daß hier die Curve für die wachsenden Abscissen sich herabsenkt, während die Parabel für fende Abscissen anstieg.

§. 4. Zieht man an die Parabel noch eine dritte Ordinate rg (Fig. III.), die von der zweiten ebenso weit entfernt ist als die zweite von der ersten, und nennt sie y''', so ist $rq = rv - qv$

$$rv = pm \text{ (wegen } \triangle rvp \backsim pmo) = y'' - y'$$

$$qv = y''' - y'', \text{ also } rq = (y'' - y') - (y''' - y'').$$

Dieses Stück, die Differenz der Ordinatendifferenzen, bildet ein Verhältniß zum Quadrat der Abscissendifferenz, welches bei dem Annähern des Punkts p nach o (also bei dem Zusammenrücken der zwei Ordinaten y''' und y'' gegen die erste y') einem festen Grenzwerthe zustrebt.

Dieß Verhältniß ist: $\frac{(y''-y')-(y'''-y'')}{(x''-x')^2} = \frac{\frac{y''-y'}{x''-x'} - \frac{y'''-y''}{x''-x'}}{x''-x'}$. Aber $\frac{y''-y'}{x''-x'}$ nähert sich der Grenze $\frac{a}{2y'}$ (nach §. 2). Ebenso, wenn wir berücksichtigen, daß zwischen y'' und y''' eine der andern völlig entsprechende Figur obwaltet und $pv = dg = bd = x'' - x'$ ist, nähert sich $\frac{y''' - y''}{x'' - x'}$ dem $\frac{a}{2y''}$; also der Werth $\frac{\frac{y''-y'}{x''-x'} - \frac{y'''-y'}{x''-x'}}{x''-x'}$ der Grenze $\frac{\frac{a}{2y'} - \frac{a}{2y''}}{x''-x'} = \frac{a(y''-y')}{2y'y''(x''-x')}$, der Bruch $\frac{y''-y'}{x''-x}$ aber wieder dem $\frac{a}{2y'}$. Also nähert sich der ganze Werth der Grenze $\frac{a.a}{2.2y'y''y'}$; wenn aber $y' = y''$, ist die Grenze $\frac{a^2}{4y'^3}$.

§. 5. Suchen wir die Grenze dieses Werthes $\frac{(y''-y')-(y'''-y'')}{(x''-x')^2}$ für den Kreis, bei welchem sich der Bruch $\frac{y''-y'}{x''-x'}$ dem $-\frac{x'}{y'}$ und $\frac{y'''-y''}{x''-x'}$ dem $-\frac{x''}{y''}$ nähert, so wird der ganze Werth $-\frac{\frac{x'}{y'} - \frac{x''}{y''}}{x''-x'} = \frac{x''y'-x'y''}{y''y'(x''-x')}$

Dieß mit $x''y' + x'y''$ erweitert, giebt $\frac{x''^2y'^2 - x'^2y''^2}{(x''-x')(x''y''y'^2 + x'y'y''^2)} = \frac{(r^2-y''^2)y'^2-(r^2-y'^2)y''^2}{(x''-x')(x''y''y'^2+x'y'y''^2)}$

$= \frac{r^2(y'^2-y''^2)}{(x''-x')(x''y'+x'y'')y''y'} = \frac{r^2(y'-y'')(y''+y')}{(x''-x')(x''y'+x'y'')y''y'}$; da $\frac{y'-y''}{x''-x'} = -\frac{y''-y'}{x''-x'}$ die Grenze $+\frac{x'}{y'}$ hat, ist die Grenze des Werths $= \frac{r^2x'(y'^2+y')}{y'^2y''(x''y'+x'y'')}$. Nun $x'' = x'$ und $y'' = y'$ gesetzt, ist die Grenze $= \frac{2y'x'r^2}{2y'x'y'^3} = \frac{r^2}{y^3}$.

§. 6. Wir fanden sowohl bei der Parabel als dem Kreis soeben den Ausdruck für die Differenzendifferenz bei positivem y positiv; bei negativem y wäre er negativ geworden, weil y einen ungeraden Exponenten hat.

Betrachten wir aber den Kreis, statt wie in §. 5. nach der Mittelpunktsgleichung, für ein Coordinatensystem, wo die Abscissenaxe den Kreis tangirt (Fig. IV.), während die Ordinatenaxe durchs Centrum geht, ist die Gleichung $y = r \pm \sqrt{r^2 - x^2}$ und alle Ordinaten werden positiv. Da wir aber nun statt des y $y - r$ einsetzen müssen, wird obiger Grenzwerth $\frac{r^2}{(y-r)^3}$.

Nach der Gleichung hat $y - r$ einen positiven und negativen Werth, also auch $\frac{r^2}{(y-r)^3}$. Dieser negative Werth muß zu dem unteren Zweig fz des Kreises gehören und das negative Zeichen der Differenzendifferenz bedeutet, daß die Differenz der Ordinaten y''' und y'' am unteren Zweig größer sei, als die der Ordinaten y'' und y', umgekehrt wie bisher. Es wird also das $-$-Zeichen dabei immer anzeigen, daß die Curve gegen die Axe convex ist, vorausgesetzt, daß man sich auf der positiven Ordinatenseite befindet, und das $+$ Zeichen der Differenzendifferenz deutet unter gleicher Voraussetzung auf eine concave Curve (wie es in §. 4 die Parabel, in §. 5 der Kreis war und auch hier der obere Kreiszweig hf ist). Andere Beispiele davon später (§. 24).

§. 7. Durch drei Punkte, die nicht einer Richtung angehören, läßt sich immer ein Kreis ziehen. Suchen wir nun einen Kreis, der durch die Punkte o, p und q der Parabel (Fig. III.) geht, so wird dieser die Sehne

p und pq und sowohl die Ordinatendifferenz als die Differenzendifferenz mit der Parabel gemeinschaftlich haben. Wenn nun die drei Punkte wie bisher in einen zusammenrücken, so ist dieß der Berührungspunkt der Parabel nd eines Kreises, und zwar eines solchen, der kurz vor dem völligen Zusammenrücken der Punkte noch dreimal die Parabel geschnitten hat. Sein Radius sowohl als seine Lage wird sich während des Zusammenrückens der drei Punkte verändert haben, aber mit der Annäherung der letzteren hat auch er einer festen Größe und Lage zugerebt. Diese Grenzgröße und Grenzlage des Kreises ist uns wichtig, denn sie giebt uns denjenigen Kreis, der ch der Krümmung der Parabel am engsten von allen an diesem Punkte möglichen Kreisen anschmiegt. Er ißt die Krümmung der Parabel an dieser Stelle und heißt daher Krümmungskreis.

Sein Radius ist, so lange wir ihn suchen, unbestimmt $= r$, ebenso die Coordinaten seines Mittelunkts $x-m$ und $y-n$. Nun ist die Ordinatendifferenz $\frac{y''-y'}{x''-x'}$ im Grenzwerth für den Kreis nach §. 3 $= -\frac{x-m}{y-n}$, für die Parabel $\frac{a}{2y}$ (§. 2). (An die Stelle der Mittelpunktscoordinaten x und y des Kreises üssen hier die allgemeinen $x-m$ und $y-n$ gesetzt werden, da sein Centrum nicht auf der re zu liegen braucht.) Die Differenzendifferenz $\frac{(y''-y')-(y'''-y'')}{(x''-x')^2}$ ist im Grenzwerth für den Kreis ach §. 5 $= \frac{r^2}{(y-n)^3}$, für die Parabel $\frac{a^2}{4y^3}$ (§. 4). Also aus den Bedingungsgleichungen: 1) $-\frac{x-m}{y-n} = \frac{a}{2y}$ nd 2) $\frac{r^2}{(y-n)^3} = \frac{a^2}{4y^3}$ nebst der allgemeinen Kreisgleichung: 3) $r^2 = (y-n)^2 + (x-m)^2$ lassen sich die ei gesuchten Werthe m, n und r finden.

Gleichung 1) quadrirt, $\frac{a^2}{4y^2} = \frac{(x-m)^2}{(y-n)^2}$, und in 2) dividirt, giebt $\frac{1}{y} = \frac{r^2}{(x-m)^2(y-n)}$, oder: $-m)^2(y-n) = r^2y$.

Die linke Seite wird wegen 3): $(r^2-(y-n)^2)(y-n) = r^2(y-n) - (y-n)^3 = r^2y$, also $(y-y+n) = -(y-n)^3$ und 4) $r^2n = -(y-n)^3$. Also ist $n = -\frac{(y-n)^3}{r^2}$. Aber nach 2) ist $\frac{-n)^3}{r^2} = \frac{4y^3}{a^2}$, also $n = -\frac{4y^3}{a^2}$, also ist $y-n = y+\frac{4y^3}{a^2}$. Dieß in 1) eingesetzt, giebt $a\left(y+\frac{4y^3}{a^2}\right) = -2y(x-m)$, $a\left(y+\frac{4y^3}{a^2}\right) = \frac{a^3y+4ay^3}{a^2} = \frac{a^2y+4y^3}{a}$ und $x-m = -\frac{a^2+4y^2}{2a}$. Um den Radius finden, setzen wir in die Gleichung 4) $r^2n = -(y-n)^3$ den Werth für $(y-n) = y+\frac{4y^3}{a^2}$ ein, also: $= -\left(y+\frac{4y^3}{a^2}\right)^3 = -\left(\frac{a^2y+4y^3}{a^2}\right)^3$. Nun n eingesetzt: $-\frac{r^2 \cdot 4y^3}{a^2} = -\left(\frac{a^2y+4y^3}{a^2}\right)^3$ oder $= \frac{(a^2+4y^2)^3}{4a^4}$, und weil $y^2 = ax$, $r = \frac{\sqrt{(a^2+4ax)^3}}{2a^2}$.

Für den Scheitel der Parabel, also $x=0$, wird der Krümmungsradius $= \frac{\sqrt{a^6}}{2a^2} = \frac{a}{2}$, n wird $= 0$ $m = \frac{a}{2}$. Das erste und letzte sagt dasselbe: der Mittelpunkt des Krümmungskreises (das Krümmungstrum) falle um $\frac{a}{2}$ vom Scheitel weg auf die Abscissenaxe.

§. 8. Wenn es aus dem Vorigen deutlich wurde, wie das Krümmungscentrum bestimmt wird und daß r Parabelpunkt sein eignes Krümmungscentrum hat, so wird es auch einleuchten, daß für eine ununterchene Reihe von Parabelpunkten eine Reihe zugehöriger Krümmungscentra vorhanden sein müsse, die ebens eine zusammenhängende Linie bilden.

Ist z. B. (Fig. VI.) so $= \frac{a}{2}$, also o das Krümmungscentrum des Scheitels s, so wird Punkt u ein n entfernter liegendes Krümmungscentrum v haben und t ein noch entfernteres w. Die Krümmungscentra

der Parabelpunkte zwischen s und t aber werden zwischen o und w fallen. Man kann sich am unteren Ende der Linie ow einen Faden befestigt und über ihre convexe Biegung gelegt denken. Zuerst treffe sein freies Ende den Scheitel s. Wird er nun allmählich abgewickelt, so beschreibt das freie Ende als immer größer werdender Radius die Parabel st. Dieser Eigenschaft wegen heißt die Linie ow die Evolute oder Abgewickelte der Parabel und die Parabel heißt in Bezug auf sie ihre Evolvente oder durch Abwickelung erzeugte. Zur Abwickelung des unteren Parabelzweiges sg dient der obere Evolutenzweig oz.

Um die Gleichung der Evolute zu finden, haben wir nur die allgemeinen Ausdrücke für die Coordinaten des Krümmungscentrums zu vergleichen. Sie sind $x - m = -\frac{a^2+4y^2}{2a} = -\frac{a}{2} - 2x$, also $x = \frac{m}{3} - \frac{a}{6}$

und $n = -\frac{4y^3}{a^2} = -4\sqrt{\frac{x^3}{a}}$, also $x = \sqrt[3]{\frac{an^2}{16}}$.

Beide Werthe für x gleichgesetzt giebt:

$$\frac{m}{3} - \frac{a}{6} = \sqrt[3]{\frac{an^2}{16}} \text{ oder } n^2 = \frac{16}{27a}\left(m - \frac{a}{2}\right)^3.$$

m und n sind jetzt die Veränderlichen, und zwar bezeichnet m die Abscissen, n die Ordinaten.

Näheres über diese Linie, die auch die Neilische Parabel heißt, bei späteren Beispielen.

Verallgemeinerung.

§. 9. Vergleicht man das in allen diesen Fällen angewendete Verfahren mit dem in §. 1 aus der Elementarmathematik angeführten, so zeigt sich als das beiden Gemeinschaftliche, daß auf einen Werth, der nicht direct gefunden werden konnte, durch Näherung geschlossen wurde. Der Unterschied aber zwischen beiden Verfahrungsarten, der die letztere ungleich höher stellen muß, ist: daß man sich dort in der That immer mit einem allmählich entstehenden und unvollendeten Resultat begnügen mußte, während wir hier eine Näherung nur im Gedanken vollzogen, die uns dann immer in Form der Grenze auf einen sicheren und vollständigen Wert wies. Dort erhielten wir z. B. statt des Kreises immer nur ein Polygon. Hier erschien z. B. §. 2 als Grenz aller Subsekanten die wirkliche Subtangente $= 2x$, aber nur dadurch, daß wir in die Formel der Subsekant einen Werth verflochten hatten, der bei ihrem Uebergang in die Subtangente einer Grenze fähig war.

Unser Verfahren in den bisherigen Fällen hatte indeß noch etwas Unbehülfliches und Unvollkommenes. Indem wir uns bei jedem Beispiel erst den Werth vergegenwärtigten, den wir zur Grenze führen wollten und dann durch allerlei Umwandlungen zu einer Form gelangten, die uns für den Coincidenzfall der Punkte einen Werth übrig ließ (denn der anfängliche, z. B. in §. 2 das $a\left(\frac{y''-y'}{y''^2-y'^2}\right)$, hätte uns für das Zusammenfallen der Punkte ($y'' = y'$) noch den ganz unverständlichen Ausdruck $a\frac{0}{0}$ geliefert), schienen wir immer vom Zufall abhängig, ob uns die rechte Umwandlung gelingen würde, ein Zweifel, der bei verwickelteren Fällen als der der Parabel und des Kreises immer gegründeter wird. Man hat also eine Methode aufgesucht und Regeln gefunden, solche Grenzwerthe ganz allgemein aufzusuchen. Der wissenschaftliche Zweig, welcher sich damit beschäftigt, heißt die Differentialrechnung. Die ersten Grundzüge derselben sollen hier dargelegt und an einigen einfachen Beispielen erprobt werden.

Wie in der Gleichung einer Curve zwei veränderliche Werthe x und y aneinander geknüpft sind, so daß die Veränderung des einen die Veränderung des andern zur Folge hat, so können wir noch unzählige andere Fälle der Verknüpfung von 2 oder mehreren Veränderlichen denken. So wird z. B. die Fläche eines Dreiecks

eränderlich sein, wenn es eine der drei Seiten ist, oder es wird sich die Geschwindigkeit einer Bewegung mit er Dichtigkeit des widerstehenden Mittels verändern u. s. w.

Man nennt die Größe, welche durch eine Gleichung so von einer andern abhängig ist, daß sie sich bei der Veränderung dieser mitverändert, ihre Function. — In $y^2 = ax$ war y Function der Veränderlichen x. Man kann ebenso gut x als Function von y betrachten; doch ist es bei den Curven gewöhnlich, ie Ordinate als Function der Abscisse zu betrachten und von den Veränderungen der letzteren auszugehen.

Falls wir nun von einem bestimmten Werth des x, dem ein bestimmter Werth des y entsprechen muß, usgehen und x von da aus verändern, so ist unsere erste Frage darauf gerichtet, welchem Grenzwerth sich das Verhältniß zwischen den Veränderungen des y und x nähert, sobald wir wieder auf den zuerst bestimmten Werth zurückweichen.

Die Veränderung des y entspricht jener Ordinatendifferenz, die des x der Abscissendifferenz obiger Beiiele und ihr Verhältniß dem Bruch $\frac{y'' - y'}{x'' - x'}$.

Wir wollen aber jetzt den Zuwachs des x mit k, die dadurch in y hervorgebrachte Veränderung mit h zeichnen, so ist für die Gleichung $y^2 = ax$ nach eingetretener Veränderung: $(y+h)^2 = a(x+k)$

$$y^2 + 2yh + h^2 = ax + ak.$$

Da aber $y^2 = ax$

$$2yh + h^2 = ak$$

$$\frac{h}{k} = \frac{a}{2y+h}.$$

e kleiner h und k wird, indem die Veränderung rückgängig wird, um so näher kommt der Werth $\frac{a}{2y+h}$ ner Grenze $\frac{a}{2y}$, derselben, wie wir sie §. 2 auf andere Art gefunden haben.

Man giebt den Veränderungen des x und y, wenn man sie im Zustand des Wiederverschwindens auffen will, die Bezeichnungen dx und dy und nennt sie Differentiale. Begreiflicher Weise kann man efen bloßen Zeichen keine faßbare Größe beilegen, obschon, wie wir gesehen haben, ihr Verhältniß eine fest stimmte Größe ist. Dieß Verhältniß der Differentiale (oder der Veränderungen im Moment des Verschwinns beider) heißt Differentialquotient und wird mit $\frac{dy}{dx}$ bezeichnet. Er ist dasselbe, was wir bisher enzwerth genannt haben, und seine Aufsuchung die Hauptaufgabe der ganzen Rechnungsart.

§. 10. Die allgemeine Form der Gleichung ersten Grads ist $y = ax \pm b$ (x wachse um k, y um h)

$$y + h = ax + ak \pm b$$

Da $y = ax \pm b$,

$$\frac{h}{k} = a.$$

e Grenze $\frac{dy}{dx}$ bleibt $= a$, weil nichts in diesem Werth war, das verschwinden konnte. Durch die Gleichung en Grads wird die gerade Linie dargestellt (Fig. V.). Bei ihr steht jeder Zuwachs der Ordinate zu dem zugehörigen Abscisse in demselben Verhältnisse, also bleibt dieß auch für die verschwindenden Veränderungen Kraft.

§. 11. Quadratische Gleichung: $y = x^2$.

Wachsen beide, so wird $y + h = (x+k)^2 = x^2 + 2xk + k^2$.

Davon die erste Gleichung $y = x^2$ subtrahirt,

giebt $h = 2xk + k^2$ und $\frac{h}{k} = 2x + k$.

mmt dieß zur Grenze, indem h und k verschwinden, so ist $\frac{dy}{dx} = 2x$.

Es giebt übrigens noch eine kürzere Methode, zu diesem Resultate zu gelangen. Sieht man nämlich gleich anfangs den Zuwachs von x und y als sehr klein an oder betrachtet man die Gleichung, welche dy und dx enthält, als Näherungsgleichung, die um so richtiger ist, je kleiner dy und dx gedacht wird, so darf man schon während der Rechnung nach Regel 6 des §. 1 jede höhere Potenz dieser nun als wirkliche Größen geltenden Zeichen gegen ihre erste Potenz vernachlässigen, sowie man dieß auch thun dürfte, wo ein Product aus diesen beiden kleinen Werthen aufträte. Am Schlusse der Rechnung aber, wo der Differentialquotient erscheint, ist dann immer wieder der oben erklärte Begriff dieser Zeichen nicht für kleine, sondern für verschwundene Werthe aufzunehmen. Diese Betrachtungsweise ist zwar der erwähnten Doppeldeutigkeit wegen nicht so einleuchtend, aber für das Folgende so bequem und kurz, daß wir sie zur Entwickelung der folgenden Regeln benützen und uns begnügen werden, zu einigen Fällen die Begründung auch auf die Weise zu setzen, daß wir die Differenzen der Veränderlichen wie frühe bis zum Schlusse beliebig groß lassen und erst nach Bildung des Quotienten vernichten. Eine solche Begründung ist übrigens in allen nachstehenden Fällen leicht und sie bleibt nur der Raumersparniß wegen hier im Allgemeinen weg.

Obige Gleichung $y = x^2$ würde nun so behandelt:

$$\begin{array}{rl} y + dy = & x^2 + 2xdx + (dx)^2 \\ \underline{y = } & \underline{x^2 \qquad \text{und } (dx)^2 \text{ weggelassen,}} \\ dy = & 2xdx \text{ und } \frac{dy}{dx} = 2x. \end{array}$$

$2xdx$ heißt das Differential der Function x^2 oder $d(x^2)$ *).

§. 12. Kubische Gleichung: $y = x^3$.

$$\begin{array}{rl} y + dy = & x^3 + 3x^2dx + (3xdx^2 + dx^3) \\ \underline{y = } & \underline{x^3} \\ dy = & 3x^2dx \text{ und } \frac{dy}{dx} = 3x^2. \end{array}$$

$3x^2dx$ ist das Differential von x^3 oder $d(x^3)$.

Höhere Gleichung allgemeinen Grads: $y = x^n$.

$$y + dy = x^n + nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}dx^2 \ldots\ldots$$

Davon $\underline{y = x^n}$ weg, ebenso die Glieder, welche mit höheren Potenzen von dx multiplicirt sind,

giebt $dy = nx^{n-1}dx$ und $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$.

$nx^{n-1}dx$ ist das Differential von x^n oder $d(x^n)$.

Es folgt daraus die Regel: Das Differential einer Potenz wird gefunden, indem man ihren Exponenten um 1 vermindert und sie mit dem unverminderten Exponenten und mit dem Differential ihrer Basis (hier dx) multiplicirt.

§. 13. Wurzeln. $y = \sqrt[n]{x}$ läßt sich auch schreiben $y^n = x$.

Nach dem Vorigen $dx = ny^{n-1}dy$,

oder $dy = \frac{dx}{ny^{n-1}}$ und der Werth von y eingesetzt:

$$dy = \frac{dx}{n\overline{x^{\frac{n-1}{n}}}} = \frac{dx}{n}x^{-\left(\frac{n-1}{n}\right)} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}dx.$$

Also $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$.

*) $d(x^2)$ unterscheide man wohl von $(dx)^2$, gewöhnlich nur dx^2. Das erstere $d(x^2)$ drückt aus, daß von x^2 das Differential gesucht werden soll, das letztere dx^2, daß der klein gedachte Werth dx auf das Quadrat zu erheben ist.

Regel: Das Differential einer Wurzel, d. h. einer Potenz mit gebrochnem Exponenten, wird ganz nach er Regel der Potenzen gesucht.

Begründung der beiden letzten Regeln.

1) $y = x^n$. Durch Wachsen des y und x entsteht

$$y+h = (x+k)^n = x^n + nx^{n-1}k + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}k^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}k^3 \ldots.$$

$y = x^n$ davon ab und durch k dividirt, entsteht:

$$\frac{h}{k} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}k + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}k^2 \ldots.$$

a jedes folgende Glied der rechten Seite k enthalten muß, so bleibt für das Verschwinden des h und k die renze $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$.

) $y = \sqrt[n]{x}$ oder $y^n = x$, also nach dem Vorigen:

$$\frac{k}{h} = ny^{n-1} + \frac{n.(n-1)}{1.2}y^{n-2}h \ldots, \text{ oder}$$

$$\frac{h}{k} = \frac{1}{ny^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}y^{n-2}h \ldots} \text{ hat zur Grenze: } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{ny^{n-1}}.$$

un statt y sein Werth $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ eingesetzt, giebt: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}x^{-\left(\frac{n-1}{n}\right)} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$, wie oben.

§. 14. Ist der Exponent ein Bruchproduct, so findet noch dieselbe Regel statt.

Z. B. $y = \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$, so setze man $y^n = x^m$.

ch §. 12 ist also $ny^{n-1}dy = mx^{m-1}dx$,

$$dy = \frac{mx^{m-1}dx}{ny^{n-1}}. \text{ Statt y setze man seinen Werth:}$$

$$dy = \frac{mx^{m-1}dx}{nx^{\frac{m(n-1)}{n}}} = \frac{m}{n}x^{(m-1)-\frac{m(n-1)}{n}}dx = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx.$$

Z. B. für den speciellen Fall $y = \sqrt[5]{x^3} = x^{\frac{3}{5}}$:

$$dy = \tfrac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1}dx = \tfrac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}dx \text{ und } \frac{dy}{dx} = \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}.$$

§. 15. Summen und Differenzen.

$y = x^2 \pm x \pm c$. Wenn y und x wächst:

$y + dy = x^2 + 2xdx + dx^2 \pm x \pm dx \pm c$

$y = x^2 \pm x \pm c$ davon weg

$dy = 2xdx \pm dx(+dx^2)$ und $\frac{dy}{dx} = 2x \pm 1$.

Regel: Das Differential einer Summe oder Differenz ist gleich der Summe oder fferenz der Differentialen der einzelnen Glieder. Constante Größen haben 0 zum fferential, weil sie keines Zuwachses fähig sind.

§. 16. Producte.

$a = xy$ wird durch Wachsen

$a = (x+dx)(y+dy) = xy + xdy + ydx + dxdy$

$a = xy$ (letzteres Glied nach §. 11 auszulassen)

$0 = xdy + ydx$ und $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$.

Regel: Das Differential eines Productes von Veränderlichen bildet man, indem man jede mit dem Differential der andern multiplicirt und die Producte addirt.

Begründung: $a = (x+k)(y+h) = xy+xh+yk+hk$

$$\underline{a = \quad xy}$$

$$0 = xh+yk+hk \text{ und } \frac{h}{k} = -\frac{y+k}{x}.$$

Grenze $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ wie oben.

Es gilt diese Regel auch für mehr als 2 Factoren und solche, die selbst zusammengesetzte Functionen sind

z. B. $(x+b)y^2x = c$

$$(x+dx+b)(y^2+2ydy+dy^2)(x+dx) = c$$

giebt mit Weglassung höherer Potenzen der dx und dy:

$$(x+b)y^2x+2x^2ydy+2y^2xdx+by^2dx+2bxydy = c$$

$$\underline{(x+b)y^2x \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad = c}$$

$$2x^2ydy+2bxydy+2y^2xdx+by^2dx = 0$$

oder $2y.(x+b)xdy+(x+b)y^2dx+y^2xdx = 0.$

Das erste Glied enthält nämlich das Differential von y^2, mit den Factoren $x+b$ und x multiplicirt, das zweit das Differential von x mit den Factoren $x+b$ und y^2, das dritte endlich das Differential von $x+b$ (welche nur dx ist) mit den Factoren y^2 und x multiplicirt.

Also: das Differential jedes Factors wird mit den andern Factoren multiplicir und alle Producte sind zu addiren. Die Bildung des Differentialquotienten ist dann leicht:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(x+b)y^2+y^2x}{2y(x+b)x}.$$

§. 17. Was constante Factoren einer Veränderlichen betrifft, so sieht man an dem Beispiel von §. 1 $y = ax$ schon, welches sich in $y+dy = ax+adx$ und nach Abzug der ersten Gleichung in $dy = adx$ ve wandelt, daß statt des Differentials eines Products aus constantem und veränderlichem Factor das Produ aus dem constanten Factor und dem Differential der Veränderlichen gesetzt werden muß.

§. 18. Brüche. Um das Differential eines Bruches zu finden, setzen wir den Fall, daß $\frac{x}{y} = v$, w v auch eine Veränderliche ist, so werden wir statt dv das Differential des Bruches setzen können.

$\frac{x}{y} = v$ oder $x = yv$ giebt nach §. 16 $dx = ydv+vdy$, also $dv = \frac{dx-vdy}{y}$, oder für v wieder seine Werth gesetzt $= \frac{x}{y}$, giebt es $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{dx-\frac{x}{y}\cdot dy}{y} = \frac{ydx-xdy}{y^2}$, woraus die Regel zu ziehen ist:

Das Differential eines Bruches findet man, indem man den Nenner mit de Differential des Zählers und den Zähler mit dem Differential des Nenners mult plicirt, letzteres Product von ersterem subtrahirt und diese Differenz durch den au das Quadrat erhobenen Nenner dividirt.

Beispiel: $y = \frac{ax^2}{b+x}$, $dy = \frac{2a(b+x)xdx-ax^2dx}{(b+x)^2}$. Also $\frac{dy}{dx} = \frac{2ax(b+x)-ax^2}{(b+x)^2}$.

§. 19. Ist Nenner oder Zähler constant, so vereinfacht sich diese Regel, indem das Differential der Co stanten selbst $= 0$ das eine Glied der Differenz zum Wegfallen bringt.

Beispiele: $y = \frac{a}{bx^2}$.

$dy = -\frac{abdx}{b^2x^2} = -\frac{adx}{bx^2}$, was auch nach §. 16 zu finden wa

$\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{bx^2}$.

§. 20. Es ist nur noch übrig, zu zeigen, wie sich das Differential einer Potenz oder Wurzel finden läßt, ren Basis selbst noch zusammengesetzte Functionen, entweder Summen, Differenzen, Producte, Quotienten, otenzen oder Wurzeln enthält. Es läßt sich das an einem Beispiel zeigen:

$y = \left(ax^2 + \frac{b}{y} - c\sqrt{x+y}\right)^5$. Setzt man zuerst den ganzen Werth der Parentheſe $= v$, so ist

$$\frac{y = v^5}{dy = 5v^4 dv}. \quad §. 12.$$

v ist aber $d\left(ax^2 + \frac{b}{y} - c\sqrt{x+y}\right) = d(ax^2) + d\left(\frac{b}{y}\right) - d(c\sqrt{x+y})$. §. 15.

$d(ax^2) = 2axdx$. §. 12. und §. 17.

$d\left(\frac{b}{y}\right) = -\frac{bdy}{y^2}$. §. 18. und §. 19.

$d(c\sqrt{x+y})$ setzen wir $= dc\sqrt{w} = cd\sqrt{w} = \frac{cdw}{2\sqrt{w}}$. §. 13.

Aber $dw = d(x+y) = dx + dy$. §. 15.

Also $d(c\sqrt{x+y}) = \frac{cdx + cdy}{2\sqrt{x+y}}$

Und $dv = 2axdx - \frac{bdy}{y^2} + \frac{cdx + cdy}{2\sqrt{x+y}}$.

Also $dy = 5\left(ax^2 + \frac{b}{y} - c\sqrt{x+y}\right)^4 \cdot \left[2axdx - \frac{bdy}{y^2} + \frac{cdx + cdy}{2\sqrt{x+y}}\right]$.

r läßt sich dy zum gemeinschaftlichen Factor der einen Gleichungsseite, dx zu dem der andern machen und endlich der Differentialquotient finden.

§. 21. Der Differentialquotient hatte in den meisten der genannten Beispiele einen Werth, welcher selbst) die veränderlichen Größen enthielt, nämlich in allen den Fällen, wo die gegebene Gleichung den ersten d in Bezug auf die Veränderlichen überstieg. Es entsprach das der Erfahrung an den Curven, daß wir die trigonometrische Tangente des Winkels, den die geometrische Tangente mit der Axe des x machte (denn e Tang α bezeichnete ja das $\frac{dy}{dx}$), einen noch allgemeinen Werth fanden, der erst für jeden besondern Punkt) für ein bestimmtes x) ein besonderer wurde.

Demnach läßt sich in solchem Falle der Differentialquotient selbst noch als eine Function von x ansehen sein Werth aufs Neue differenziren. Es wird dann ein Quotient von der Form $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$ gefunden werden en, den man den zweiten Differentialquotienten nennt. Man bezeichnet ihn $\frac{d^2y}{dx^2}$, wobei das d^2 nicht als enz mit dem Exponenten 2, sondern als das bloße Zeichen wiederholter Differenzirung betrachtet werden muß. Ein Beispiel erläutere die Sache:

$y^2 = ax$ gab $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2y}$. Also $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{a}{2y}\right)}{dx}$. Aber $d\frac{a}{2y} = -\frac{a \cdot 2dy}{4y^2}$; für y^2 seinen th ax und für dy seinen Werth $\frac{adx}{2y}$ eingesetzt, wird dieß $= -\frac{\frac{aadx}{2y}}{2ax} = -\frac{a^2dx}{4axy} = -\frac{a^2dx}{4ax\sqrt{ax}} = -\frac{a^2dx}{4\sqrt{(ax)^3}}$.

n aber $d\frac{dy}{dx} = -\frac{a^2dx}{4\sqrt{(ax)^3}}$, so mußte $\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}$ oder $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a^2}{4\sqrt{(ax)^3}} = -\frac{a^2}{4y^3}$ sein.

Das Einzige also, was von dem Bisherigen abweichend hier auf den ersten Blick Schwierigkeiten machen könnte, war, daß sich in die Entwickelung noch dy einzudrängen pflegt, das wir zur Bildung des zweiten Differentialquotienten nicht unterbringen können. Man hat aber nur dann, wie das Beispiel zeigte, den Wert für dy aus dem ersten Differentialquotienten zu entnehmen und an seine Stellen zu setzen, so kann sich nu noch dx vorfinden, welches bei der Bildung des zweiten Differentialquotienten durch Wegdividiren verwendet wird

§. 22. Um die Bedeutung des zweiten Differentialquotienten zu fassen, rufen wir uns zurück, daß de erste Differentialquotient, ehe die Veränderungen des y und x zu Differentialen eingeschrumpft waren, das Ver hältniß der Differenz zweier Ordinaten zu der Differenz der zugehörigen Abscissen bezeichnete oder allgemei das Verhältniß einer Veränderung des y zu der zugehörigen Veränderung des x. Nehmen wir nun eine dritt Ordinate hinzu, oder allgemein: eine nochmalige Veränderung des y, entstanden durch eine nochmalige (aber de ersten gleiche) Veränderung des x, so lassen sich nicht nur 2 Differenzen (zwischen der ersten und zweiten un zwischen der zweiten und dritten Ordinate oder den entsprechenden Veränderungen des y), sondern es läßt sic auch noch eine Differenz dieser Differenzen unterscheiden. Wie das Verhältniß dieser Differenzendifferenz zur Quadrat der Abscissendifferenz dem zweiten Differentialquotienten als fester Grenze zudrängt, soll noch das fo gende Beispiel darthun:

$y = ax^3 + bx$ (k ist der Zuwachs des x, welcher das y um h wachsen macht).

$y + h = ax^3 + 3ax^2k + 3axk^2 + ak^3 + bx + bk.$ Abermals der Zuwachs k zu x, so daß statt x wied $x + k$ stehe, mache nun das $y + h$ noch um q wachse

$y + h + q = ax^3 + 3ax^2k + 3axk^2 + ak^3 + 3ax^2k + 6axk^2 + 3ak^3 + 3axk^2 + 3ak^3 + ak^3 + bx + bk + bk.$

Ziehe ich $y + h$ davon ab, so bleibt

$q = 3ax^2k + 6axk^2 + 3ak^3 + 3axk^2 + 3ak^3 + ak^3 + bk.$

$h = 3ax^2k + 3axk^2 + ak^3 + bk$

$q - h = 3axk^2 + 3axk^2 + 3ak^3 + 3ak^3 = 6axk^2 + 6ak^3.$

$q - h = 6axk^2 + 6ak^3$

$$\frac{q-h}{k^2} = 6ax + 6ak.$$

Wird durch das Zusammenrücken oder Rückverschwinden aller dieser Veränderungen $q = 0$, $h = 0$ u $k = 0$, so ist die Grenze $\frac{d^2y}{dx^2} = 6ax$.

Dasselbe erscheint sogleich durch zweimaliges Differenziren:

$y = ax^3 + bx$

$dy = 3ax^2dx + bdx$

$\frac{dy}{dx} = 3ax^2 + b$

$d\frac{dy}{dx} = 6axdx$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 6ax$, wie oben.

Einige geometrische Anwendungen.

§. 23. Steigen und Sinken der Curve. Der erste Differentialquotient bezeichnet die trigonometris Tangente des Winkels der Tangente mit der Abscissenaxe, und zwar haben wir diesen Winkel als nach der positiv Seite der Abscissenaxe hin geöffnet angenommen. Demnach gilt die Regel: Die Tangente und mit ihr die Curve ist ei

ach der positiven Seite der Abscissenaxe hin, wenn der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ für positives y einen positiven Werth hat. Hat die Curve auch einen Zweig mit negativen Ordinaten, so muß derselbe Differentialquotient r negatives y negativ werden, also für diesen Zweig die Tangente sinken.

Allgemein ausgedrückt, entfernt sich also die Curve von der Abscissenaxe nach ihrer ositiven Seite hin, wenn der Differentialquotient dasselbe Zeichen als die Ordinate at, im umgekehrten Falle nähert sie sich. — Beispiele später!

§. 24. Concavität und Converität der Curve. Der Zähler des zweiten Differentialquotienten zeichnet die Grenze des Stückes, um welches die Differenz der dritten und zweiten Ordinate größer ist, als e Differenz der zweiten und ersten. Wenn also dieser Zähler (oder auch der ganze Bruch $\frac{d^2y}{dx^2}$, denn der enner als Quadrat ist immer positiv) einen positiven Werth für positive Ordinaten hat, ist dieß ein Zeichen, ß auch für die kleinste Strecke die Ordinaten nach der positiven Seite der Abscissenaxe hin einander um achsende Stücke übertreffen. Dabei muß die Krümmung gegen die Axe conver erscheinen. Daß für die ne- tiven Ordinaten dasselbe gilt, wenn der zweite Differentialquotient negativ ist, wird leicht eingesehen. Also gemein: Hat der zweite Differentialquotient gleiches Zeichen mit der Ordinate, so ist e Curve conver, im umgekehrten Falle concav gegen die Abscissenaxe *).

§. 25. Maxima und Minima. In der Regel wird bei einer Curve, die irgendwo eine größte oder e kleinste Ordinate, also einen höchsten oder einen niedrigsten Punkt über der Abscissenaxe hat, der Lauf der ngentenrichtung über die Krümmung hin der Art sein, daß sie einmal parallel mit der Abscissenaxe zu liegen mt. In diesem Augenblick muß der Werth der trigonometrischen Tangente ihres Winkels vom Positiven n Negativen übergehen, also durch 0 gehen. (Den seltneren Fall, wo dieser Uebergang durch ∞, d. h. die chtung senkrecht gegen die Abscissenaxe, geschieht, müssen wir hier aus Mangel an Raum übergehen.) Wir en also ein Mittel in Händen, den Ort dieser größten oder kleinsten Ordinate zu finden. Wir setzen nämlich Werth des $\frac{dy}{dx} = 0$ und beobachten, welchem x dieser entspricht.

Zur Entscheidung, ob der gefundene Fall nun ein Maximum oder Minimum sei, dient der zweite Diffe- ialquotient. Denn bei dem Maximum ist, wie ein Blick auf die Figur zeigt, an dieser Stelle die Curve cav, bei dem Minimum conver.

Also Regel: Man setze $\frac{dy}{dx} = 0$ und substituire den daraus gewonnenen Werth von n den Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$. Zeigt sich der letztere dann von gleichem Zeichen mit der zuge- igen Ordinate, so ist das gefundene x Abscisse des tiefsten Curvenpunktes, im um- ehrten Falle des höchsten.

Giebt es keinen Werth von x, für den $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, so existirt weder Maximum noch Minimum (den, wie gt, übergangenen Fall abgerechnet, daß $\frac{dy}{dx} = \infty$ oder $\frac{dx}{dy} = 0$ ist).

§. 26. Asymptoten. Die gradlinige Asymptote an einer Curve kann man als die Tangente am un- ich entfernten Punkte bezeichnen, wenn man den Begriff unendlich nach der Erläuterung des §. 1 versteht. heißt dann: Eine Tangente nähert sich in Bezug auf ihre Lage um so mehr der Asymptote, je entfernter den Curvenpunkt annimmt. Es ist also die Asymptote die äußerste Grenze der Tangenten für $x = \infty$

*) Daß wir im Widerspruch hiermit in §. 4 und 5 für concave Curven, wie Parabel und Kreis, einen zweiten Differential- nten mit gleichem Zeichen als y fanden, rührte daher, daß wir bei der Entwickelung desselben, wie es für jene Figuren natürlicher $(y''-y')-(y'''-y'')$ statt wie nun: $(y'''-y'')-(y''-y')$ geschrieben hatten.

und man könnte kurz auf ihr Dasein schließen, wenn man bemerkte, daß der Ausdruck des Tangentenwinkels $\frac{dy}{dx}$ einer Grenze fähig wäre.

Genaueres erfährt man durch folgende Betrachtung: 0 sei Coordinatenanfang, ew sei Tangente (Fig. VII.) im sei Asymptote. Es wird die Tangente mit dem Hinausrücken des Punktes e die Ordinaten- und Abscissenar in immer andern Punkten schneiden; aber sobald sie Asymptote geworden, wird der Punkt v in n, der Punk w in m angekommen, also vo = no und wo = mo geworden sein; dieß für die Bedingung $x = \infty$.

Nun ist vo : wo = y : wo + x oder vo . wo + vo . x = wo . y, giebt durch wo dividirt: $vo + \frac{vo}{wo}x =$ oder $vo = y - \frac{vo}{wo}x$. Ebenso durch vo dividirt: $wo + x = \frac{wo}{vo}y$ oder $wo = -\left(x - \frac{wo}{vo}y\right)$. Die Ausdrück $\frac{vo}{wo}$ und $\frac{wo}{vo}$ sind aber gleichbedeutend mit $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dx}{dy}$, indem sie die trigonometrische Tangente und ihre factorisch Umkehr für den Tangentenwinkel darstellen. Nennen wir also die Linien vo und wo kurz p und q, so ist $= y - \frac{dy}{dx}x$ und $q = -\left(x - \frac{dx}{dy}y\right)$.

Setzen wir in die Werthe dieser Ausdrücke $x = \infty$, so zeigt es sich, ob sie bestimmt Größen annehmen. In diesem Fall giebt es Asymptoten, deren Lagen aus ihre Werthen zu erkennen sind. Wird für $x = \infty$ das $p = 0$ und $q = 0$, so geht die Asymptote dur den Coordinatenanfang. $\frac{dy}{dx}$ zeigt uns dann für $x = \infty$ den Steigungswinkel der Asymptote.

Wird für $x = \infty$ entweder p oder $q = \infty$, während das andere endlich bestimmt wird, so liegt d Asymptote im ersten Fall mit der Ordinatenare, im letzteren mit der Abscissenare parallel. Sind p und q bei zugleich ∞, so sind keine Asymptoten da. In gewissen, leicht zu findenden Fällen wird man zur Auffuchun der Asymptote statt x das $y = \infty$ zu setzen haben.

§. 27. Krümmungskreise. Nach §. 7 ist der Krümmungskreis die Grenze der Kreise, welche Punkte mit der Curve gemeinschaftlich haben, für den Fall, daß diese 3 Punkte gegen einen zusammenrücke Es wurde dort schon gezeigt, daß er mit der Curve den ersten und zweiten Differentialquotient gemein hab müsse, wenn auch dort dieser Ausdruck noch nicht gebraucht wurde.

Die allgemeine Gleichung des Kreises ist

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \varrho^2,$$

wenn α und β die Coordinaten des Centrums sind. Also ist $\frac{dy}{dx}$ für den Kreis $= -\frac{x-\alpha}{y-\beta}$ und $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{dx^2+dy^2}{(y-\beta)\,dx^2}$. D sen Werthen nun die Differentialquotienten der Curve gleichgesetzt: 1) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x-\alpha}{y-\beta}$ und 2) $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{dx^2+d}{(y-\beta)d}$

ergiebt sich aus 2): $y - \beta = -\frac{dx^2+dy^2}{d^2y}$, und dieß in 1) gesetzt:

$$x - \alpha = \frac{dy}{dx}\left(\frac{dx^2+dy^2}{d^2y}\right).$$

Endlich aus der Kreisgleichung durch Einsetzen dieser Werthe: $\varrho^2 = \frac{(dx^2+dy^2)^3}{dx^2\,(d^2y)^2}$

$$\text{und} \quad \varrho = \frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)^3}}{dx\,d^2y} = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y}.$$

Die Art der Berechnung dieser Formeln durch Einsetzen der Werthe mögen die angehängten Beispiele n mehr verdeutlichen.

§. 28. Die Evolute. Wenn man aus den im vorigen §. entwickelten Werthen für α und β, wel die Coordinaten des Krümmungscentrums ausdrücken, mit Hülfe der Curvengleichung selbst x und y beseit hat (denn 3 Gleichungen genügen zur Elimination zweier Werthe), so bleibt eine Gleichung übrig, welche n

ie Veränderlichen α und β enthält (veränderlich sind sie, insofern man sie als Functionen der Veränderlichen und y ansehen kann). Diese Gleichung gilt für den geometrischen Ort des Krümmungscentrums (so ennt man den Spielraum, welcher einem Punkt nach irgend einem Gesetze eingeräumt ist). Die Curve, deren oordinaten α und β sind, ist, wie oben gezeigt, Evolute der Curve, aus deren Coordinaten x und y das α nd β abgeleitet ist.

Beispiele.

§. 29. Die Parabel. Scheitelgleichung: $y^2 = ax$, daraus $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2y}$ und $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a^2}{4y^3}$.

1) y positiv genommen, macht den ersten Differentialquotienten positiv und umgekehrt. — Die Curve eitet sich nach der Seite der positiven Abscissen aus (§. 23).

2) y positiv, giebt den zweiten Differentialquotienten negativ und umgekehrt. — Beide Curvenzweige d gegen die Abscissenaxe concav (§. 24).

3) $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2y} = 0$, giebt $y = \infty$. Es giebt kein Maximum oder Minimum, als für ∞ Abscissen, h. je weiter die x wachsen, um so ähnlicher liegt die Tangente einer der Axe parallelen (§. 25).

4) $p = y - x\frac{dy}{dx} = y - \frac{ax}{2y} = \frac{y}{2}$.
$q = x - y\frac{dx}{dy} = x - \frac{2y^2}{a} = -x$.
} x oder $y = \infty$ gesetzt, werden p und $q = \infty$. Es sind keine Asymptoten da (§. 26).

5) Der Krümmungskreis, dessen $\varrho = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y} = \sqrt{\frac{\left(\left(\frac{dx^2}{dx^2}+\frac{dy^2}{dx^2}\right)dx^2\right)^3}{dx^2(d^2y)^2}} = \sqrt{\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3 dx^6}{dx^2(d^2y)^2}}$

$\sqrt{\frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^3}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$.

ist $1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1+\frac{a^2}{4y^2}$ und $\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^3 = \frac{(a^2+4y^2)^3}{(4y^2)^3}$, die Wurzel daraus $= \pm\frac{\sqrt{(a^2+4ax)^3}}{8y^3}$

dieß durch den zweiten Differentialquotienten dividirt, wird $= \mp\frac{\sqrt{(a^2+4ax)^3}\,.\,4y^3}{8y^3\,.\,a^2}$, $\varrho = \mp\frac{\sqrt{(a^2+4ax)^3}}{2a^2}$.

$\mp$-Zeichen deutet darauf, daß für den positiven Parabelzweig das Krümmungscentrum auf die negative e fällt und umgekehrt. Für den Scheitel ($x = 0$) wird $\varrho = \frac{a}{2}$.

6) Die Evolute, deren Gleichung $\beta^2 = \frac{16}{27a}\left(\alpha - \frac{a}{2}\right)^3$ ist schon in §. 8 entwickelt.

§. 30. Die Ellipse. Mittelpunktsgleichung: $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$,

$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}$.

1) Beide Zweige nähern sich der Axe (§. 23).

2) $+y$ giebt einen negativen zweiten Differentialquotienten und umgekehrt. — Die Curve ist concav.

3) $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y} = \mp\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}} = 0$ giebt $x = 0$, also parallele Tangente. Für $x = 0$ wird aber

$y = \pm b$, also $\frac{d^2y}{dx^2} = \mp\frac{b}{a^2}$, d. h. für die positive Ordinate negativ, für die negative positiv. Dieß ist da Zeichen für ein Maximum an beiden Zweigen.

4) Asymptoten fehlen.

5) Krümmungskreis $\varrho = \mp\frac{\sqrt{(a^4y^2 + b^4x^2)^3}}{a^4b^4}$.

6) Die Evolute soll noch einmal einzeln entwickelt werden:

$$y - \beta = -\frac{dx^2 + dy^2}{d^2y} \text{ (§. 27)} = -\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \text{ hier} = \left(1 + \frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)\frac{a^2y^3}{b^4} = \frac{y^3(a^2 - b^2)}{b^4} + y.$$

$$x - \alpha = \left(\frac{dx^2 + dy^2}{d^2y}\right)\frac{dy}{dx} \text{ (§. 27)} = -(y - \beta)\frac{dy}{dx}, \text{ hier} = -\frac{(y^3(a^2 - b^2) + yb^4)b^2x}{b^4 \cdot a^2y} = -\frac{x^3(a^2 - b^2)}{a^4} + x.$$

Aus dem ersten: $\beta = -\frac{y^3}{b^4}(a^2 - b^2)$

und dem zweiten: $\alpha = \frac{x^3}{a^4}(a^2 - b^2)$.

Daraus: $\alpha a = \frac{x^3}{a^3}(a^2 - b^2)$ und $\beta b = \frac{y^3}{b^3}(a^2 - b^2)$

$$(\alpha a)^{\frac{2}{3}} = \frac{x^2}{a^2}(a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}} \qquad (\beta b)^{\frac{2}{3}} = \frac{y^2}{b^2}(a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$$

$$(\alpha a)^{\frac{2}{3}} + (\beta b)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right).$$

Nun läßt sich die Mittelpunktsgleichung der Ellipse auch schreiben:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1, \text{ also } (\alpha a)^{\frac{2}{3}} + (\beta b)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

Daraus die Evolutengleichung: $\beta = \pm\frac{\left[(a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}} - (\alpha a)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}}{b}$.

Diese interessante Curve kann hier nur der genaueren Betrachtung empfohlen werden. Sie enthält d in §. 25 angedeuteten Fall einer senkrechten Tangente im Maximum, denn ihr Differentialquotient $\frac{d\beta}{d\alpha}$ w für $\alpha = 0$ unendlich. Für $\alpha = \pm\frac{a^2 - b^2}{a}$ wird er $= 0$, also dort (am Krümmungscentrum der Sche der großen Ellipsenaxe) wird die Tangente wagrecht, umgekehrt wie bei der Ellipse selbst.

Wird $a = b$, so wird die Evolutengleichung $\beta = \alpha = 0$, d. h. die Evolute des Kreises ist ein Pun sein Mittelpunkt.

§. 31. Die Hyperbel. Mittelpunktsgleichung: $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

1) Die Curve breitet sich mit dem wachsenden x aus.

2) Sie ist ebenfalls concav.

3) Asymptoten sind da, denn $p = y - x\frac{dy}{dx} = \frac{a^2y^2 - b^2x^2}{a^2y} = -\frac{b^2}{y}$

und $q = x - y\frac{dx}{dy} = \frac{b^2x^2 - a^2y^2}{b^2x} = \frac{a^2}{x}$.

Setzt man x und also auch $y = \infty$, so werden p und $q = 0$, also gehen die Asymptoten beide durch

Coordinatenanfang. $\frac{p}{q} = -\frac{b^2x}{a^2y} = -\frac{b}{a\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}$*). Wenn darin $x = \infty$ gesetzt wird, so erhält es den

Werth $= -\frac{b}{a}$ als trigonometrische Tangente des Asymptotenwinkels. Für $a = b$, die gleichseitige Hyperbel, ist sie $= 1$, also der Winkel $= 45°$.

4) Maxima und Minima fehlen, da $\frac{dy}{dx}$ durch kein x zu 0 werden kann. Am Scheitel ist die Tangente enkrecht, weil für $x = a$ das $\frac{dy}{dx} = \infty$ wird.

5) Der Krümmungsradius $\varrho = \mp\frac{\sqrt{a^4y^2+b^4x^2}}{a^4b^4}$ hat dieselbe Formel wie der der Ellipse, nur daß ihm as andere Verhältniß des y zum x andere Werthe giebt.

6) Die Evolute entspricht ebenfalls der der Ellipse:

$$\beta = \pm\frac{\left[(a\alpha)^{\frac{2}{3}}-(a^2+b^2)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}}{b}.$$

ür $a = b$, die gleichseitige Hyperbel, ist die Evolutengleichung:

$$\beta = \pm\left[\alpha^{\frac{2}{3}}-(2a)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}},$$

ch eine merkwürdige Curve mit Asymptoten.

§. 32. Die Curve des Cassini, auch Lemniskate genannt. Ihr Gesetz ist, daß das Product der ntfernungen jedes Curvenpunktes von 2 befestigten Punkten (wie bei der Ellipse die Summe und bei der yperbel die Differenz derselben) eine Constante sei (Fig. X.).

Gleichung: $[(a+x)^2+y^2][(a-x)^2+y^2] = c^4 = (y^2+a^2+x^2)^2-4a^2x^2$

oder auch $y^2 = \pm\sqrt{c^4+4a^2x^2}-(a^2+x^2)$

und $\frac{dy}{dx} = \frac{x(a^2-(x^2+y^2))}{y(a^2+(x^2+y^2))}$.

An dieser Curve sind vorerst mehrere charakteristische Fälle zu unterscheiden, je nach der speciellen Annahme r Constanten.

1) $c = 0$ gesetzt, wird $y = \pm\sqrt{\pm 2ax-(a^2+x^2)}$.

Dieß wird für $x = \pm a$ zu 0, in jedem andern Fall imaginär. Es deutet auf zwei Einzelpunkte(Fig. X.) und n, welche um a zu beiden Seiten vom Coordinatenanfang liegen.

2) c größer als 0, aber kleiner als a, z. B. $c = \frac{a}{2}$, so wird $y = \pm\sqrt{\sqrt{\frac{a^4}{16}+4a^2x^2}-(a^2+x^2)}$.

Man sieht schon, daß hier für $x = 0$ der Werth für y wieder imaginär wird, da $\sqrt{\frac{a^4}{16}} < a^2$, ebenso für ine Werthe des x, aber für $x = \pm a$ wird $\sqrt{\frac{a^4}{16}+4a^4} = a^2\sqrt{\frac{65}{16}} > 2a^2$, also y reell $\pm$, für größere x, B. $x = \pm 2a$, wird $\sqrt{\frac{a^4}{16}+16a^4} = a^2\sqrt{\frac{257}{16}} < 5a^2$, also y wieder imaginär. Die Curve zeigt 2 getrennte ale sz und vw.

*) Ehe man hier und in ähnlichen Fällen $x = 0$ oder $= \infty$ setzt, suche man dem Werthe immer eine Form zu geben, die nicht vieldeutige Resultat $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ zur Folge hat.

3) $c = a$. Die Gleichung wird $y = \pm\sqrt{\pm a\sqrt{a^2 + 4x^2} - (a^2 + x^2)}$.

$x = 0$ macht nun $y = 0$, auch $x = \pm a\sqrt{2}$ macht $y = 0$. Die Curve bildet (odgoch) eine in Form der Zahl 8 verschlungene Schleife. Dieser Fall führt den Namen der Bernoulli'schen Lemniskate.

4) $c > a$, doch $< \sqrt{2a^2}$, wird besser aus dem Differentialquotienten erkannt.

5) $c = \sqrt{2a^2}$ giebt die Gleichung $y = \pm\sqrt{\pm 2a\sqrt{a^2 + x^2} - (a^2 + x^2)}$.

Für $x = 0$ wird $y = \pm a$, für $x = \pm a\sqrt{3}$ wird $y = 0$, für größere $\pm x$ wird y imaginär, entspricht der ellipsenähnlichen Curve iklb.

Den sechsten und letzten Fall eines noch größeren c wollen wir hier nicht berücksichtigen. Die Curve würde mit dem wachsenden c immer kreisartiger, indem die Grenze für $c = \infty$ allerdings einen Kreis von ∞ Radius zeigte.

Der Differentialquotient $\frac{x}{y}\left(\frac{a^2 - (x^2 + y^2)}{a^2 + (x^2 + y^2)}\right)$ wird im Allgemeinen $= 0$, wenn $a^2 = x^2 + y^2$. Daß das dabei nicht vorkommt, zeigt, daß diese Regel für alle Formen der Cassini'schen Curve gilt. $a = \sqrt{x^2 + y}$ bedeutet aber die Hypotenuse eines Dreiecks, dessen Katheten die beiden Coordinaten eines beliebigen Punkte im Kreise sind. Die Hypotenuse ist sein Radius. Also ist a (die halbe Excentricität unserer Curve) der constante Radius eines Kreises, welcher an den verschiedenen Formen (Ausnahmen sogleich!) die Punkte trifft, wo die Tangente parallel der Axe läuft; wir fänden, daß es die Maxima sind. Also verbindet ein Kreis aus dem Coordinatenanfang mit dem Radius $= a$ alle Maxima der verschiedenen Curvenformen.

Die Gleichung des Falles 5) wird aber durch diese Annahme $a = \sqrt{x^2 + y^2}$ nur befriedigt, wenn $y = \pm a$ ist; in diesem Fall aber ist $x = 0$. Also hat Fall 5) sein Maximum und den Berührungspunkt mit jenem Kreis auf der Ordinatenaxe. Bei noch weiteren Curven des Falles 6) streitet die Annahme $a^2 = x^2 + y^2$ begreiflicher Weise mit der Gleichung der Curve. Sie werden von jenem Radius nicht mehr erreicht.

Die Curve des Falles 4) fordert zu ihrem Verständniß die Ableitung eines Differentialquotienten, in welchem c wirklich vorkommt (in dem obigen war c durch die andern Größen vertreten). Dieser Differentialquotient wird geradezu aus der allgemeinen Formel: $y = \pm\sqrt{\sqrt{c^4 + 4a^2x^2} - (a^2 + x^2)}$ abgeleitet und lautet dann, freilich minder einfach als der obige: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{4a^2x}{\sqrt{c^4 + 4a^2x^2}} - 2x}{2\sqrt{\pm\sqrt{c^4 + 4a^2x^2} - (a^2 + x^2)}}$.

Für $c > a$, wie es der Fall 4) fordert, zeigt sich dieser Differentialquotient durchweg $= 0$, wenn $x =$ gesetzt wird, ein Beweis, daß für diesen Fall auch auf der Ordinatenaxe noch Punkte wagrechter Tangenten liegen. Die hier zu weitläufige Aufsuchung des zweiten Differentialquotienten würde uns zeigen, daß alle solche Punkte Minima sind. Fall 4) stellt die Gestalt fpqrtuφψ dar. Die ganze Curve mit allen Modificationen findet eine schöne Anwendung in der Theorie der optischen Erscheinungen für zweiaxige Krystalle im polarisirten Lichte *).

Zur leichten Anwendung der in diesem Aufsatze enthaltenen Regeln ist besonders noch die Conchoide und Cissoide, auch die Evolute der Parabel und die der gleichseitigen Hyperbel zu empfehlen. Die Conchoide hat die Gleichung $y^2x^2 = (b + y)^2(a^2 - y^2)$ und die Cissoide die Gleichung $y = \pm\sqrt{\frac{x^3}{2a - x}}$. Ueber Construction und

*) Pouillet, Lehrbuch der Physik, übersetzt von J. Müller, §. 444.

Eigenschaften derselben giebt unter Andern Klügel's alphabetisches Wörterbuch der reinen Mathematik bei den etreffenden Artikeln genügende Auskunft.

Die Gleichung der Parabelevolute oder Neil'schen Parabel wird noch einfacher, wenn man ihren Coordinaenanfang verlegt und statt $\alpha - \frac{a}{2}$, wie in §. 29, 6), jetzt α' schreibt. Sie heißt dann: $\beta^2 = \frac{16\alpha'^3}{27a}$ und hat ren Scheitel zum Coordinatenanfang.

§. 33. Es folgen hier noch einige Beispiele, welche zeigen sollen, wie auch außer der Curvenlehre die Difrentialrechnung zur Lösung von allerlei Aufgaben geeignet ist.

Welches ist das größte Rechteck, das aus einem Kreis, dessen Radius r gegeben ist, geschnitten werden kann? Die Basis des Rechtecks sei $= x$, sein Inhalt $= y$, so ist nach einem bekannten geometrischen Satz die öhe $= \sqrt{4r^2 - x^2}$, also der Inhalt $y = x\sqrt{4r^2 - x^2}$. y ist Function von x. Jede Aenderung der Basis t eine Aenderung des Inhalts zur Folge. Bis zu einer gewissen Grenze wird z. B. durch das Wachsen der steren auch der letztere wachsen, dann aber abnehmen. Sobald also der Zuwachs von y anfängt, negativ zu erden, wird auch der Bruch $\frac{dy}{dx}$ (Zuwachs des Inhalts durch Zuwachs der Basis) negativ, vorher wird er durch gegangen sein und $\frac{dy}{dx} = 0$ giebt uns den Moment vor dem Wiederabnehmen des y oder das Maximum des nhalts. (Es könnte auch, wenn wir im Dargestellten die Ausdrücke „Wachsen" und „Abnehmen" vertauschen, n einem Minimum die Rede sein. Welches von beiden der Fall ist, läßt sich entweder aus der Natur der ufgabe erkennen oder führt wiederum das Zeichen des zweiten Differentialquotienten darauf. Denn dieses gt uns, indem es angiebt, ob von zwei diesem Momente folgenden Veränderungen die zweite größer ist, als erste, durch das mit y übereinstimmende Zeichen ein Minimum, im andern Fall ein Maximum an.)

In diesem Fall ist $\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}} + \sqrt{4r^2 - x^2} = \frac{4r^2 - 2x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}}$. Dieß wird $= 0$ für ein $x^2 = 2r^2$ er $x = r\sqrt{2}$. Da nun $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4x\sqrt{4r^2 - x^2} + \frac{4r^2 - 2x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}}x}{4r^2 - x^2}$ und der Werth $x^2 = 2r^2$, so verwandelt sich in -4 und wir haben hier ein Maximum, und zwar für $x = r\sqrt{2}$ die Quadratseite. Das größte verlangte chteck ist also das Quadrat.

§. 34. Nach angestellten Versuchen verhält sich die Haltbarkeit zweier gleichlangen Balken, d. h. der Wistand, den beide dem Zerbrochenwerden entgegensetzen, wie das Product aus der Breite und dem Quadrat Dicke bei beiden. Der stärkste Balken wird also aus einem cylindrischen Baumstamm geschnitten, wenn für Rechteck, welches den Durchschnitt bildet, die Basis, multiplicirt mit dem Quadrat der Höhe, ein Maximum et. x sei die Basis, so ist wie in der vorigen Aufgabe $\sqrt{4r^2 - x^2}$ die Höhe. Die Function $x(4r^2 - x^2)$, wir wieder y nennen wollen, soll ein Maximum werden: $\frac{dy}{dx} = 4r^2 - 3x^2$. Dieß wird $= 0$ für $x = \frac{2r}{\sqrt{3}}$. rd im ersten Drittheil des Durchmessers in n (Fig. VIII.) ein Perpendikel no errichtet und mo gezogen, so ist $= \frac{2r}{\sqrt{3}}$ die verlangte Breite.

§. 35. In welcher Entfernung wird eine kleine senkrechte Fläche am reichlichsten von einem in der Höhe $= b$ (Fig. IX.) angebrachten Lichte beleuchtet?

Die Lichtstärke steht in dem umgekehrten Verhältniß zum Quadrat der Entfernung. Andererseits wird Fläche um so schlechter beleuchtet, je schiefer die Strahlen auffallen, und zwar wächst die Beleuchtung direct dem Cosinus des Einfallswinkels, also mit dem Sin α (Fig. IX.).

Der Beleuchtungsquotient ist also $\frac{\sin\alpha}{li^2} = \frac{\sin\alpha}{e^2}$. Aber $\alpha = v$ und $\sin v = \frac{x}{e}$. Also der Beleuchtungsquotient $y = \frac{x}{e^3}$. Nun ist $e = \sqrt{b^2+x^2}$. Also $y = \frac{x}{(b^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Dieß soll Maximum werden.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+b^2)^{\frac{1}{2}}[b^2-2x^2]}{(x^2+b^2)^3}.$$

Für $\frac{dy}{dx} = 0$ wird $x = \frac{b}{\sqrt{2}}$ *).

§. 36. Wo ist zwischen zwei Lichtern, deren Entfernung $= e$ ist und deren Lichtstärke sich wie a zu verhält, das Minimum der Beleuchtung? **)

In der Entfernung x wirkt das eine $\frac{a}{x^2}$, das andere $\frac{b}{(e-x)^2}$. Beide $\frac{a}{x^2}+\frac{b}{(e-x)^2} = y$. Dieß werde Minimum

$\frac{dy}{dx} = -\frac{2a(e-x)^3-2bx^3}{x^3(e-x)^3}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6b(e-x)^2}{(e-x)^6}+\frac{6ax^2}{x^6}$. $\frac{dy}{dx}$ wird 0 für $bx^3 = a(e-x)^3$. Das Zeichen der zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6b}{(e-x)^4}+\frac{6a}{x^4}$ zeigt auf das Minimum, woraus zu sehen, daß der Punkt so liegt, daß sich die Cuben der Abstände verhalten wie die Leuchtkraft der Lichter. Es gewährt dieß ein Mittel, aus der Lage eines solchen Punktes auf das Verhältniß zweier Leuchtkräfte zurückzuschließen.

Wird $a = b$, so ist $x^3 = (e-x)^3$ oder $x = e-x$, d. h. der Punkt der schwächsten Beleuchtung liegt in der Mitte.

---

*) Die beiden letzten Aufgaben werden in Dr. B. Witzschel's Physik, 1854, S. 32 und S. 409, berührt.

**) Aehnliche Aufgaben, besonders auch mehrere aus der Lehre von der Körperberechnung, finden sich in A. Burg's Compendium der höheren Mathematik.

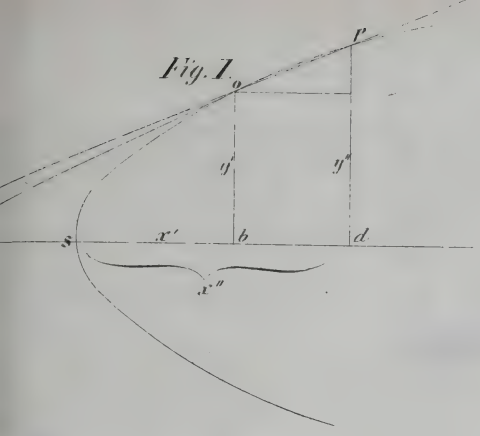


Fig. I.
r
o
y'
y''
s
x'
b
d
x''

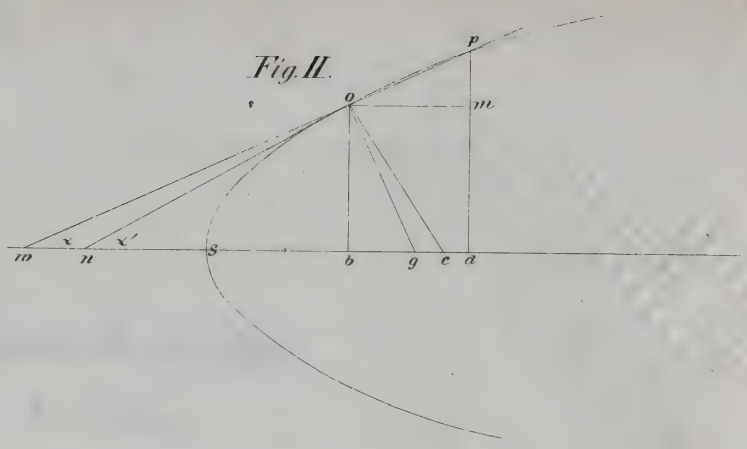


Fig. II.
p
o
m
m
x
x'
s
b
g
c
a

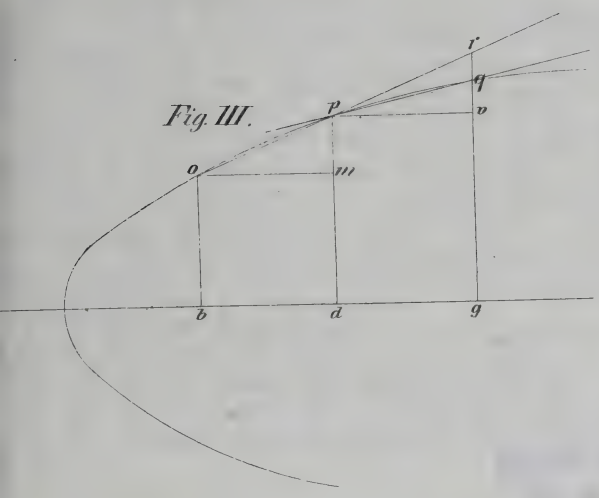


Fig. III.
r
q
p
v
o
m
b
d
g

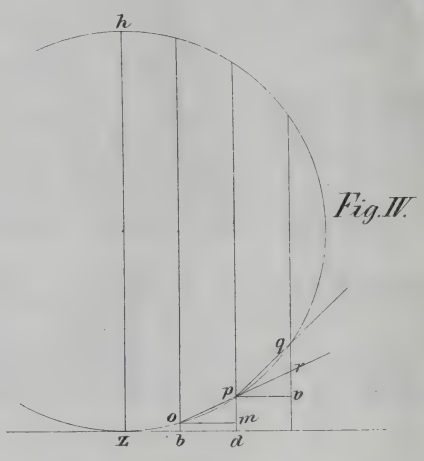


Fig. IV.
h
q
r
p
v
o
m
z
b
d

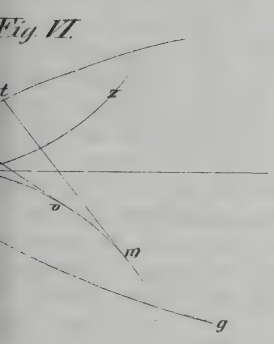


Fig. VI.
t
z
o
m
g

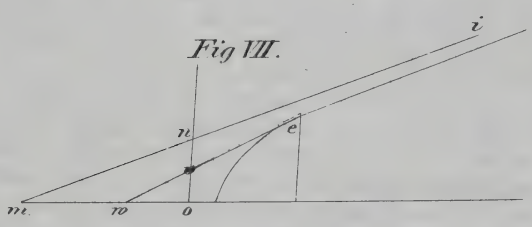


Fig. VII.
i
n
e
m
w
o

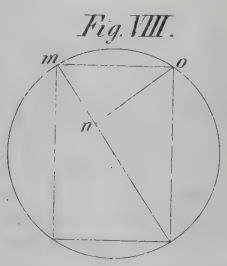


Fig. VIII.
m
o
n

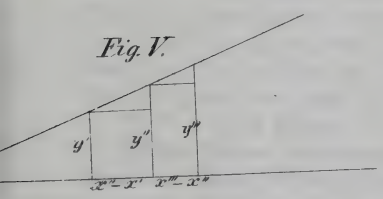


Fig. V.
y'
y''
y'''
x''-x'
x'''-x''

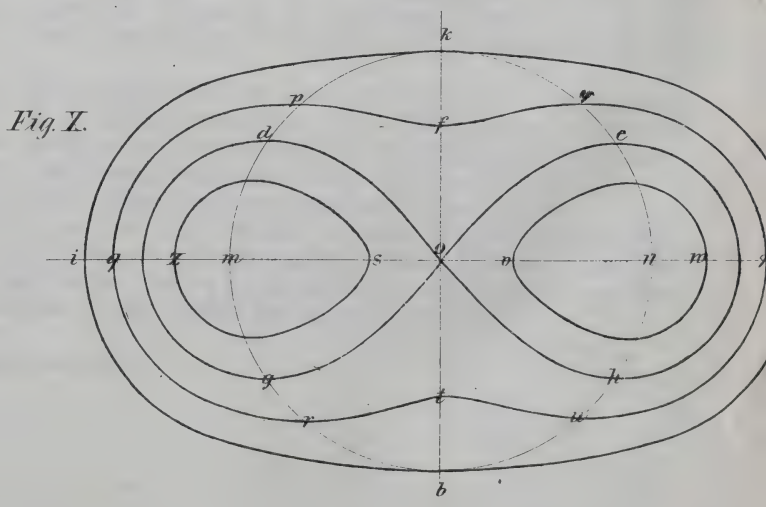


Fig. X.
k
p
d
f
e
i
q
z
m
s
o
v
n
m
g
h
r
t
u
b

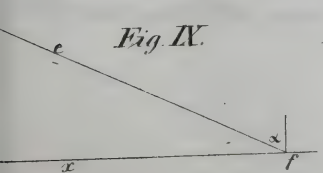


Fig. IX.
e
x
x
f

THE LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

Jahresbericht.

Verfassung.

In der Lehrverfassung wurde in dem zurückgelegten Schuljahre nichts verändert, nur zwei bestehende Einhtungen erfuhren eine Aenderung, bezüglich Erweiterung. Bei der Erbauung, mit welcher wir wöchentlich die chule beginnen und an welcher der ganze Cötus Theil nimmt, wird seit einiger Zeit abwechselnd mit dem ebete, welches nach dem Gesange vorgetragen wird, ein ausgewählter Abschnitt aus der Bibel vorgelesen, um ch auf diesem Wege unter unseren Schülern die Kenntniß der heiligen Bücher zu fördern.

Ferner um in den unteren Klassen, deren Schüler es am wenigsten verstehen, die häuslichen Aufgaben, mentlich die lateinischen Exercitien, mit Sorgfalt und Nachdenken zu fertigen, ein besseres Resultat in Bezug f Sicherheit und Festigkeit in der lateinischen Grammatik zu gewinnen, wurde in Quarta und Quinta zwar eine Stunde, in welcher die von den Schülern zu Hause ausgearbeiteten Uebersetzungen aus dem Deutschen das Lateinische von dem Lehrer korrigirt werden, beibehalten, außerdem aber wurden wöchentlich noch zwei unden angesetzt, in denen die Schüler der genannten Klassen in Gegenwart und unter Anleitung des Ordicius ein Exercitium zu fertigen haben.

Die Beicht- und Abendmahlsfeier wurde am 28. und 29. Mai, sowie am 8. und 9. November begangen. e Herren Professoren Dr. Witzschel und Dr. Schwanitz hielten die Vorbereitungsrede im Gymnasium.

Am 14. August besuchte Herr Geheimer Staatsrath von Wintzingerode einige Lectionen.

Am 28. und 29. September wurde das Privateramen und die halbjährige Censurvertheilung vorgenommen.

Am 25. November fand die Elmpt'sche Gedächtnißfeier Statt, bei welcher der Primaner Heller die deutsche e hielt.

Einer wesentlichen Verbesserung sieht das Gymnasium mit dem Beginne des nächsten Schuljahres entgegen. gst schon wurde das Bedürfniß nach einigen Lokalitäten im Gymnasialgebäude lebhaft empfunden, in denen Lehrerkollegium seine Konferenzen halten, der physikalische Unterricht, unterstützt von dem daselbst aufzuenden Apparate, für alle Klassen gegeben, namentlich aber eine Sexta errichtet werden könnte. Durch die ichtige Fürsorge des Departement des Kultus im Großherzoglichen Staatsministerium und die wohlwollende derung des Departement der Finanzen ist es gelungen, im Vordergebäude drei trefflich gelegene Räume zu innen, deren Bau im vorigen Jahre so weit gediehen ist, daß die Vollendung in der nächsten Zeit zu erten steht. Der zu wiederholten Malen von der Schule und von hiesigen Aeltern ausgesprochene Wunsch , die dem Gymnasium fehlende Klasse, in welcher der lateinische Unterricht begonnen werden könnte, in das n treten zu sehen, hat bei dem Großherzoglichen Staatsministerum so weit Berücksichtigung gefunden, als Verhältnisse gestatten. Der von dem Direktor eingereichte „Entwurf zur Errichtung einer Vorbereitungse" erhielt durch Rescript vom 4. Januar d. J. die Genehmigung des Großherzoglichen Staatsministerium. elbe lautet so:

§. 1. Zu Ostern 1855 tritt eine Vorbereitungsklasse für das Karl Friedrichs-Gymnasium zu Eisenach in das Leben, welche Knaben für die Quinta vorbereitet. Die Staatsbehörde giebt dazu ein vollständig eingerichtetes Lehrzimmer im Gymnasialgebäude und Holz zur Heizung; sie steht ferner unter der Oberaufsicht des Großherzogl. Staatsministerium und unter der Gymnasialdirektion, ist aber übrigens eine bloße Privatanstalt, deren Kosten durch das Schulgeld zu decken sind.

§. 2. Das Schulgeld wird vorläufig auf 15 Thaler jährlich angesetzt, welches alle Vierteljahre in gleichen Raten **praenumerando** an die Gymnasial-Kasseverwaltung entrichtet wird. Außerdem haben die dieser Vorbereitungsklasse angehörenden Knaben die Seite 16 der Schulgesetze angeordneten außerordentlichen Zahlungen für Kehren, Kreide, Schwamm, Heizen ꝛc. zu leisten.*)

*) Diese Zahlungen bestehen gewöhnlich in 1 Neugroschen monatlich.

§. 3. Die Anmeldungen zur Aufnahme erfolgen bei der Gymnasialdirektion an einem von dieser durch öffentliche Bekanntmachung festzusetzenden Termine. Da der Lehrkursus einjährig ist, so können diese Ameldungen in der Regel nur zu Ostern geschehen.

§. 4. Die angemeldeten Knaben haben vor ihrer schriftlichen und mündlichen Prüfung einen Impfschein und ein schriftliches Zeugniß über folgende Leistungen beizubringen:

1) geläufiges Lesen deutscher Druckschrift,
2) einige Fertigkeit, etwas Dictirtes leserlich und reinlich nachzuschreiben, sowie einige Uebung in der Orthographie,
3) Lesen und Schreiben der Zahlen im Umfange von 1 bis 1000, und schriftliche Lösung von Divisionsaufgaben in unbenannten Zahlen mit einem einstelligen Divisor.

Endlich darf der Aufzunehmende in der Regel nicht unter dem achten Lebensjahre stehen.

§. 5. Bei der Aufnahme erhalten die Knaben zwei Exemplare der Schulgesetze und ein Censurbuch, wofür sie die durch die Schulgesetze Seite 15 angeordnete Gebühr zahlen.*) Sie sind daher den Gesetzen und Anordnungen des Gymnasiums eben so unterworfen, wie die Schüler der eigentlichen Gymnasialklassen.

§. 6. Die Aeltern oder Vormünder der aufgenommenen Knaben verpflichten sich zur Leistung des festgestellten Schulgeldes auf das ganze Jahr des Lehr-Kursus.

§. 7. Dieser einjährige Lehr-Kursus steht im organischen Zusammenhange mit dem Lehrplane des Gymnasiums. Die Lehrgegenstände sind folgende:

1) Lateinisch, wöchentlich 8 Stunden,
2) Deutsch, = 4 =
3) Biblische Geschichte zunächst nur des alten Testamentes, verbunden mit einzelnen Liederversen aus dem Gesangbuche und einzelnen ausgewählten Bibelstellen, dabei geeignete Erläuterung des „Vater unser" und der vier ersten Gebote, Alles zur Belebung des sittlich-religiösen Gefühls ohne eigentlichen positiven Religionsunterricht, wöchentlich 2 Stunden,
4) Naturkunde durch Anschauung begründet und hinleitend zu der im Winterhalbjahr vorzunehmenden Elementargeographie, wöchentlich 2 Stunden,
5) Rechnen, wöchentlich 4 Stunden,
6) Schönschreiben, dgl.
7) Gesangunterricht, wöchentlich 1 Stunde.

§. 8. Die nach Vollendung des einjährigen Lehrkursus zum Eintritte in die Quinta reif befundenen Knaben zahlen bei dem Uebergange in die Quinta die Seite 15 der Schulgesetze festgesetzten Gebühren für die Aufnahme und für die Bibliothek.

Bereits ist der Hauptlehrer dieser Vorbereitungsklasse gewonnen. Es ist Herr Dr. Meister von hier, ein Zögling des Gymnasiums, der in Jena und Leipzig Philologie studirt hat und längere Zeit am Stoy'schen Institut als Lehrer thätig gewesen ist.

Das Großherzogliche Staatsministerium hat unter dem 23. Januar d. J. in Nr. 29 des Eisenacher Kreis-Blattes bekannt gemacht, daß mit Ostern d. J. diese Vorbereitungsklasse ins Leben treten wird.

Rescripte des Großherzoglichen Staatsministerium, Departement der Justiz und des Kultus.

Vom 31. Mai 1854: Nachdem die Direktion die gutachtlichen Anträge des Lehrer-Kollegium über Vertheilung der Calmberg'schen Stipendien berichtlich vorgelegt hatte, daß nämlich das Stiftungskapital auf 300 Thaler und dadurch der Betrag der Zinsen jährlich auf 120 Thaler erhöht, diese Summe zu gleichen Theilen für Prima und Sekunda verwendet und dem Lehrer-Kollegium gestattet werden möge, je nach dem Bedürfniß in jeder der beiden Klassen entweder drei Stipendien zu 20 Thaler oder zwei zu 30 Thaler vorzuschlagen, endlich daß jährlich als Termin der Vertheilung der 18. Oktober als der Stiftungstag der Schule festgesetzt werde genehmigt das Staatsministerium die gethanen Vorschläge mit dem Bemerken, daß eine Beschränkung des Stipendiengenusses auf Schüler, die studiren wollen, nach der Stiftung nicht vorliege und daß es nicht statthaft erscheine, den hälftigen Stipendienbetrag zu Gunsten des Stipendiaten bis zu dessen Abgang bei der Sparkasse zinstragend anzulegen. — Vom 21. Juni: Die Direktion wird davon in Kenntniß gesetzt, daß, um die Sti

*) Diese Verpflichtung trifft alle Schüler. Das eine Exemplar der Gesetze ist für das älterliche Haus, das andere für d Schüler selbst bestimmt. Die Gebühr für diese zwei Exemplare und das Censurbuch beträgt 8 Neugroschen.

ungszinsen jährlich auf 120 Thaler zu erhöhen, die Kasseverwaltung angewiesen worden sei, von den zunächst ngehenden Zinsen vorläufig 26 Thaler gegen dreiprocentige Zinsen bei der Sparkasse anzulegen, so daß zu Michaelis des laufenden Jahres nur der Rest der inzwischen fällig werdenden Zinsen zu vertheilen ist.

Vom 9. Juli: Die Direktion wird angewiesen, diejenigen Schüler, die Medicin studiren wollen, auf die in bschrift beigelegte und Nr. 24 des Regierungs-Blattes in Druck gegebene Ministerial-Bekanntmachung, nament- ch auf §. 3 aufmerksam zu machen.

Vom 19. Juli: Der Direktion wird auf ihre Anfrage eröffnet, daß an der Vorschrift, wonach die der Medicin sich widmen wollenden Abiturienten aus dem Großherzogthum das Maturitäts-Examen bei einem der umanistischen Gymnasien des Landes zu bestehen haben, nichts geändert worden ist.

Vom 12. und 18. August, 12. und 25. September: Die von der Direktion aufgesetzte Dienstvorschrift und usammenstellung des Einkommens des Einheizers bei dem Karl Friedrichs-Gymnasium erhält Bestätigung und e Direktion wird angewiesen, die eidliche Verpflichtung in der gesetzlichen Form vorzunehmen und hierauf das erpflichtungsprotokoll vorzulegen.

Vom 28. September: Die Direktion wird benachrichtigt, daß Diejenigen, welche bei einem der beiden ndes-Gymnasien die Abgangsprüfung zu bestehen haben und angewiesen werden, wegen einzelner Lehrgegen- nde, z. B. des Hebräischen, später einer besondern Nachprüfung sich zu unterwerfen, an die eine solche Prü- ng abhaltenden Lehrer zusammen 1 Thlr. 16 Sgr. zu entrichten haben.

Vom 18. Januar 1855: Unter Beifügung einer Abschrift eines an die Gymnasialdirektion in Weimar er- ssenen Rescriptes über Erhöhung des Schulgeldes mit Beginn des nächsten Schuljahres wird die Direktion gewiesen, sich berichtlich vernehmen zu lassen, ob, da es im Allgemeinen angemessen erscheine, das Schulgeld r alle Klassen gleichmäßig zu bestimmen, besondere Gründe vorhanden seien, von dem angedeuteten Grundsatze zuweichen und eine Abstufung des Schulgeldes nach Klassen oder Klassengruppen zu befürworten.

Vom 8. Februar: In Betreff der Vorbildung der dem Baufache sich Widmenden bleibt es bei der in der inisterial-Bekanntmachung vom 6. Mai 1853 (s. Regierungs-Blatt Nr. 15. 1853) getroffenen Bestimmung.

Vom 6. März: Vom Beginne des nächsten Schuljahres an (also von Ostern dieses Jahres an) beträgt s jährliche Schulgeld für Prima und Secunda je 16 thlr., für Tertia uns Quarta je 12 thlr., für Quinta läufig 10 thlr.

Turnübungen.

Da es seit 2 Jahren nicht möglich war, einen geeigneten Turnlehrer zu gewinnen, wurden Geldbeiträge den Schülern nicht erhoben. Freiwillige Geschenke von je einem Thaler gaben im Sommer 1853 die Pri- ner von Bielke und Wer, so daß der Kassevorrath auf 12 Thlr. 18 Sgr. 6 Pf. stieg. Für Reparaturen Instandhaltung des Platzes wurden im Jahre 1853 und 1854 zusammen 2 Thlr. 20 Sgr. ausgegeben, so noch 9 Thlr. 18 Sgr. 6 Pf. in Kasse sind.

Wenn nun gleich die regelmäßigen Turnübungen in den beiden genannten Jahren ausfallen mußten, so utzten doch mehrere Schüler den Platz und die Geräthschaften recht fleißig, um unter sich angemessene Körper- ngen vorzunehmen.

Unterstützung einzelner Schüler.

Das Uber'sche Stipendium wurde durch Ministerialrescript vom 6. April 1854 dem Quartaner Hermann ndschuhmacher zuertheilt.

Der Rest der halbjährigen Zinsen des Calmberg'schen Stipendium im Betrag von 23 Thlr. 19 Sgr. de nach Rescript vom 17. Oktober zu gleichen Theilen unter Arno Siefert in Prima und August Rink in unda vertheilt.

Die Elmpt'schen Stiftungsgelder erhielten nach Rescript vom 6. Nov. August Heller in Prima, Christian ssommer in Sekunda, Otto Heym in Tertia.

Die kalligraphischen Prämien bekamen die Quartaner August Weihrich und Tankmar Krause und Quintaner Karl Harnisch und Max Menneken nach erfolgter Genehmigung durch Reser. v. 13. Febr. 1855.

Das Brotstipendium genossen auch in diesem Jahre die Gymnasiasten Heller, Hossommer, Leinhos Sesemann.

Schulgelderlaß wurde gewährt: dem Tertianer Louis Kleinicke, der durch Krankheit häufig vom Schulbesuche ehalten worden war, für die beiden letzten Quartale des Jahres, durch Rescript vom 28. November 1854, dem Oberprimaner Heller für das ganze Schuljahr durch Rescript vom 28. Februar 1855.

Anmerkung. Die Fürstlichen Stipendien und die Zinsen des Görwitz'schen Legates kommen am 1. April dieses Jahres Vertheilung.

Lehrapparat.

Der Gnade Ihrer Kaiserlichen Hoheit, der Frau Großherzogin Großfürstin verdankt das Gymnasium: **Plinii hist. nat. ed. Sillig vol. IV., 25. 32 bis 34.** Publikation des liter. Vereins zu Stuttgart, Joh. Seb. Bach's Werke 4. Jahrg., und der Nibelungen Ende, Kupferstich nach Schnorr.

Durch die Großherzogl. Sächs. geheime Staatskanzlei wurde zu Folge hohen Befehls übersendet: **Monumenta German. histor. ed. Pertz. tom. XIII.**

Andere Geschenke waren: Abhandlungen der philosoph.-philolog. Classe der Königl. Bayer. Akademie der Wissenschaften Bd. VII., Abth. 2.; durch die Brockhaus'sche Buchhandlung von dem (ungenannten) Herausgeber: aus dem Leben von Johann Dieterich Gries; vom Herrn Professor **Dr. Weißenborn**: der zweite und dritte Band seiner in der Weidmann'schen Buchhandlung erschienenen Ausgabe des **Livius**, und **Horatii Epistolae ed. Obbar. et Schmid. Fasc. 1 bis 4**; vom Herrn Professor **Dr. Rein**: Wer zur Geschichte der Schweriner Gelehrtenschule; durch denselben aus der Bibliothek des verstorbenen Herrn Vice-Präsident **Dr. Nebe**: **Horatius ed. Baxter.-Gesner.-Zeune, Horat. ed. Iani tom. I.**, Creuzer Symbolik und Mythologie Bd. **1. 3. 4.**, Suhm **symbolae ad literaturam teutonicam antiquiorem, Edda rhythmica seu antiquior, vulgo Saemundina dicta, Hafn. 1787, Paullini rerum et antiquit. Germanic. syntagma, Olearii rerum Thuring. syntagma**, Sächs. Merkwürdigkeiten, **Casp. Sagittarii antiquitates Ducatus Thuring., Laurentii origines Doring., monimenta Hassiaca** von Schmincke, Sachsen-Coburgische Historia vom Jahre **1700**, die von Juncker herausgegebenen auf die Wartburg, Stadt und Fürstenthum Eisenach sich beziehenden Schriften, Limberg's lebendes und schwebendes Eisenach, Schumacher's Merkwürdigkeiten der Stadt Eisenach und ihres Bezirks, **Ioh. Mich. Heusingeri opuscula minora ed.** Töpfer, und noch einige kleinere deutsche, sächsische und besonders thüring. Geschichte enthaltende Bücher, endlich fünf große Mappen mit einer bedeutenden Anzahl größtentheils sehr werthvoller und interessanter Portraits von Fürsten, Feldherren, Staatsmännern Gelehrten, Dichtern ꝛc.

Endlich schenkten mehrere Primaner bei ihrem Abgange Bücher an die Bibliothek: nämlich Albert Göring: freundliche Erinnerung an Holland und seine Bewohner von Dethmar in drei Theilen, Karl Döbner: Napoleon in der Verbannung von O'meara, zwei Bände, Ferdinand v. Helldorff: Byrons sämmtliche Werke von Adolf Böttger in zwölf Bänden.

Aus dem Etat der Bibliothek wurde Folgendes angeschafft: **Ciceronis opera ed. Orell. II, 1**, Mommsen röm. Geschichte 1. Bd., Preller griech. Mythologie zwei Bände, Becker Charikles neue Bearbeitung drei Bände, Gräfenhan Geschichte der klassischen Philologie drei Bände, Stier Gesch. von Pompeji, J. und W. Grimm deutsches Wörterbuch I, 8, II, 1 und 2, Holtzmann Untersuchungen über das Nibelungenlied, Raumer Geschichte der Pädagogik 4. Bd., Graul Reise nach Ostindien drei Bände, Gfrörer Gustav Adolph von Schweden, Hagen des Landgrafen Ludwig des Frommen Kreuzfahrt, Wegele **Annales Reinhardsbr.**, Zeitschrift für thüring. Geschichte 1. Bd., Simon Ludwig der Heilige ꝛc., Möller Reinhardsbrunn, Lepsius kleine Schriften 1 Bd., Schlönbach der letzte König von Thüringen, Fichte Reden an die deutsche Nation, Gutzkow dramat. Werke VIII., 1. Abtheil., v. Auffeß Anzeiger für Kunde der deutschen Vorzeit 1853 und 1854, Berliner Zeitschrift für das Gymnasialwesen 1854, Rhein. Museum für Philologie 9. Bd., Jahn's Jahrb. der Philologie und Pädagogik, litter. Centralblatt und Zeitschrift für d. Alterthumsw. Jahrg. 1854, (die letzten drei Zeitschriften von einem Leseverein angekauft).

Für die Schülerbibliothek: Anderson Weltumsegelung, Falkenstein Geschichte der geograph. Entdeckungsreisen, Walter von Aquitanien, Körner unser Vaterland I. Bd., Meyer Volksbibliothek 3. 4. 5. 6. 7. 9. 15. Bändch.

Für den Gesangunterricht: 50 zweistimmige Chor-Solfeggien von Bertalotti, Partitur und Stimmen (gedruckte Noten).

Für die mathematisch-physikalische Bibliothek: Schlömilch Geometrie, zwei Bände, Naumann Lehrbuch der Geognosie Bd. 2. Abth. 3.

Von dem Reste des Görwitz'schen Legates (s. Programm v. J. 1854 Seite 19) wurde angeschafft: eine galvanische Batterie von zwölf Bunsen'schen Zinkkohlenelementen nebst dem Zubehör zur Versinnlichung der hauptsächlichsten galvanischen und electro-magnetischen Erscheinungen. Daraus hat der Lehrer der Mathematik und Physik bis jetzt hergestellt: Modell eines Zeigertelegraphen, eines Rotationsapparates und einer Vorrichtung zur Wasserzersetzung.

An Geschenken erhielt die mathematisch-physikalische Bibliothek: vom Herrn **Dr. Witzschel** in Dresden sein Buch: die Physik faßlich dargestellt nach ihrem neuesten Standpunkte; von der Mittler'schen Verlagsbuchhandlung in Posen: Spiller Grundriß der Physik.

Ferner für die naturhistorischen Sammlungen vom Herrn Eisenbahn-Ingenieur Kleinicke ein schönes Exemplar eines Fischabdruckes in Kohlenschiefer. Endlich schenkten mehrere Quintaner Schädel einiger Säugethiere und der Quartaner v. Egloffstein ein kleines Wiesel (**mustela vulgaris**).

Statistisches.*)

Wie am Schlusse des Osterprogrammes von 1853 bemerkt worden ist, wurde das Schuljahr $18\frac{53}{54}$ mit 83 chülern begonnen. Davon gingen während des Sommerhalbjahres ab: 1) Hermann Wer aus Prima, auf e Thomasschule in Leipzig, Anfang Juli; 2) Ferdinand Weitemeyer aus Secunda, zu derselben Zeit; 3) Arthur lock, der versuchsweise in die Secunda aufgenommen worden war, zu Michaelis; 4) Oskar Göring aus Tertia, nde Mai; 5) Armin Brückner aus Tertia, Anfang August, um sein vaterländisches Gymnasium in Meiningen besuchen; 6) Friedrich Schmidt aus Quarta, im September, um sich einem technischen Fache zu widmen; Cäsar Kästner aus Quinta, um eine Bürgerschule zu besuchen. Endlich hat der Quartaner Karl Habbicht s Gymnasium auf unbestimmte Zeit verlassen, um sich einer orthopädischen Kur zu unterwerfen.

Am 8. Oktober traten ein: Albert Göring in die obere, Guido Thon in die untere Secunda, Thankmar ause in Quinta.

So bestand der Cötus bei dem Beginne des Winterhalbjahres aus 78 Schülern, wovon 8 der Prima, 16 r Secunda, 21 der Tertia, 19 der Quarta, 14 der Quinta angehörten.

Davon schieden aus: 1) Eduard Zappe aus Quinta im November bei dem Umzuge der Seinigen nach nnover; 2) Wilhelm Salzmann aus Tertia zu Weihnachten, um Gärtner zu werden; 3) Christoph Trautvetter s Quarta Anfang März, um sich der Landwirthschaft zu widmen; 4) Louis Victor aus Tertia Ende März, als Kurhesse auf ein vaterländisches Gymnasium überzugehen; 5) Karl Schmidt aus der unteren Prima; Friedrich Schmidt aus Tertia bei dem Umzuge der Ihrigen nach Weimar; 7) Victor Liebe, bei der Oster- nslokation eben nach Prima versetzt, nach Berlin zu den Seinigen, um auf einem dortigen Gymnasium seine rstudien zu vollenden; 8) Hugo Schultze aus der unteren Secunda auf das hiesige Realgymnasium.

Auf die Universität wurden zu Ostern 1854 drei Oberprimaner entlassen, nämlich:

rl von Bielke aus Weimar, ein Jüngling von großem Fleiße und wissenschaftlichem Interesse, dessen Studium noch ungewiß war, Censur der Sitten und wissenschaftliche I.

bert Völker aus Geisa, um die Rechte zu studiren, Censur der Sitten und wissenschaftliche III.

lius Weber aus Völkershausen, um Medicin zu studiren, Censur der Sitten III., wissenschaftliche etwas mehr als III.

So blieben am Schlusse des Schuljahres 67 Schüler.

Dagegen wurden am 22. April 1854 wieder 14 Schüler aufgenommen, nämlich Edmund Deussing in Se- da, Franz Höber, Ferdinand Anhalt und Konstantin Friderici in Tertia, August Weihrich in Quarta, Karl nisch, Max Menneken, Karl Scheidemantel, Max Mihm, Theodor Schorcht, Julius Schmidt, Paul Traut- er und Wilhelm Schmidt in Quinta.

Demnach wurde das Schuljahr $18\frac{54}{55}$ mit 81 Schülern eröffnet, von denen 12 der Prima, 15 der Secunda, der Tertia, 18 der Quarta, 15 der Quinta angehörten.

Dazu kam noch zu Johannis Berthold Meier Kaiser, der in Quinta eintrat, dagegen ging zu derselben aus Tertia Heinrich Schüler ab. Während der großen Ferien am 20. Juli ertrank beim Baden der Ober- aner Christian Brannau von hier, ein ernster, fleißiger und strebsamer Jüngling, der sich gut zu entwickeln nnen hatte und dem Abgange auf die Universität, wo er Theologie studiren wollte, so nahe war. Möge so furchtbar ernste Mahnung für unsere Schüler nicht verloren sein!

Ferner verließen die Schule: Albert Göring aus Prima, Karl Göring aus Quarta, im August, wo sie den Ihrigen nach Berlin zurückkehrten; zu Michaelis August Briegleb und Oskar Müller aus Tertia, ersterer, auf das Realgymnasium überzugehen, letzterer, um Pharmacent zu werden; Karl Döbner aus Unter-Prima, sich zum Postfache vorzubereiten, Richard Grebner aus Ober-Secunda, um sich dem Rechnungswesen zu nen; zu Anfang des Februar 1855 der Oberprimaner Ferdinand v. Helldorff, um als Preuße das Maturi- ramen an einem vaterländischen Gymnasium zu bestehen; Anfang März Julius Zipfel aus Tertia, welcher alls zum Rechnungswesen sich vorbereiten will.

Bis jetzt ist endlich noch angemeldet der Abgang Gustav Gerlach's aus Tertia, welcher Oekonom werden will.

Auf die Universität werden jetzt nach vollendetem Schul-Kursus entlassen:

August Friedrich Heller, um Theologie
Fritz Liborius v. Steuben, um die Rechte } zu studiren.

Beide erhielten die wissenschaftliche Censur: noch nicht 2, und die erste sittliche.

Anmerkung: Außerdem bestand vor dem Lehrer-Kollegium die Maturitätsprüfung: Anton Kiel aus Geisa, welcher ymnasium in Fulda besucht hatte. Er erhielt die dritte wissenschaftliche Censur: zureichend vorbereitet.

*) Durch ein Versehen sind im vorjährigen Programme diese Notizen nicht abgedruckt worden.

Schulfeierlichkeiten.

Oeffentliche Hauptprüfung aller Klassen verbunden mit Recitation und Gesangprobe.

Mittwoch, am 28. März

Vormittags von 8 bis um 11 Uhr:

in Prima u. Secunda:	Neutestamentliche Exegese,
in Prima:	Horatius,
	Französisch.
in Secunda:	Homeri Ilias,
	Alte Geschichte.

Nachmittags um 2 Uhr:

Der Abiturient Heller trägt sein lateinisches Gedicht vor über die Worte: marcet sine adversario virtus, der Abiturient von Steuben sein deutsches Gedicht: Der Scheideweg,

aus Secunda:	Thon aus Cicero's Rede für Milo §. 53 bis zum Schlusse des 31. Kapitels,
	Otto Schmidt: mort de Jeanne d'Arc von Casimir Delavigne,
aus Tertia:	Degenring: Ovid. Metamorph. VII., 100—148,
	Trunk: l'histoire von Victor Hugo,
aus Quarta:	Weihrich: die Eichensaat von Simrock,
	Kohl: das Almosen von Hagenbach,
aus Quinta:	Harnisch: der Wittwe Haus zu Eisenach von Hagenbach,
	Menneken: die zwei Tannen von Lamey.

Dazwischen wird der Gesanglehrer von den Schülern mehrere Lieder unter Begleitung des Pianoforte vortragen lassen.

Donnerstag, den 29. März

Vormittags von 8 bis um 11 Uhr:

in Quarta:	Religion,
	Geographie.
in Tertia:	Xenoph. Anabasis,
	Curtius,
	Geschichte.

Nachmittags von 2 bis 5 Uhr:

in Quarta:	Griechisch,
	Rechnen.
in Quinta:	Lateinisch,
	Geographie,
	Naturkunde.

Schluß des Schuljahres am 31. März nach erfolgter Censurvertheilung.

Die Prüfung der zur Aufnahme Angemeldeten beginnt am 13. April um 8 Uhr des Morgens. Der neue Lehr-Kursus nimmt am 16. April seinen Anfang.

Eisenach am 21. März 1855.

Dr. Funkhänel.

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
515C126 C001 V003
CALCULUS [S.L.
3 0112 017225092